

# **A confiabilidade no projeto de pilares de concreto armado**

**José Milton de Araújo**

*Departamento de Materiais e Construção - FURG, Rio Grande, RS*

**RESUMO:** O objetivo deste trabalho é a análise probabilística de pilares de concreto armado com o emprego do método dos elementos finitos. As propriedades do concreto são representadas como campos estocásticos Gaussianos homogêneos. A tensão de escoamento do aço, a localização das armaduras, as dimensões da seção transversal do pilar e a carga axial são consideradas como variáveis aleatórias. O método de Monte Carlo é utilizado para a obtenção dos valores esperados e dos desvios padrões da carga de ruptura. O método dos coeficientes parciais de segurança é empregado para o dimensionamento dos pilares e a segurança estrutural é avaliada através do índice de confiabilidade, o qual é obtido por meio de simulações. Os efeitos dos principais parâmetros no índice de confiabilidade são estudados.

## **1. INTRODUÇÃO**

Diversos métodos para a análise estrutural probabilística têm sido estudados nos últimos anos. Dentre as alternativas disponíveis, o método de Monte Carlo destaca-se por sua simplicidade, facilidade de implementação computacional e pelo realismo da resposta obtida, já que se trata de um método de simulação direta. Esse método foi empregado em estudos anteriores para determinar os valores esperados das deformações e da carga de ruptura de vigas de concreto armado [1,2]. Através de simulações, foi possível obter o índice de confiabilidade alcançado com os procedimentos de projeto de vigas de concreto armado.

Vários trabalhos também têm sido desenvolvidos para a análise probabilística de pilares de concreto armado [10-13]. O objetivo principal desses trabalhos é determinar o nível de confiabilidade obtido com os procedimentos de projeto e estabelecer valores numéricos para os coeficientes parciais de segurança que levam a um determinado índice de confiabilidade. Nesses trabalhos, a análise estrutural é efetuada admitindo-se uma equação simplificada para representar o eixo deformado do pilar. Além disso, as propriedades do concreto são consideradas variáveis aleatórias, ou seja, sem nenhuma variação espacial ao longo do comprimento do pilar.

Entretanto, esses procedimentos simplificados podem levar a interpretações errôneas quanto à resposta estrutural. Por exemplo, para um carregamento simétrico, admite-se que a deformada do eixo do pilar também é uma curva

simétrica, como se espera em uma análise determinística. Essa simplificação é adotada porque as propriedades do concreto são consideradas como variáveis aleatórias e não como campos estocásticos. Com isso, predetermina-se a seção onde ocorre a ruptura do pilar que, neste caso, é sempre a seção mais solicitada.

Quando as propriedades do concreto são consideradas como campos estocásticos, isto é, com variações espaciais, verifica-se que a ruptura pode ocorrer em qualquer seção ao longo do eixo do pilar. Além disso, um carregamento simétrico pode causar uma deflexão assimétrica, dependendo da distribuição das propriedades aleatórias ao longo do eixo do pilar. Logo, é necessário considerar as propriedades do concreto como campos estocásticos.

As variações espaciais das propriedades mecânicas dos materiais podem ter um efeito significativo na confiabilidade, dependendo dos comprimentos de correlação dos campos estocásticos [14]. Como será mostrado neste trabalho, o índice de confiabilidade para um pilar de concreto armado diminui rapidamente, à medida que o comprimento de correlação aumenta. Portanto, as propriedades do concreto não devem ser modeladas como simples variáveis aleatórias.

Neste trabalho, emprega-se o método de Monte Carlo para avaliar o índice de confiabilidade obtido com os usuais procedimentos de projeto de pilares de concreto armado. A influência dos principais parâmetros no índice de confiabilidade é investigada. Os pilares pertencem a uma estrutura aporticada de nós fixos, estando submetidos à flexão normal e sob a ação de cargas de curta

duração. Apenas o caso de carregamento proporcional é considerado. Para a análise estrutural, emprega-se o método dos elementos finitos, incluindo-se as não-linearidades física e geométrica. O elemento utilizado é o tradicional elemento de pórtico plano com dois nós e três graus de liberdade por nó.

## 2. A GERAÇÃO DO CAMPO ESTOCÁSTICO

As seguintes variáveis aleatórias são consideradas neste trabalho:

$E_c, f_c, f_t$  = módulo de deformação longitudinal, resistência à compressão simples e resistência à tração simples do concreto;

$f_y$  = tensão de escoamento do aço;

$b, h$  = largura e altura das seções transversais do pilar (seções retangulares);

$\eta$  = distância das barras de aço até o centróide da seção de concreto;

$F$  = carga axial de compressão.

O módulo de elasticidade do aço, a excentricidade da carga axial, o comprimento do pilar e as condições de contorno são considerados como variáveis determinísticas.

As propriedades do concreto apresentam variações aleatórias ao longo do comprimento do pilar, definidas por uma função de autocorrelação. As outras variáveis aleatórias são consideradas sem variações espaciais, ou seja, elas só variam de simulação para simulação.

A geração dos campos estocásticos correspondentes às propriedades do concreto, bem como das demais variáveis aleatórias, segue o procedimento padrão descrito na referência [1]. Apenas algumas considerações peculiares a este trabalho são detalhadas a seguir.

Um valor  $b_i$  para a largura da seção transversal do pilar, correspondente à simulação de ordem  $i$ , é dado por

$$b_i = b_m [1 + c(1 - 2S_i)] \quad (1)$$

onde  $b_m$  representa a largura média e  $S_i$  é um número aleatório com distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ .

A constante  $c$  é dada por

$$c = \begin{cases} 0,025, & \text{se } b_m \leq 200 \\ 0,008 + 3,4/b_m, & \text{se } 200 < b_m \leq 2000 \\ 0,001 + 17,4/b_m, & \text{se } b_m > 2000 \end{cases} \quad (2)$$

onde  $b_m$  é dado em milímetros.

Empregando a equação (1), pode-se gerar vários valores para a largura da seção. Uma expressão similar é usada para gerar a altura da seção do pilar em cada simulação.

A variável  $\eta$ , definindo a distância das armaduras até o centróide da seção de concreto, é dada por

$$\eta_i = \eta_m [1 + 0,01(1 - 2S_i)] \quad (3)$$

onde  $\eta_m$  é o valor médio de  $\eta$ .

As equações (1) e (3) concordam com as variações dimensionais admitidas no código modelo CEB-FIP/90[7]. Essas equações são empregadas para gerar as variáveis aleatórias que definem a seção transversal do pilar em cada simulação.

A tensão de escoamento do aço,  $f_{yi}$ , correspondente à simulação de ordem  $i$ , é dada por

$$f_{yi} = f_{ym} (1 + V_{fy} Z_i) \quad (4)$$

onde  $f_{ym}$  e  $V_{fy}$  são a média e o coeficiente de variação de  $f_y$  e  $Z_i$  é uma variável aleatória Gaussiana com média zero e variância unitária [1].

Todas as variáveis aleatórias geradas com o emprego das equações (1) a (4) são consideradas independentes. Dessa forma, elas são obtidas a partir de diferentes valores dos números aleatórios  $S_i$ .

As variações espaciais das propriedades do concreto são representadas de maneira idêntica ao apresentado na referência [1]. Para isto, adota-se a função de autocorrelação

$$R(d) = V_\alpha^2 e^{-\left(\frac{d}{k}\right)^2} \quad (5)$$

onde  $d$  é a distância entre os centros de dois elementos finitos,  $V_\alpha$  é o coeficiente de variação

da propriedade considerada e  $k$  é o comprimento de correlação.

Se  $k = 0$ , as propriedades não são correlacionadas. Quando  $k$  tende ao infinito, a correlação é perfeita. Nesses casos extremos, o campo estocástico se reduz a um conjunto de simples variáveis aleatórias.

Para obter um campo estocástico unidimensional, o comprimento de correlação deve ser grande em relação à altura da seção transversal do pilar. Adotando-se  $k = 6h_m$ , onde  $h_m$  é a altura média da seção transversal, pode-se desprezar as variações das propriedades ao longo da altura da seção. Dessa forma, as propriedades do concreto só possuem variação significativa ao longo do comprimento do pilar. Isto é necessário para compatibilizar a modelagem do campo estocástico com a análise unidimensional que é feita neste trabalho.

### 3. VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA ESTRUTURAL

Neste trabalho, o pilar é modelado com o emprego de elemento finitos para pórticos planos, com dois nós e três graus de liberdade por nó [3]. O carregamento típico e a discretização empregada na análise são indicados na fig. 1.

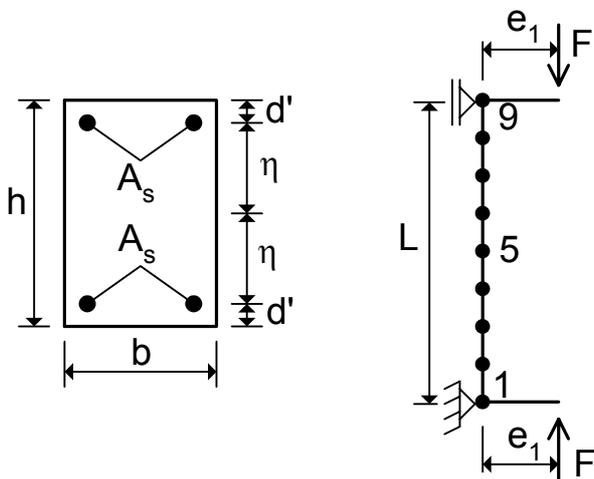


Fig. 1 - Geometria da seção, carregamento e discretização do eixo do pilar

O sistema de equações não-lineares, devido às não-linearidades física e geométrica, é resolvido iterativamente através do método BFGS. As cargas são aplicadas em pequenos incrementos, até a ocorrência da ruptura em uma seção do pilar. Com isso, obtém-se a carga de ruptura  $F_u$  em cada

simulação. A excentricidade inicial  $e_1$  é mantida constante durante todo o processo.

Os diagramas tensão-deformação dos materiais são os mesmos apresentados na referência [4], considerando-se o caso unidimensional. O critério de ruptura, a discretização da seção transversal em faixas e os detalhes da análise estrutural são fornecidos na referência [3].

Uma vez que a resposta da estrutura depende de todas as variáveis aleatórias envolvidas, a carga de ruptura  $F_u$  também é uma variável aleatória. Então, se  $F_s$  representa a carga aplicada, a probabilidade de falha,  $p_F$ , é dada por  $p_F = P(F_s > F_u)$ .

Esse problema pode ser formulado em termos da margem de segurança  $M = F_u - F_s$ , a qual também é uma variável aleatória. Neste caso, a falha corresponde à ocorrência do evento  $M < 0$ .

Conforme foi mostrado em [2], a probabilidade de falha está associada ao índice de confiabilidade  $\beta$ , que pode ser definido como

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (6)$$

onde  $\mu_M$  e  $\sigma_M$  representam a média e o desvio padrão da margem de segurança, respectivamente.

Assim, empregando-se o método de Monte Carlo, pode-se analisar a estrutura considerando as propriedades geradas em cada simulação, obtendo-se um conjunto de valores para a carga de ruptura  $F_u$ . Gerando-se diversos valores para a carga solicitante  $F_s$ , obtém-se as margens de segurança e pode-se calcular o índice de confiabilidade.

De um modo geral, a média  $\mu_M$  da margem de segurança converge mais rapidamente do que o desvio padrão  $\sigma_M$ , com o aumento do número de simulações. Assim, o número de simulações deve ser o necessário para que o desvio padrão da margem de segurança possa ser estimado com precisão. Estudos preliminares indicaram que, para o presente problema, a convergência é alcançada com 200 simulações.

Além disso, a consideração dos campos estocásticos para as propriedades do concreto introduz uma forte dependência da discretização adotada no método dos elementos finitos. Tem sido mostrado que, para contornar esse problema, o comprimento dos elementos deve ser no máximo

igual à metade do comprimento de correlação do campo estocástico[9]. Em vista disto, nos exemplos apresentados a seguir, o número de elementos finitos é obtido através da relação  $2L/k \geq 8$ , onde  $L$  é o comprimento do pilar e  $k$  é o comprimento de correlação do campo estocástico.

#### 4. PROCEDIMENTO DE PROJETO DOS PILARES

O objetivo deste trabalho é a determinação dos índices de confiabilidade obtidos com os procedimentos de projeto de pilares de concreto armado, apresentados nos códigos de projeto [5,6,7]. Como é usual nesses procedimentos, admite-se que o carregamento é proporcional, ou seja, a carga axial  $F$  é aplicada com uma excentricidade inicial  $e_1$  constante. Assim, o momento fletor de primeira ordem,  $M_1 = Fe_1$ , aumenta proporcionalmente à carga  $F$ . Neste caso, a carga axial e o momento fletor são perfeitamente correlacionados.

Tem sido demonstrado que a confiabilidade de pilares de concreto armado depende da seqüência do carregamento adotado[10]. Portanto, os índices de confiabilidade aqui obtidos não devem ser extrapolados para situações distintas do carregamento proporcional.

O pilar birrotulado da fig. 1 é analisado considerando-se constantes as seguintes variáveis:

$b_m = h_m = 20$  cm (dimensões médias das seções transversais);  
 $\eta_m = 7$  cm (posição média das armaduras);  
 $f_{ck} = 20$  MPa (resistência característica à compressão do concreto);  
 $f_{yk} = 500$  MPa (tensão de escoamento característica do aço).

Nos códigos de projeto, a resistência característica é definida como o valor da resistência com uma probabilidade de ocorrência igual a 5%. Admitindo-se a distribuição normal de probabilidades, os valores médios da resistência à compressão do concreto e da tensão de escoamento do aço são dados por

$$f_{cm} = \frac{f_{ck}}{1 - 1,645V_{fc}} ; f_{ym} = \frac{f_{yk}}{1 - 1,645V_{fy}} \quad (7)$$

onde  $V_{fc}$  e  $V_{fy}$  são os coeficientes de variação dessas propriedades.

A partir da resistência média à compressão do concreto,  $f_{cm}$ , obtém-se os valores médios do módulo de deformação longitudinal,  $E_{cm}$ , e da resistência à tração,  $f_{tm}$ , com as correlações apresentadas em [1].

Admitindo-se que a carga aplicada também possui distribuição normal e que a carga axial característica,  $F_k$ , é aquela com uma probabilidade de ocorrência igual a 95%, a carga média,  $F_m$ , é dada por

$$F_m = \frac{F_k}{1 + 1,645V_F} \quad (8)$$

onde  $V_F$  é o coeficiente de variação da carga aplicada ao pilar.

Assim, definidos os valores característicos e os coeficientes de variação das resistências e da carga externa, pode-se obter os seus valores médios, necessários para a geração das amostras do método de Monte Carlo.

Os valores de cálculo das resistências são iguais a  $\sigma_{cd} = 0,85f_{cd}$ , para o concreto, e  $f_{yd}$ , para o aço, onde

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c ; f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (9)$$

O valor de cálculo da carga aplicada,  $F_d$ , é dado por

$$F_d = \gamma_f F_k \quad (10)$$

Neste trabalho, adotam-se os seguintes valores para os coeficientes parciais de segurança:  $\gamma_c = 1,4$ ;  $\gamma_s = 1,15$ ;  $\gamma_f = 1,4$ . Os coeficientes de variação das variáveis aleatórias Gaussianas são  $V_F = 0,1$ ;  $V_{fy} = 0,05$ ;  $V_{Ec} = V_{fc}$ ;  $V_{ft} = 1,5V_{fc}$ .

A área de aço necessária,  $A_s$ , é obtida dimensionando-se a seção crítica do pilar, considerando as resistências de cálculo e as dimensões médias  $b_m$ ,  $h_m$  e  $\eta_m$ . No dimensionamento à flexo-compressão da seção crítica, adota-se o diagrama retangular de tensões para o concreto em compressão [6]. Os esforços para o dimensionamento são a força normal  $F_d$  e o momento fletor  $M_d = F_d(e_1 + e_2)$ . A

excentricidade de segunda ordem,  $e_2$ , tem as seguintes expressões, conforme [8],

$$e_2 = \frac{L^2}{10} \frac{(0,0035 + f_{yd}/E_s)}{h_m}, \text{ se } \nu \leq 0,425 \quad (11)$$

$$e_2 = \frac{L^2}{10} \frac{(0,0035 + f_{yd}/E_s)}{(\nu/0,425)h_m}, \text{ se } \nu > 0,425 \quad (12)$$

onde  $L$  é o comprimento de flambagem do pilar,  $\nu = F_d / (b_m h_m f_{cd})$  e  $E_s = 200 \text{ GPa}$  é o módulo de elasticidade do aço.

Depois que o pilar é dimensionado com esse procedimento, emprega-se o modelo de elementos finitos para determinar sua carga de ruptura em cada simulação. Então, o índice de confiabilidade é obtido como descrito previamente, considerando-se 200 simulações.

## 5. RESULTADOS

Na fig. 2, apresenta-se um histograma das localizações da ruptura ao longo do eixo do pilar. Este pilar tem um comprimento  $L = 346 \text{ cm}$ , o que corresponde a um índice de esbeltez  $\lambda = 60$ . Para essa figura, foram adotados  $V_{fc} = 0,2$  e  $\nu = 1,0$ .

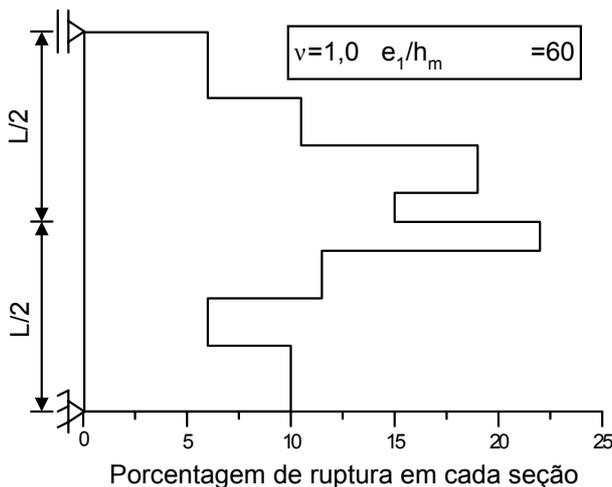


Fig. 2 - Histograma das localizações da ruptura

Como pode ser observado, o maior número de rupturas está localizado na região central do vão, como uma conseqüência do carregamento simétrico. Entretanto, a ruptura pode ocorrer em qualquer seção ao longo do comprimento do pilar.

Isto demonstra a importância de se considerar as variações espaciais das propriedades do concreto.

Na fig. 3, apresentam-se as variações do índice de confiabilidade com a excentricidade relativa de primeira ordem  $e_1/h_m$ . Diferentes valores do parâmetro de carga  $\nu$  são considerados. Os limites superiores para  $e_1/h_m$  e  $\nu$  correspondem a uma porcentagem máxima de armadura do pilar, conforme estabelecido nos códigos de projeto [5,7].

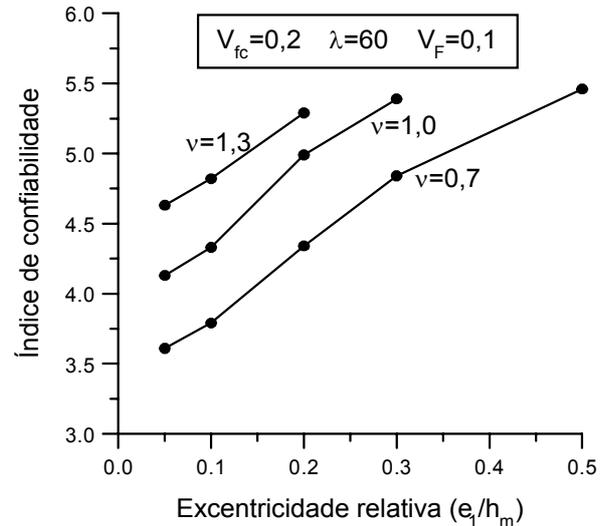


Fig. 3 - Influência da excentricidade relativa de primeira ordem no índice de confiabilidade

Observando a fig. 3, verifica-se que o índice de confiabilidade aumenta com o crescimento da excentricidade relativa de primeira ordem e do parâmetro de carga  $\nu$ . Isto ocorre devido ao aumento da área de aço quando a carga axial e/ou a excentricidade de primeira ordem crescem. Logo, pode-se concluir que o método dos coeficientes parciais de segurança introduz diferentes níveis de segurança, dependendo das condições de carregamento.

Na fig. 4, mostra-se a influência do coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto no índice de confiabilidade. O índice de confiabilidade diminui quando a variabilidade da resistência aumenta, como é esperado. Logo, a segurança depende muito do controle de qualidade empregado na execução da estrutura.

Para levar em conta a variabilidade das propriedades do concreto, o fator  $\gamma_c$  pode ser selecionado de acordo com o controle de qualidade. Por exemplo, o valor padrão  $\gamma_c = 1,4$  pode ser adotado para uma construção de

qualidade média em que o coeficiente de variação  $V_{fc}$  se situa entre 0,15 e 0,20. Para outros níveis de controle,  $\gamma_c$  pode ser ajustado de forma a se obter o mesmo nível de segurança.

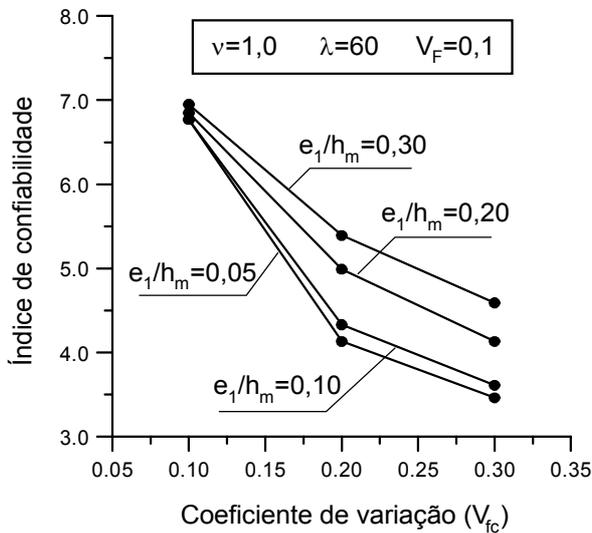


Fig. 4 - Influência da variabilidade da resistência à compressão do concreto no índice de confiabilidade

Na fig. 5, apresentam-se os valores esperados da carga de ruptura do pilar em função do seu índice de esbeltez  $\lambda$ . Nessa mesma figura são mostrados os resultados da análise determinística, obtidos com os valores médios das variáveis aleatórias.

Pode-se verificar que os valores esperados da carga de ruptura são menores que os obtidos na análise determinística. Além disso, verifica-se que a carga de ruptura diminui quando a esbeltez do pilar aumenta. Logo, a análise determinística leva à interpretação que a segurança é maior para os pilares mais curtos.

Na fig. 6, apresenta-se a influência da esbeltez no índice de confiabilidade. Essa figura mostra que os pilares mais esbeltos são os que apresentam maior segurança, o que contradiz os resultados obtidos através da análise determinística. Isto ocorre porque a área de aço obtida no projeto aumenta com a elevação da esbeltez. Logo, pode-se concluir que a taxa de armadura tem um efeito favorável na confiabilidade, apesar do aumento da esbeltez do pilar.

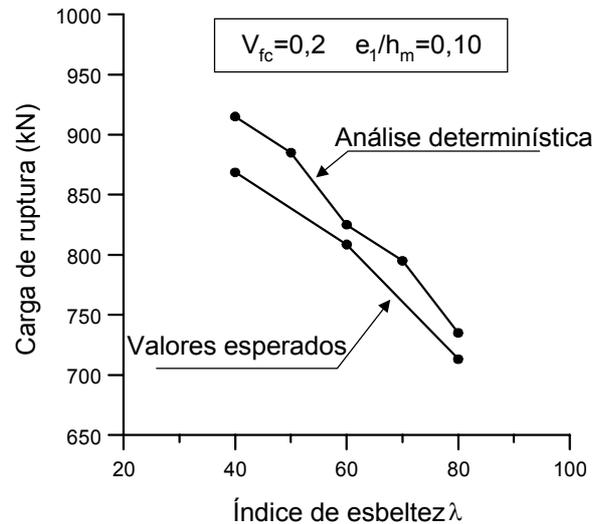


Fig. 5 - Influência da esbeltez na carga de ruptura

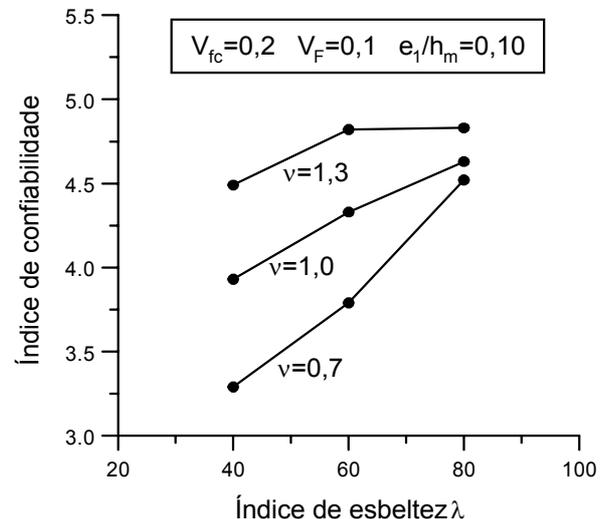


Fig. 6 - Influência da esbeltez no índice de confiabilidade

Na fig. 7, apresenta-se a variação do índice de confiabilidade com o comprimento de correlação do campo estocástico para as propriedades do concreto. Observa-se que o índice de confiabilidade é muito influenciado pelo valor do comprimento de correlação. O índice de confiabilidade diminui com o aumento do comprimento de correlação até alcançar um valor mínimo. Entretanto, esse valor mínimo não coincide com o índice de confiabilidade obtido quando as variações espaciais das propriedades são desconsideradas. Portanto, a consideração das propriedades do concreto como variáveis aleatórias, em vez de campos estocásticos, não leva aos menores índices de confiabilidade neste caso.

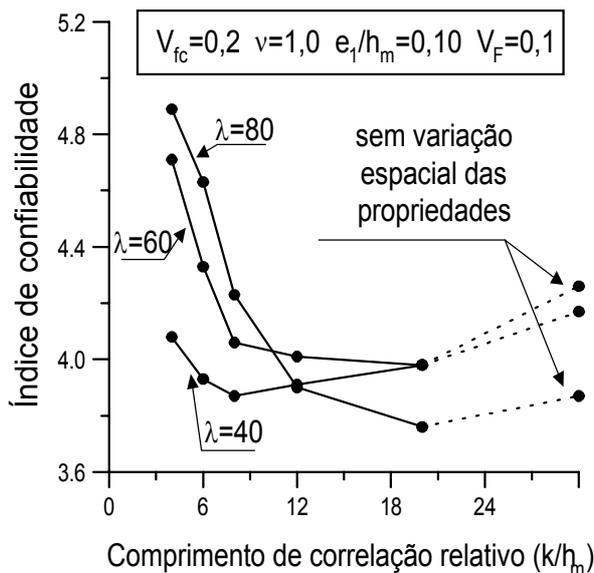


Fig. 7 - Influência do comprimento de correlação na confiabilidade

## 6. CONCLUSÕES

Neste trabalho, empregou-se o método de Monte Carlo para a análise de confiabilidade de pilares de concreto armado. As dimensões das seções transversais do pilar, a tensão de escoamento do aço, a posição das armaduras e a carga axial foram consideradas como variáveis aleatórias. As propriedades do concreto foram representadas como campos estocásticos Gaussianos. Os resultados obtidos são limitados ao caso de carregamento proporcional.

Foi mostrado no trabalho que para a realização de uma análise probabilística consistente é necessário considerar as variações espaciais das propriedades do concreto (campos estocásticos). Quando isto é feito, verifica-se que a ruptura pode ocorrer em qualquer seção transversal ao longo do comprimento do pilar. Os procedimentos que consideram as propriedades do concreto como simples variáveis aleatórias não são satisfatórios para uma análise de confiabilidade, porque eles predeterminam a seção onde a ruptura irá ocorrer. Além disso, esses procedimentos não levam aos valores mínimos do índice de confiabilidade. Portanto, eles não se constituem em procedimentos seguros para se obter valores dos coeficientes parciais de segurança que correspondem a um determinado índice de confiabilidade requerido.

Este estudo mostrou que a confiabilidade de pilares de concreto armado depende de vários parâmetros, como o valor de projeto da carga

aplicada, a excentricidade de primeira ordem, o índice de esbeltez, a variabilidade das propriedades do concreto e das cargas.

Os códigos de projeto adotam valores constantes para os coeficientes parciais de segurança, os quais, geralmente, introduzem uma confiabilidade satisfatória nos casos mais desfavoráveis. Entretanto, esses coeficientes podem ser modificados para que se obtenha um nível de confiabilidade uniforme. Por exemplo, os coeficientes  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  podem ser ajustados para levar em conta a variabilidade das propriedades dos materiais e o nível do controle de qualidade. O coeficiente  $\gamma_f$  deve considerar a variabilidade do carregamento e incertezas relacionadas ao modelo de cálculo. Por último, o próprio modelo de cálculo pode ser ajustado para que se obtenha um determinado índice de confiabilidade.

## REFERÊNCIAS

1. Araújo, J. M. - *Análise probabilística de vigas de concreto armado. Parte 1: Avaliação das deformações*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, nº 42, p. 19-24, Lisboa, Setembro, 1997.
2. Araújo, J. M. - *Análise probabilística de vigas de concreto armado. Parte 2: Avaliação da segurança*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, nº 43, p. 35-39, Lisboa, Fevereiro, 1998.
3. Araújo, J. M. - *Pilares esbeltos de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, nº 29, p. 29-33, Lisboa, Dezembro, 1989.
4. Araújo, J. M.; Campos Filho, A. - *Modelo bidimensional para análise de vigas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, nº 34, p. 9-12, Lisboa, Julho, 1992.
5. Associação Brasileira de Normas Técnicas - *Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado: NBR-6118*. Rio de Janeiro, 1980.
6. Comitê Euro-International du Béton - *Code-Modèle CEB/FIP Pour les Structures en Béton*. Paris, 1978.

7. Comité Euro-International du Béton - *CEB/FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.
8. Comité Euro-International du Béton - *CEB/FIP Manual of Buckling and Instability*, 1978.
9. Der Kiureghian, A.; Ke, J. B. - *The stochastic finite element method in structural reliability*. Stochastic structural mechanics (Lecture Notes in Engrg. No. 31), Y. K. Lin and G. I. Schuëller, eds., Springer-Verlag, Berlin, p. 84-109, 1987.
10. Frangopol, D. M.; Ide, Y.; Spacone, E.; Iwaki, I. - *A new look at reliability of reinforced concrete columns*. Structural Safety, v.18, 123-150, 1996.
11. Mirza, S. A. - *Reliability-based design of reinforced concrete columns*. Structural Safety, v.18, p. 179-194, 1996.
12. Mirza, S. A.; MacGregor, J. G. - *Slenderness and strength reliability of reinforced concrete columns*. ACI Structural Journal, v. 86, p. 428-438, 1989.
13. Ruiz, S. E.; Aguilar, J. C. - *Reliability of short and slender reinforced-concrete columns*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 120, p. 1850-1865, 1994.
14. Zhang, J.; Ellingwood, B. - *SFEM for reliability of structures with material nonlinearities*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v. 122, p. 701-704, 1996.