

A rigidez equivalente das lajes nervuradas de concreto armado

Effective stiffness of reinforced concrete waffle slabs

José Milton de Araújo

Departamento de Materiais e Construção – FURG – Rio Grande, RS

e-mail: ed.dunas@mikrus.com.br

RESUMO: Neste trabalho apresentam-se três métodos para a determinação da rigidez equivalente das lajes nervuradas de concreto armado. Um método teoricamente consistente é baseado na igualdade da energia de deformação da laje nervurada e da laje maciça equivalente. Esse método requer um procedimento numérico para a obtenção da rigidez equivalente. A validade do método é comprovada por comparação com resultados experimentais disponíveis. O método numérico é empregado para a verificação de dois procedimentos simplificados.

ABSTRACT: Three methods to obtain the equivalent stiffness of reinforced concrete waffle slabs are presented in this work. A consistent theoretical method is based on the equality of the strain energy of both waffle and equivalent solid slabs. This method requests a numerical procedure to obtain the equivalent stiffness. The validity of the method is demonstrated through comparison with experimental results. The numerical method is used to verify two simplified procedures.

1. INTRODUÇÃO

Em artigo anterior [1], foi mostrado que as lajes nervuradas de concreto armado podem ser calculadas como se elas fossem maciças. Para isto, as normas de projeto [2,3,4] apresentam algumas exigências quanto às dimensões das nervuras, ao espaçamento entre os eixos das nervuras e quanto à espessura da mesa.

Uma vez atendidas as restrições impostas nas normas de projeto, basta determinar uma espessura equivalente e fazer o cálculo como laje maciça, empregando-se a teoria de placas [5].

Conforme foi mostrado anteriormente [1], a espessura equivalente pode ser determinada a partir de resultados experimentais. Para isto, é necessário conhecer a flecha W_{exp} , determinada nos ensaios para um dado carregamento, e a flecha W_1 , calculada para uma laje maciça de espessura unitária submetida ao mesmo carregamento. A espessura equivalente, h_e , é dada por

$$h_e = \left(\frac{W_1}{W_{exp}} \right)^{1/3} \quad (1)$$

Na determinação da espessura equivalente através da equação (1), deve-se considerar apenas o estágio I, para eliminar os efeitos da não-linearidade física decorrentes da fissuração do concreto. Esses efeitos devem ser incluídos na análise da laje maciça equivalente e não na determinação da espessura equivalente da laje nervurada. Por isso, a flecha experimental W_{exp} deve corresponder a um nível de carregamento baixo.

O objetivo deste trabalho é discutir algumas formas de se determinar a espessura equivalente das lajes nervuradas bidirecionais (armadas em duas direções). Inicialmente, apresenta-se um método baseado na equivalência da energia de deformação. Esse método requer a realização de integração numérica sobre o domínio da laje, não sendo prático para o emprego na fase de projeto. Entretanto, esse método é tomado como referência para a verificação de dois métodos simplificados que podem ser usados no projeto estrutural.

2. EQUIVALÊNCIA DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DA LAJE

Uma estrutura que apresenta uma variação periódica em sua rigidez pode ser substituída por uma estrutura homogênea equivalente com comportamento global idêntico. Esse conceito de homogeneização tem sido aplicado para resolver diversos problemas estruturais, onde a geometria da estrutura varia periodicamente [6,7,8,9]. As lajes nervuradas são exemplos típicos de estruturas cuja rigidez varia de maneira periódica no domínio espacial. Portanto, pode-se empregar alguma técnica de homogeneização para determinar sua rigidez equivalente.

Uma maneira de se efetuar a homogeneização consiste em igualar a energia de deformação da estrutura real com a energia de deformação da estrutura equivalente. Esse método tem sido utilizado por diversos autores e é considerado, neste trabalho, como o método de referência.

Na fig. 1 apresenta-se uma laje retangular de vãos l_x e l_y , segundo as direções x e y , respectivamente. A carga $p(x, y)$ é perpendicular ao plano da laje.

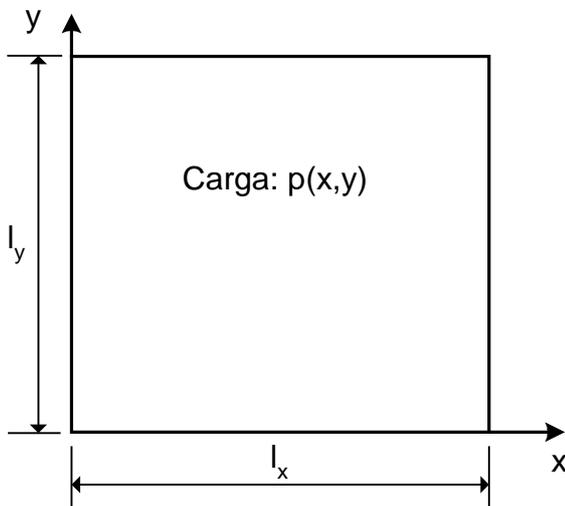


Fig. 1 – Laje retangular

De um modo geral, um elemento de laje está submetido aos momentos fletores M_x e M_y , ao momento torçor, M_{xy} , e aos esforços de membrana N_x , N_y e N_{xy} , ambos por unidade de comprimento. A principal contribuição para a energia de deformação da laje decorre dos momentos M_x , M_y e M_{xy} . Além disso, se a laje

estiver livre para se deslocar no plano horizontal, os esforços de membrana serão nulos. Desse modo, pode-se desprezar a contribuição dos esforços de membrana no cálculo da energia de deformação da laje.

As curvaturas são definidas por

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

onde $w = w(x, y)$ representa os deslocamentos transversais do plano médio da laje.

Os momentos são relacionados com as curvaturas na forma

$$M_x = -D(x, y)(\kappa_x + \nu\kappa_y) \quad (3)$$

$$M_y = -D(x, y)(\kappa_y + \nu\kappa_x) \quad (4)$$

$$M_{xy} = -D(x, y)(1 - \nu)\kappa_{xy} \quad (5)$$

onde $D(x, y)$ é a rigidez da laje em um ponto genérico de coordenadas (x, y) e ν é o coeficiente de Poisson.

A energia de deformação U é dada por [10]

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} D(x, y) \psi(x, y) dx dy \quad (6)$$

onde

$$\psi(x, y) = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1 - \nu)\kappa_{xy}^2 \quad (7)$$

A laje maciça equivalente possui uma rigidez constante D_e e sua energia de deformação é

$$U = \frac{1}{2} D_e \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \psi(x, y) dx dy \quad (8)$$

Igualando as expressões (6) e (8), obtém-se a rigidez equivalente da laje nervurada

$$D_e = \frac{\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} D(x, y) \psi(x, y) dx dy}{\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \psi(x, y) dx dy} \quad (9)$$

A rigidez equivalente pode ser escrita na forma

$$D_e = E_{cs} I_e \quad (10)$$

onde E_{cs} é o módulo secante do concreto e I_e é a inércia equivalente ($I_e = D_e$ quando $E_{cs} = 1$).

Em termos da espessura equivalente $h_{e,cal}$, pode-se escrever

$$D_e = \frac{E_{cs} h_{e,cal}^3}{12(1-\nu^2)} \quad (11)$$

de onde resulta

$$h_{e,cal} = [12(1-\nu^2)I_e]^{1/3} \quad (12)$$

A equação (9) é resolvida com o procedimento descrito na seção seguinte.

3. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PARA OBTENÇÃO DA RIGIDEZ EQUIVALENTE

Para a obtenção da rigidez equivalente dada na equação (9), é necessário conhecer a função $\psi(x, y)$, a qual depende das curvaturas da laje. Então, é necessário conhecer a expressão de $w(x, y)$ em cada caso particular.

Para uma laje retangular simplesmente apoiada nos quatro lados, como indicada na fig. 1, a solução pode ser expandida na série de Fourier

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l_x} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{l_y} \quad (13)$$

onde W_{mn} são coeficientes que dependem da carga.

A expressão (13) representa a solução de Navier para as placas retangulares simplesmente apoiadas no contorno [5].

Substituindo (13) na equação (2), obtém-se as curvaturas

$$\kappa_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left(\frac{m\pi}{l_x} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l_x} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{l_y} \quad (14)$$

$$\kappa_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left(\frac{n\pi}{l_y} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l_x} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{l_y} \quad (15)$$

$$\kappa_{xy} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left(\frac{m\pi}{l_x} \right) \left(\frac{n\pi}{l_y} \right) \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y} \quad (16)$$

Se a carga for uniformemente distribuída, obtém-se os coeficientes [10]

$$W_{mn} = \frac{16}{\pi^6 mn \left[\left(\frac{m}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{l_y} \right)^2 \right]^2} \quad (17)$$

com $m, n = 1, 3, 5, \dots$

Desse modo, pode-se calcular a função $\psi(x, y)$ com o emprego da equação (7).

A rigidez $D(x, y)$ da laje nervurada é obtida com o auxílio da fig. 2.

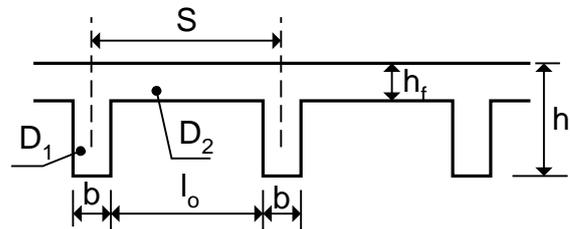


Fig. 2 – Seção transversal da laje nervurada

A rigidez da laje na região das nervuras, D_1 , e a rigidez na região da mesa, D_2 , são dadas por

$$D_1 = \frac{E_{cs} h^3}{12(1-\nu^2)} ; \quad D_2 = \frac{E_{cs} h_f^3}{12(1-\nu^2)} \quad (18)$$

e $D_2 \leq D(x, y) \leq D_1$.

Neste trabalho, admite-se que as nervuras das duas direções possuem a mesma altura h . Entretanto, a largura b e o espaçamento $S = l_o + b$ entre os eixos das nervuras pode variar de uma direção para a outra. As nervuras são dispostas segundo as direções x e y .

Na fig. 3, apresenta-se a disposição das nervuras segundo as duas direções em planta.

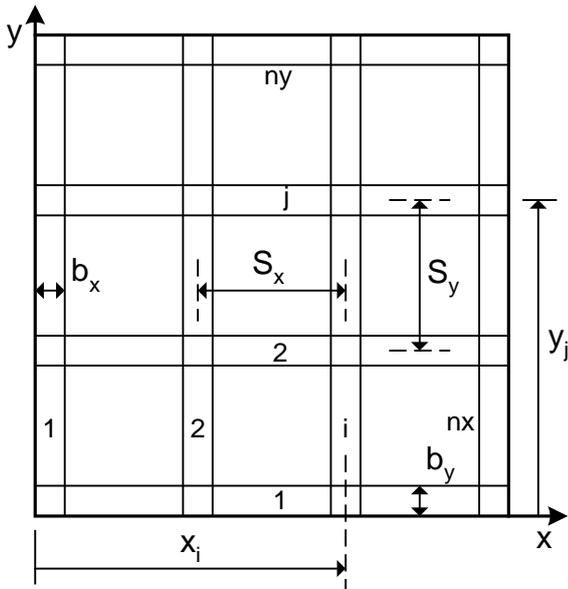


Fig. 3 – Posicionamento das nervuras da laje

As coordenadas dos eixos das nervuras da direção y são dadas por

$$x_i = \frac{b_x}{2} + (i-1)S_x ; i = 1, \dots, nx \quad (19)$$

onde b_x é a largura, S_x é a distância entre eixos e nx é o número de nervuras.

Analogamente, as coordenadas dos eixos das nervuras da direção x são dadas por

$$y_j = \frac{b_y}{2} + (j-1)S_y ; j = 1, \dots, ny \quad (20)$$

Assim, os vãos da laje podem ser relacionados com as dimensões e com o número de nervuras através das expressões

$$l_x = (nx-1)S_x + b_x ; l_y = (ny-1)S_y + b_y \quad (21)$$

A rigidez da laje nervurada pode ser escrita na forma

$$D(x, y) = D_1 f(x, y) + D_2 [1 - f(x, y)] \quad (22)$$

onde a função $f(x, y)$ é dada por

$f(x, y) = 1$, se

$$x_i - \frac{b_x}{2} \leq x \leq x_i + \frac{b_x}{2}, i = 1, \dots, nx$$

e/ou

$$y_j - \frac{b_y}{2} \leq y \leq y_j + \frac{b_y}{2}, j = 1, \dots, ny$$

$$f(x, y) = 0, \text{ para outros valores de } x \text{ e } y. \quad (23)$$

Uma vez definidos todos os termos presentes na equação (9), pode-se realizar uma integração numérica para avaliar a rigidez equivalente da laje nervurada. Isto é feito discretizando-se a superfície da laje em pequenos retângulos, como indicado na fig. 4.

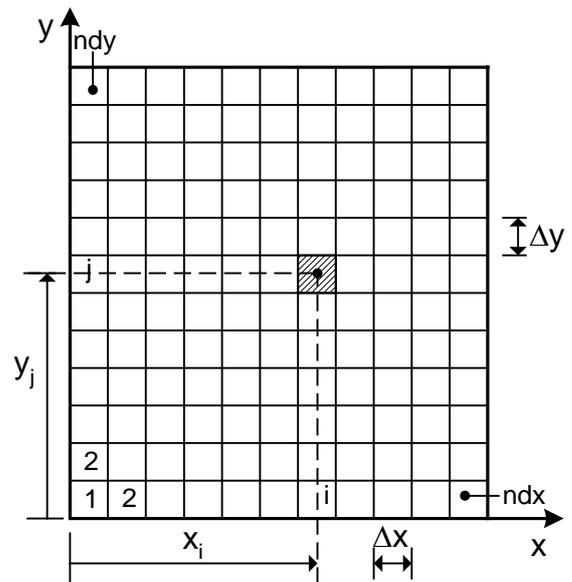


Fig. 4 – Discretização da laje em retângulos

A discretização é tal que

$$\Delta x = \frac{l_x}{ndx} ; \Delta y = \frac{l_y}{ndy} \quad (24)$$

onde ndx e ndy são o número de divisões da laje segundo as direções x e y , respectivamente.

Desse modo, um ponto genérico da malha tem coordenadas

$$x = \frac{\Delta x}{2} + (i-1)\Delta x ; i = 1, \dots, ndx \quad (25)$$

$$y = \frac{\Delta y}{2} + (j-1)\Delta y ; j = 1, \dots, ndy \quad (26)$$

Finalmente, pode-se escrever a equação (9) na forma

$$D_e = \frac{\sum_{i=1}^{ndx} \sum_{j=1}^{ndy} D(x, y) \psi(x, y)}{\sum_{i=1}^{ndx} \sum_{j=1}^{ndy} \psi(x, y)} \quad (27)$$

A validação do método numérico é apresentada na seção seguinte.

4. VALIDAÇÃO DO MÉTODO NUMÉRICO

Estudos numéricos realizados com o procedimento descrito anteriormente indicaram que basta empregar 5 termos em cada uma das séries de Fourier [equações (14), (15) e (16)]. Quanto à discretização da laje, basta adotar $\Delta x = b_x$ e $\Delta y = b_y$.

Entretanto, para que a homogeneização seja satisfatória, é necessário considerar um número mínimo de nervuras. Este fato é mostrado no seguinte exemplo:

- largura das nervuras: $b_x = b_y = 5$ cm
- distância entre eixos: $S_x = S_y = 55$ cm
- espessura da mesa: $h_f = 5$ cm
- espessura total da laje: $h = 25$ cm

O número de nervuras é o mesmo nas duas direções, ou seja, $n_x = n_y$. Logo, a laje será quadrada, com os vãos $l_x = l_y$ obtidos através da equação (21), em função do número de nervuras de cada direção.

Na fig. 5, apresenta-se a variação da inércia equivalente I_e [equação (10)] em função do número de nervuras.

Como se observa, a inércia equivalente (igual à rigidez equivalente D_e para E_{cs} unitário) depende muito do número de nervuras. Aumentando o número de nervuras, ocorre uma redução da rigidez equivalente. Entretanto, ao passar de 10 para 40 nervuras em cada direção, a inércia equivalente sofre uma redução de apenas 5%. Desse modo, pode-se considerar que um número mínimo de 10 nervuras em cada direção seja suficiente para uma avaliação precisa da rigidez equivalente.

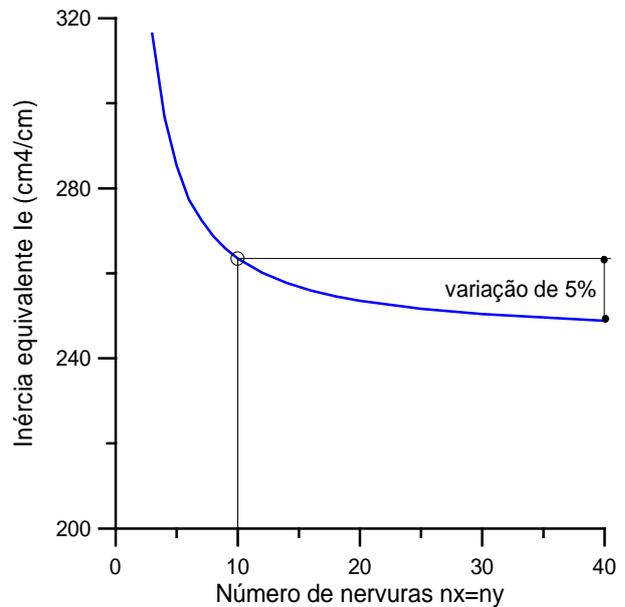


Fig. 5 – Variação da inércia equivalente com o número de nervuras

Para mostrar a validade do procedimento numérico, são analisadas seis lajes nervuradas que foram ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil[11]. A determinação da espessura equivalente, com base nos resultados experimentais, é feita com o emprego da equação (1). O valor teórico da espessura equivalente é obtido com a equação (12).

Na tabela 1 apresentam-se os valores da espessura equivalente h_e , determinados com base nos resultados experimentais, e as espessuras equivalentes teóricas $h_{e,cal}$, obtidas com a igualdade da energia de deformação

Tabela 1 – Espessuras equivalentes experimental (h_e) e teórica ($h_{e,cal}$)

Laje	h_e (cm)	$h_{e,cal}$ (cm)	$h_{e,cal}/h_e$
S1	9,47	8,22	0,87
S2	7,23	7,67	1,06
S3	7,24	7,15	0,99
S4	6,31	6,82	1,08
S5	10,38	10,55	1,02
S6	5,27	5,27	1,00
		Média	1,003

Conforme se observa na tabela 1, há uma excelente concordância entre a espessura equivalente calculada através da equação (12) e o valor determinado experimentalmente. Esses resultados servem para validar a formulação

descrita anteriormente e indica que as lajes nervuradas podem ser analisadas como lajes maciças com uma espessura equivalente.

5. MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA DETERMINAÇÃO DA ESPESSURA EQUIVALENTE

O método descrito anteriormente, apesar de sua consistência teórica, tem o inconveniente da necessidade de realização de integração numérica para o cálculo da rigidez equivalente.

Para evitar esse inconveniente, pode-se empregar um dos dois métodos simplificados apresentados a seguir.

A) Primeiro método simplificado

Se a laje estiver submetida a um estado de curvatura constante, a função $\psi(x, y)$ é constante, como se verifica na equação (7). Então, a equação (9) toma a forma

$$D_e = \frac{\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} D(x, y) dx dy}{l_x l_y} \quad (28)$$

Neste caso, a rigidez equivalente é igual à rigidez média da laje.

Resolvendo a equação (28), chega-se a

$$D_e = (1 - \zeta)D_1 + \zeta D_2 \quad (29)$$

onde

$$\zeta = \frac{(S_x - b_x)(S_y - b_y)}{S_x S_y} \quad (30)$$

Considerando a equação (18), obtém-se a espessura equivalente

$$h_{e,cal} = \left[(1 - \zeta)h^3 + \zeta h_f^3 \right]^{1/3} \quad (31)$$

B) Segundo método simplificado

No procedimento usual de projeto [12], a laje nervurada é calculada como se fosse uma laje maciça com espessura equivalente $h_{e,cal}$ dada por

$$h_{e,cal} = \left(\frac{12I}{S} \right)^{1/3} \quad (32)$$

onde I é o momento de inércia em relação ao centróide da seção T indicada na fig. 6.

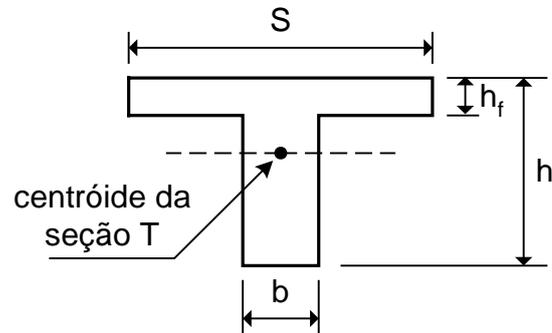


Fig. 6 – Seção T empregada no cálculo usual

O cálculo é feito conforme apresentado na referência [12].

Substituindo $h_{e,cal}$ na equação (11), obtém-se a rigidez equivalente D_e .

6. RESULTADOS

A seguir apresentam-se os resultados onde são comparados os valores da inércia equivalente I_e determinada com os três métodos descritos. A seguinte convenção é adotada para identificar cada método:

- Equivalência da energia: método numérico. Inércia equivalente I_{e1} obtida a partir da equação (9), por integração numérica.
- Rigidez média: primeiro método aproximado. Inércia equivalente I_{e2} obtida a partir da equação (29).
- Cálculo usual: segundo método simplificado. Inércia equivalente I_{e3} obtida a partir da equação (32).

Em todos os casos, considera-se $b_x = b_y$ e $S_x = S_y$, ou seja, a laje é quadrada e com nervuras idênticas nas duas direções.

Na fig. 7, apresenta-se a variação da inércia equivalente, obtida com os três métodos, em função da espessura da mesa. Para a elaboração dessa figura, foram fixadas as seguintes dimensões da laje nervurada: $b = 5$ cm; $l_o = 50$ cm

($\Rightarrow S = 55$ cm); $h = 25$ cm. A espessura da mesa foi incrementada a partir do valor $h_f = 1$ cm. Quando $h_f = 25$ cm, a laje nervurada se transforma em uma laje maciça.

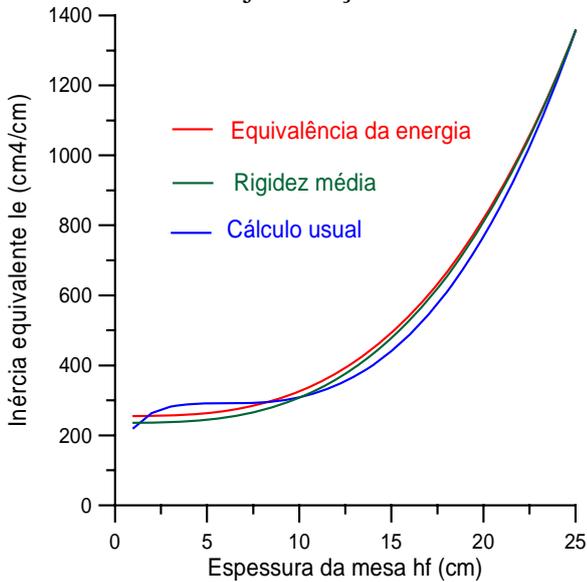


Fig. 7 – Inércias equivalentes em função da espessura da mesa h_f

Conforme se observa, os três métodos fornecem valores muito próximos para a rigidez equivalente. A rigidez média se aproxima bastante da rigidez obtida através da equivalência da energia de deformação.

Na fig. 8, apresentam-se as relações entre as inércias equivalentes, considerando os mesmos dados anteriores, ou seja: $b = 5$ cm; $l_o = 50$ cm ($\Rightarrow S = 55$ cm); $h = 25$ cm.

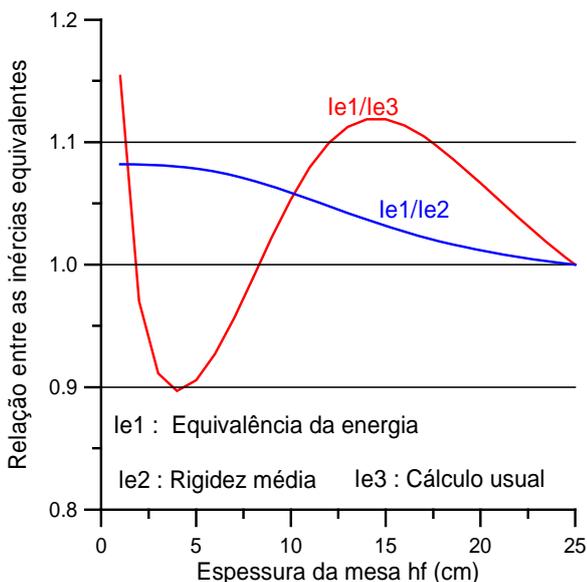


Fig. 8 – Relações entre as inércias equivalentes (variação de h_f)

Conforme se observa, o cálculo usual pode fornecer uma inércia equivalente, I_{e3} , maior que aquela obtida através da igualdade da energia de deformação (relação $I_{e1}/I_{e3} < 1$). Neste caso, o cálculo usual fica contrário à segurança (pois a flecha calculada por esse método será menor que a flecha real da laje), apesar de o erro máximo ser da ordem de 10%.

Por outro lado, a relação I_{e1}/I_{e2} é sempre maior que 1, o que indica que o cálculo com a inércia média, I_{e2} , fica a favor da segurança (a flecha calculada por esse método será maior que a flecha real da laje). Além disso, o erro máximo é da ordem de 8%.

Na fig. 9, apresentam-se as variações das inércias equivalentes com a distância S entre os eixos das nervuras. Nessa figura, foram fixadas as dimensões: $b = 5$ cm; $h_f = 5$ cm; $h = 25$ cm.

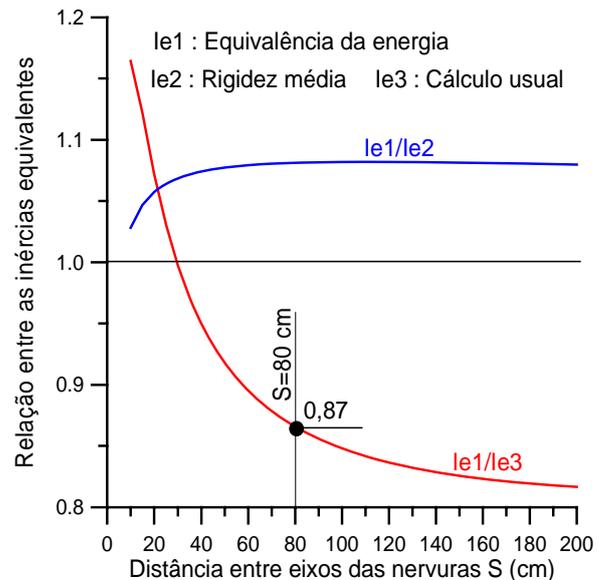


Fig. 9 – Relações entre as inércias equivalentes (variação de S)

Conforme se observa na fig. 9, a relação I_{e1}/I_{e2} é sempre maior que 1, o que indica que o cálculo efetuado com a rigidez média I_{e2} fica a favor da segurança.

Para essa espessura da mesa, $h_f = 5$ cm, a distância máxima entre eixos de nervuras permitida pela NBR-6118[2] é $S = 80$ cm. Observa-se que, para esse valor do espaçamento entre eixos de nervuras, o cálculo usual fornece uma rigidez 15% maior que a rigidez equivalente correta ($I_{e3}/I_{e1} = 1/0,87 = 1,15$). Desse modo, as

flechas da laje serão subestimadas em 15%, ao se empregar o cálculo usual. O erro cresce com o aumento do espaçamento entre as nervuras.

As mesmas conclusões são obtidas ao se analisar a fig. 10, onde são considerados dois valores para a espessura da mesa.

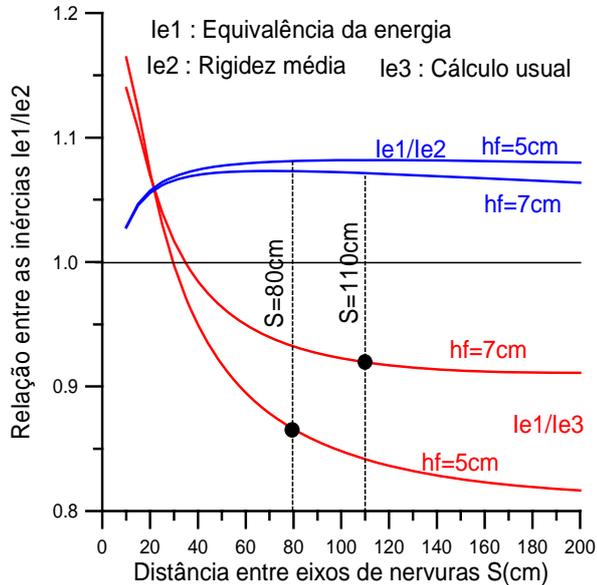


Fig. 10 – Relações entre as inércias equivalentes (variação de S e dois valores de h_f)

Na fig. 11, apresentam-se as relações I_{e1}/I_{e2} e I_{e1}/I_{e3} em função da espessura total da laje h . Nessa figura são fixadas as seguintes dimensões: $b = 5\text{ cm}$; $l_o = 50\text{ cm}$ ($\Rightarrow S = 55\text{ cm}$); $h_f = 5\text{ cm}$.

Observa-se que os resultados obtidos no cálculo usual são bastante influenciados pela espessura da laje e podem ficar contrários à segurança. Novamente, o método simplificado mais indicado é o método da rigidez média.

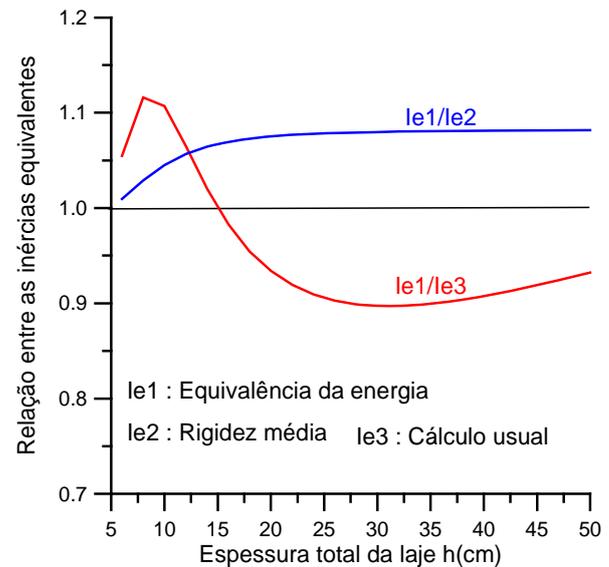


Fig. 11 – Relações entre as inércias equivalentes (variação de h)

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados três métodos para determinação da rigidez equivalente das lajes nervuradas de concreto armado. Essa rigidez é obtida no estágio I e serve para o cálculo da espessura da laje maciça equivalente. A não-linearidade física, decorrente da fissuração do concreto, deve ser incluída na análise da laje maciça equivalente.

Um método consistente, baseado na equivalência da energia de deformação, foi tomado como referência para a aferição de dois métodos simplificados. A precisão do método foi comprovada por comparação com resultados experimentais disponíveis.

Desse estudo concluiu-se que a rigidez média é aquela que mais se aproxima da rigidez equivalente das lajes nervuradas.

REFERÊNCIAS

1. Araújo, J. M. – *Considerações sobre a rigidez à torção das lajes nervuradas de concreto armado*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.7, p.1-8, Setembro, 2005.
2. Associação Brasileira de Normas Técnicas – *Projeto de Estruturas de Concreto. NBR-6118*. Rio de Janeiro, 2003.
3. European Committee for Standardization - *Eurocode 2: Design of Concrete Structures. Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Final draft, Dec. 2003, 223 p.

4. American Concrete Institute. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95)*. Detroit, 1995.
5. Araújo, J.M. – *Curso de Concreto Armado*, v.2, 2^a. ed., Editora Dunas, Rio Grande, 2003.
6. Van Rens, B.J.E., Brekelmans, W.A.M., Baaijens, F.P.T. – *Homogenization of the elastoplastic behavior of perforated plates*. Computers and Structures, v.69, p.537-545, 1998.
7. Yang, QS., Becker, W. - *Effective stiffness and microscopic deformation of an orthotropic plate containing arbitrary holes*. Computers and Structures, v.82, p.2301-2307, 2004.
8. Lewinski, T. – *Effective stiffnesses of transversely non-homogeneous plates with unidirectional periodic structure*. Int. J. Solids Structures, v.32, n.22, p.3261-3287, 1995.
9. Takabatake, H., Imaizumi, T., Okatomi, K. – *Simplified analysis of rectangular plates with stepped thickness*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.121, n.1, p.28-38, 1995.
10. Szilard, R. - *Theory and Analysis of Plates: classical and numerical methods*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1974.
11. Abdul-Wahab, H. M. S., Khalil, M. H. - *Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs*. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, n. 2, p.219-227, 2000.
12. Araújo, J.M. – *Curso de Concreto Armado*, v.4, 2^a. ed., Editora Dunas, Rio Grande, 2003.