

Modelo bilinear para análise de lajes de concreto armado

Bilinear model for reinforced concrete slabs analysis

José Milton de Araújo

Departamento de Materiais e Construção – FURG – Rio Grande, RS

e-mail: ed.dunas@mikrus.com.br

RESUMO: Neste trabalho apresenta-se um método bilinear para análise de lajes maciças e de lajes nervuradas de concreto armado. O modelo permite obter as deformações das lajes no estágio I e no estágio II. Para as lajes nervuradas, emprega-se o conceito de espessura equivalente. A comparação com resultados experimentais demonstra a eficiência do modelo proposto.

ABSTRACT: A bilinear method for analysis of solid and waffle reinforced concrete slabs is presented in this work. The model allows to obtain the deflections in both cracked and noncracked stages. The concept of equivalent thickness is used for waffle slabs. The comparison with experimental results demonstrates the efficiency of the proposed model.

1. INTRODUÇÃO

Em trabalhos anteriores [1,2], foram discutidos alguns métodos para determinação da espessura equivalente das lajes nervuradas de concreto armado. Uma vez determinada a espessura equivalente, as lajes nervuradas podem ser calculadas como se elas fossem maciças.

Também foi salientado que a espessura equivalente deve ser determinada no estágio I, para evitar os erros de modelagem do comportamento não-linear após a fissuração do concreto. Aliás, esse comportamento não-linear tem levado a interpretações erradas quanto à rigidez à torção das lajes nervuradas, como foi salientado em [1].

Tem sido mostrado em trabalhos de pesquisa que as lajes maciças de concreto armado se comportam no estágio I para toda a faixa do carregamento de serviço [3]. Em alguns casos de grandes vãos e/ou cargas de serviço elevadas, surgem algumas fissuras nas regiões mais solicitadas das lajes maciças. Entretanto, mesmo nesses casos, é possível admitir um comportamento elástico linear, com razoável precisão.

Por outro lado, deve-se esperar que as lajes nervuradas sofram um moderado processo de fissuração, ainda para as cargas de serviço. Dessa

forma, o modelo elástico linear não será suficiente para a análise dessas lajes.

O objetivo deste trabalho é complementar as informações contidas em [1,2], introduzindo os efeitos da fissuração do concreto na análise das lajes nervuradas de concreto armado. Como foi mostrado que essas lajes podem ser analisadas como lajes maciças de espessura equivalente, emprega-se um modelo único para as lajes maciças e para as lajes nervuradas.

O modelo bilinear apresentado a seguir permite analisar o comportamento das lajes de concreto armado até a ocorrência do primeiro escoamento da armadura, no ponto mais solicitado da laje. Após esse estágio, inicia-se o processo de propagação das linhas de ruptura, o que não é considerado no modelo.

2. MODELO BILINEAR PARA LAJES DE CONCRETO ARMADO

As lajes de concreto armado, assim como as vigas, sofrem uma redução da rigidez na passagem do estado não fissurado (estádio I) para o estado fissurado (estádio II). Quando a taxa de armadura é pequena, a diminuição no valor da rigidez pode ser tão grande que a laje entra em ruptura logo após a fissuração. Por isso, as normas de projeto exigem

uma armadura mínima para as peças fletidas de concreto armado.

Para calcular corretamente as flechas das lajes no estágio II, é necessário levar em conta a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. Isto pode ser feito de diversas maneiras, como apresentado na referência [4].

A forma mais simples de se modelar o comportamento descrito, consiste em fazer uma interpolação linear dos resultados obtidos no estágio I e no estágio II. Assim, a relação carga-flecha da laje pode ser representada pelo modelo bilinear indicado na fig. 1.

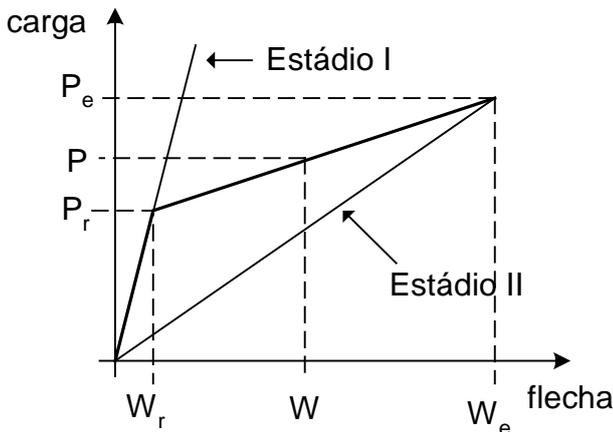


Fig. 1 – Modelo bilinear para cálculo de flechas em lajes de concreto armado

A rigidez da laje no estágio I é dada por

$$D_1 = \frac{E_{cs} h_e^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1)$$

onde E_{cs} é o módulo de deformação longitudinal secante e ν é o coeficiente de Poisson do concreto.

Para as lajes maciças, h_e representa a espessura real da laje. Para as lajes nervuradas, h_e é a espessura equivalente, conforme definido em [2].

Na fig. 2, representa-se uma seção transversal típica de uma laje nervurada.

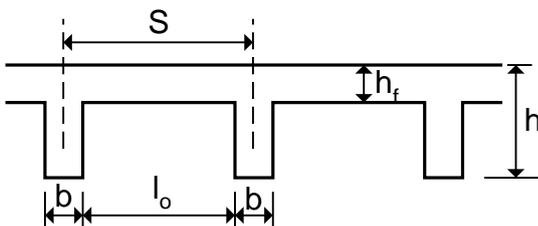


Fig. 2 – Seção transversal de laje nervurada

Empregando o processo simplificado sugerido na referência [2], obtém-se a espessura equivalente da laje nervurada

$$h_e = \left[(1 - \zeta) h^3 + \zeta h_f^3 \right]^{1/3} \quad (2)$$

onde h é a espessura total da laje e h_f é a espessura da mesa.

O coeficiente ζ é dado por

$$\zeta = \frac{(S_x - b_x)(S_y - b_y)}{S_x S_y} \quad (3)$$

onde b_x , b_y são as larguras das nervuras e S_x , S_y são as distâncias entre os eixos das nervuras segundo as direções x e y , respectivamente.

O momento de fissuração M_r é obtido por meio da expressão

$$M_r = \frac{h_e^2}{6} f_{ct} \quad (4)$$

onde f_{ct} é a resistência à tração do concreto.

A carga de fissuração P_r é aquela que provoca um momento fletor máximo na laje, M_{max} , igual ao momento de fissuração M_r . Esse momento máximo é determinado através de uma análise elástica linear, empregando-se a teoria de placas e considerando a rigidez no estágio I dada na equação (1). Para as lajes retangulares simplesmente apoiadas, M_{max} ocorre no centro, onde se admite iniciar o processo de fissuração.

Assim, se a carga P é menor ou igual à carga de fissuração P_r , obtém-se a flecha W considerando a rigidez D_1 dada na equação (1).

Se $P > P_r$, é necessário fazer uma interpolação linear, como indicado na fig.1.

A rigidez da laje no estágio II puro é determinada para as seções transversais indicadas na fig. 3.

As taxas de armadura nas duas direções são

$$\rho_x = \frac{A_{sx}}{d} ; \rho_y = \frac{A_{sy}}{d} \quad (5)$$

onde A_{sx} e A_{sy} são as áreas de aço por unidade de comprimento, segundo as direções x e y , respectivamente, e d é a altura útil média.

Para a altura útil d , considera-se o valor real, ou seja, a distância do centróide das armaduras tracionadas até a face superior comprimida da laje. Assim, no caso das lajes nervuradas, deve resultar $d > h_e$, pois a espessura equivalente é menor que a espessura real da laje.

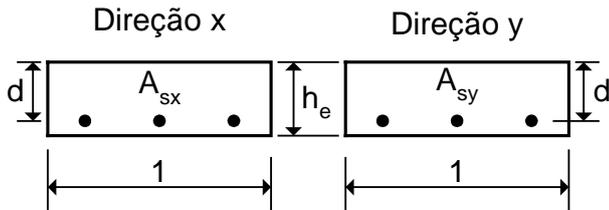


Fig. 3 – Seções da laje nas direções x e y

A profundidade da linha neutra no estágio II, segundo as duas direções, é dada por

$$\xi_x = -n\rho_x + \sqrt{(n\rho_x)^2 + 2n\rho_x} \quad (6)$$

$$\xi_y = -n\rho_y + \sqrt{(n\rho_y)^2 + 2n\rho_y} \quad (7)$$

onde $n = E_s/E_{cs}$ é a relação entre o módulo de elasticidade do aço, E_s , e o módulo secante do concreto, E_{cs} .

Nas lajes nervuradas, deve-se ter $\xi_x \leq h_f/d$ e $\xi_y \leq h_f/d$ para garantir que apenas a mesa contribui para a rigidez no estágio II.

A rigidez no estágio II nas direções x e y é dada por

$$D_{2x} = E_{cs} \left[\frac{\xi_x^2(3-\xi_x)}{6(1-\nu^2)} \right] d^3 \quad (8)$$

$$D_{2y} = E_{cs} \left[\frac{\xi_y^2(3-\xi_y)}{6(1-\nu^2)} \right] d^3 \quad (9)$$

como apresentado na referência [4].

Conforme se observa, se as armaduras forem diferentes nas duas direções, a laje será ortotrópica. Para simplificar a análise, considera-se

a laje isotrópica com a rigidez equivalente D_2 dada por

$$D_2 = \sqrt{D_{2x}D_{2y}} \quad (10)$$

Os momentos de escoamento das armaduras, segundo as duas direções, são dados por

$$M_{ex} = \frac{\xi_x^2(3-\xi_x)}{6n(1-\xi_x)} d^2 f_y \quad (11)$$

$$M_{ey} = \frac{\xi_y^2(3-\xi_y)}{6n(1-\xi_y)} d^2 f_y \quad (12)$$

onde f_y é a tensão de escoamento do aço.

Através de uma análise elástica linear, obtém-se os momentos fletores positivos máximos M_x e M_y , segundo as direções x e y , respectivamente. Esses momentos são obtidos para uma carga de referência.

Como a análise é linear, os momentos fletores são proporcionais à carga. Então, pode-se determinar a carga P_{ex} , tal que $M_x = M_{ex}$. Analogamente, determina-se a carga P_{ey} , tal que $M_y = M_{ey}$. A carga de escoamento P_e é o menor dos dois valores de carga obtidos.

Considerando a carga de escoamento P_e e a rigidez no estágio II dada na equação (10), obtém-se a flecha W_e , através de uma análise linear. Desse modo, ficam definidos todos os valores de carga e flecha indicados na fig. 1.

Finalmente, a flecha W , correspondente à carga $P > P_r$, é dada por

$$W = W_r + \frac{P - P_r}{K_t} \quad (13)$$

onde

$$K_t = \frac{P_e - P_r}{W_e - W_r} \quad (14)$$

3. ANÁLISE DE LAJES NERVURADAS

As lajes nervuradas ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil[5] são utilizadas para a verificação do modelo de laje maciça equivalente, associado

ao modelo bilinear descrito anteriormente. Esses autores ensaiaram 6 lajes nervuradas armadas em cruz.

Todas as lajes são quadradas e simplesmente apoiadas no contorno. As lajes foram submetidas a uma carga concentrada P aplicada no centro. A carga foi distribuída em uma área de 15 x 15 cm, por meio de uma placa de aço colocada sob a carga, como indicado na fig. 4.

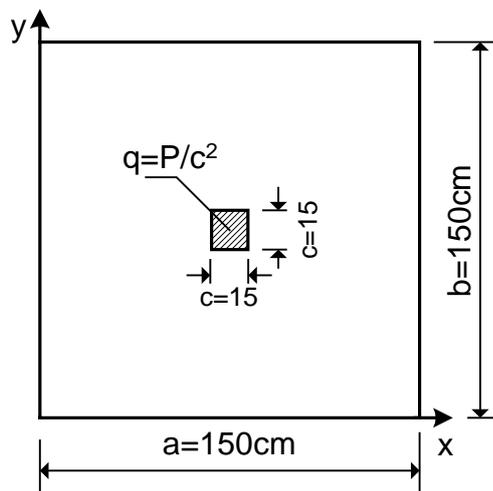


Fig. 4 – Carregamento das lajes nervuradas

Na tabela 1, apresentam-se as dimensões das lajes nervuradas.

Tabela 1 – Dimensões das lajes nervuradas (cm)

Laje	h_f	h	b	l_o	S
S1	2,0	9,5	5,2	8,4	13,6
S2	2,0	9,5	5,2	11,5	16,7
S3	2,0	9,5	5,2	16,2	21,4
S4	2,0	9,5	5,2	24,8	30,0
S5	2,0	12,5	5,7	11,0	16,7
S6	2,0	6,5	4,7	12,0	16,7

Na utilização do modelo bilinear, emprega-se o módulo secante do concreto E_{cs} , o qual é estimado por meio da relação

$$E_{cs} = 0,85 \times 21500 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3}, \text{ MPa} \quad (15)$$

conforme sugerido pelo CEB/90[6].

A resistência à tração do concreto é estimada como

$$f_{ct} = 1,40 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{2/3}, \text{ MPa} \quad (16)$$

Nas equações (15) e (16), f_{cm} representa a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias de idade. Os valores de f_{cm} foram determinados para cada uma das lajes ensaiadas.

Para o coeficiente de Poisson do concreto, adota-se $\nu = 0,2$.

A tensão de escoamento das armaduras empregadas nos ensaios é $f_y = 398\text{MPa}$. Para o módulo de elasticidade do aço, adota-se $E_s = 200\text{GPa}$.

Na tabela 2, apresentam-se as propriedades do concreto utilizadas na análise.

Tabela 2 – Propriedades do concreto

Laje	f_{cm} (MPa)	E_{cs} (MPa)	f_{ct} (MPa)
S1	31,3	26732	3,00
S2	32,0	26930	3,04
S3	31,4	26760	3,00
S4	28,9	26030	2,84
S5	29,9	26327	2,91
S6	29,1	26090	2,85

Na tabela 3, apresentam-se as áreas de aço $A_s = A_{sx} = A_{sy}$, por unidade de comprimento, a altura útil d e a espessura equivalente das lajes nervuradas h_e , obtida com o emprego da equação (2). Conforme se observa, a altura útil é maior que a espessura equivalente.

Tabela 3 – Armaduras e espessura equivalente

Laje	h_e (cm)	d (cm)	A_s (cm ² /m)
S1	8,11	8,30	3,70
S2	7,69	8,30	3,01
S3	7,18	8,30	2,35
S4	6,52	8,30	1,68
S5	10,35	11,30	3,01
S6	5,15	5,30	3,01

Nos ensaios, as lajes foram submetidas a uma carga P , aplicada no centro sobre uma placa de aço de 15 x 15 cm, conforme indicado na fig. 4. Para a análise numérica, pode-se admitir que a carga se distribui ao longo da espessura da laje conforme indicado na fig. 5. Essa distribuição é a

mesma empregada na verificação da resistência à punção das lajes, conforme os critérios do CEB/90 [6] e da NBR-6118 [7].

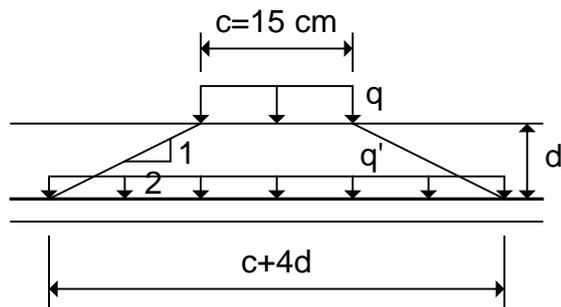


Fig. 5 – Distribuição da carga aplicada em uma área reduzida

De acordo com a fig. 5, pode-se fazer a análise considerando as seguintes hipóteses de carga:

A) Sem levar em conta a distribuição da carga ao longo da espessura da laje

Considera-se a carga distribuída na área $c^2 = 15^2 \text{ cm}^2$. O valor da carga uniforme nesta área é $q = P/c^2$.

B) Considerando a distribuição da carga ao longo da espessura da laje

Considera-se a carga distribuída na área $(c + 4d)^2$, onde d é a altura útil da laje. A carga uniforme nesta área vale $q' = P/(c + 4d)^2$.

Enquanto a laje estiver no estágio I, os dois procedimentos fornecem valores próximos para a flecha no centro da laje. Entretanto, após a fissuração as diferenças são muito grandes.

Isto ocorre porque a carga de fissuração P_r e a carga de escoamento P_e , usadas na definição do modelo bilinear, são muito influenciadas pelo tamanho da região carregada. À medida que essa área é reduzida, os momentos fletores obtidos pela teoria de placas crescem muito. No limite, quando a área carregada tende a zero, os momentos fletores tendem a infinito.

Uma vez que os momentos máximos são utilizados para o cálculo das cargas P_r e P_e , verifica-se que a solução varia bastante com o tamanho da área carregada. Para mostrar essa influência, consideram-se essas duas hipóteses de carga.

As relações carga – flecha no centro da laje são apresentadas nas figuras 6 a 11.

Conforme se observa por essas figuras, os resultados experimentais evidenciam que a carga aplicada na face superior da laje se distribui com uma inclinação 1:2 ao longo da espessura. A carga de fissuração P_r e a carga P_e , correspondente ao início do escoamento da armadura, podem ser obtidas para a carga distribuída $q' = P/(c + 4d)^2$. Se essa distribuição não for feita, haverá uma subavaliação da rigidez da laje no estágio II.

Finalmente, verifica-se que o modelo bilinear é adequado para representar o comportamento das lajes nervuradas até o início do escoamento das armaduras. Após essa carga de escoamento, ocorre a propagação das linhas de ruptura até o colapso final da laje. A carga de ruptura é sensivelmente maior que a carga P_e .

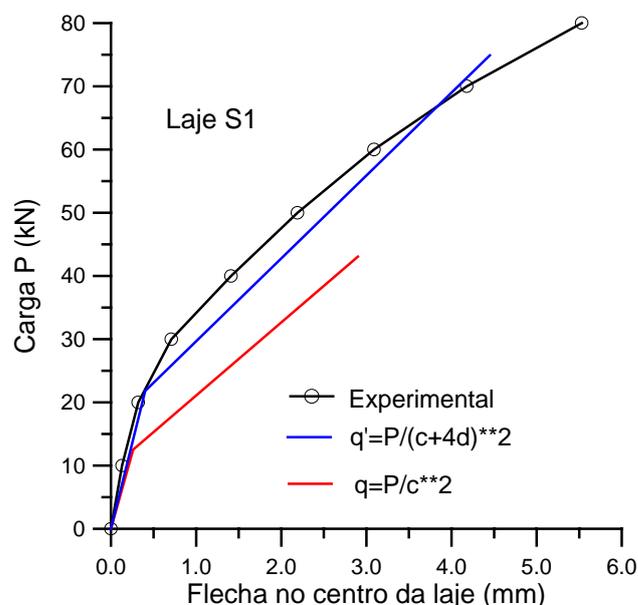


Fig. 6 – Resposta para a laje nervurada S1

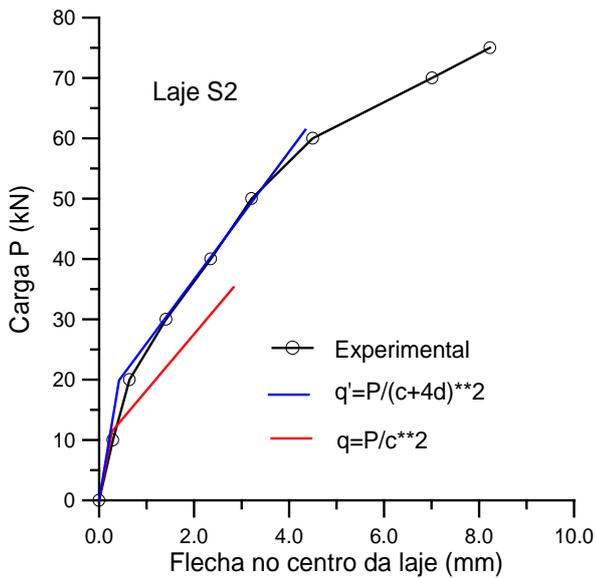


Fig. 7 – Resposta para a laje nervurada S2

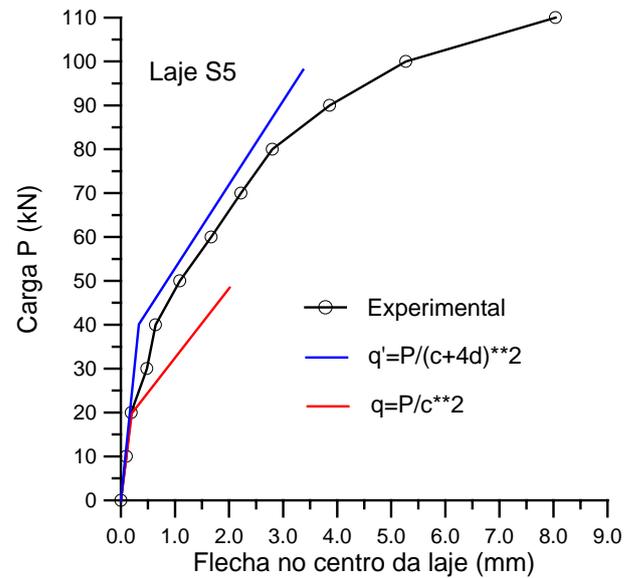


Fig. 10 – Resposta para a laje nervurada S5

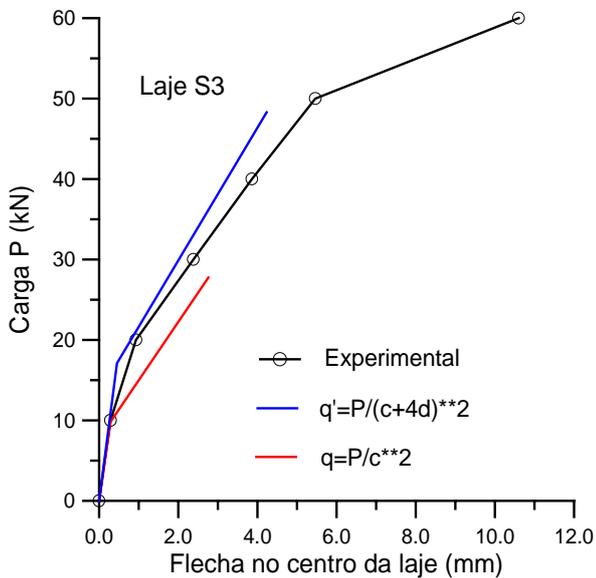


Fig. 8 – Resposta para a laje nervurada S3

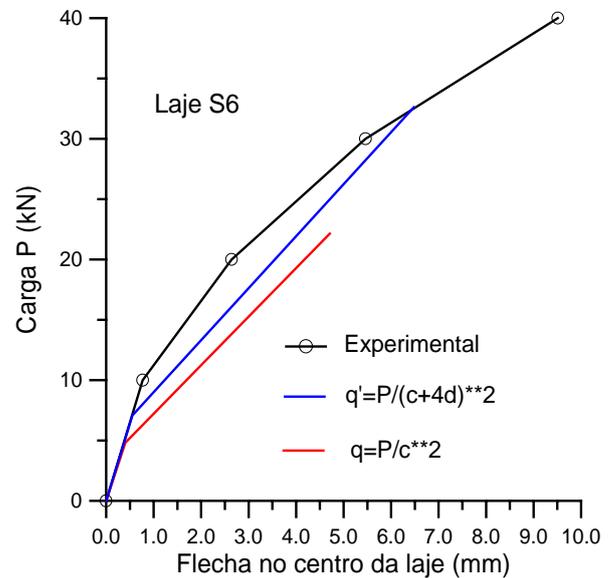


Fig. 11 – Resposta para a laje nervurada S6

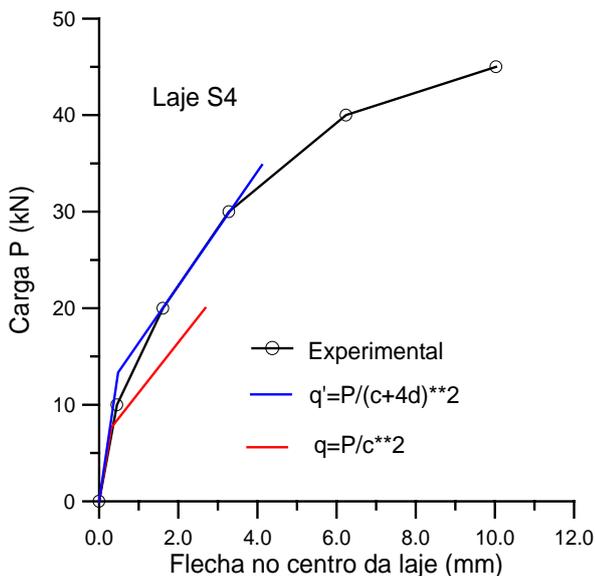


Fig. 9 – Resposta para a laje nervurada S4

4. ANÁLISE DE LAJES MACIÇAS

Duas lajes maciças, com o carregamento e os vãos indicados na fig. 4, também foram ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil[5]. As propriedades do concreto, dimensões e armaduras dessas lajes são fornecidas na tabela 4.

Nas figuras 12 e 13 são apresentadas as relações carga – flecha no centro das lajes maciças.

Conforme se observa, o modelo acompanha os resultados experimentais até a carga de fissuração teórica. Entretanto, a carga teórica P_r é menor que a carga de fissuração verificada nos ensaios, mesmo quando se considera a carga distribuída $q' = P/(c+4d)^2$. Isto indica que esse procedimento de distribuição da carga aplicada em

uma área reduzida fica a favor da segurança. A carga de ruptura e a rigidez das lajes, verificadas experimentalmente, são superiores às aquelas determinadas com o modelo teórico.

Tabela 4 – Lajes maciças de Abdul-Wahab e Khalil

Laje	f_{cm} (MPa)	E_{cs} (MPa)	f_{ct} (MPa)
S7	36,0	28008	3,29
S8	28,5	25910	2,81
Laje	h_e (cm)	d (cm)	A_s (cm ² /m)
S7	7,50	6,30	3,01
S8	9,50	8,30	3,01

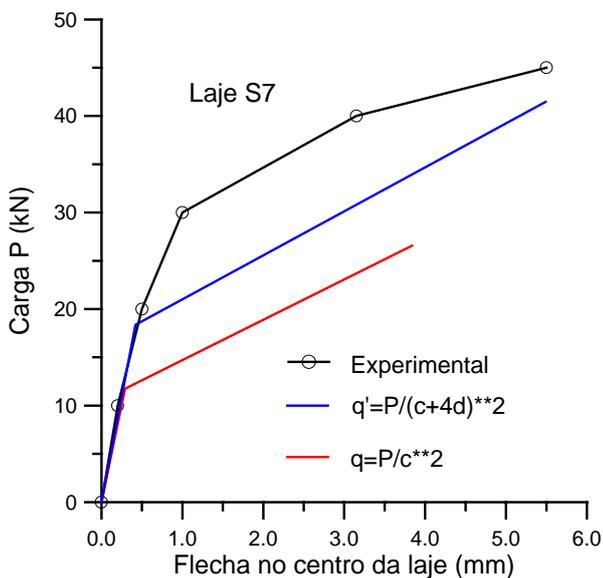


Fig. 12 – Resposta para a laje maciça S7 de Abdul-Wahab e Khalil

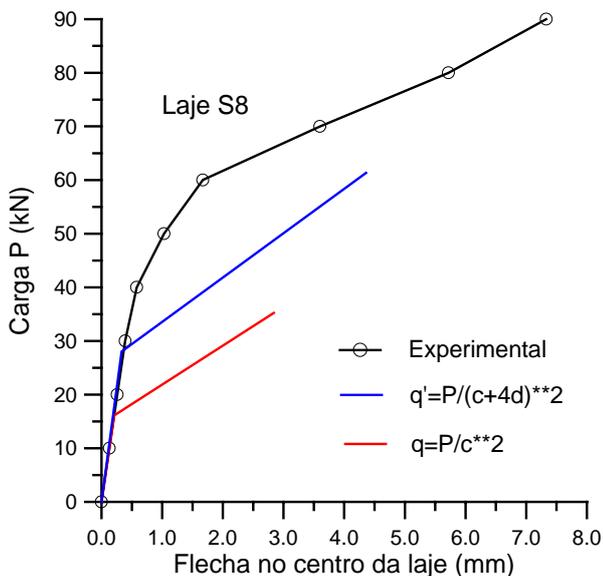


Fig. 13 – Resposta para a laje maciça S8 de Abdul-Wahab e Khalil

Três lajes maciças ensaiadas por Taylor et al [8] também são analisadas com o modelo bilinear. Neste caso, as lajes são quadradas e possuem vãos $a = b = 183$ cm. As lajes são simplesmente apoiadas no contorno e submetidas a uma carga uniformemente distribuída em toda a sua superfície.

Na tabela 5 apresentam-se as propriedades do concreto das três lajes.

Tabela 5 – Propriedades do concreto das lajes de Taylor et al

Laje	f_{cm} (MPa)	E_{cs} (MPa)	f_{ct} (MPa)
S1	35,0	27747	3,23
S7	38,2	28568	3,42
S9	33,2	27263	3,12

A tensão de escoamento das armaduras empregadas nos ensaios é $f_y = 376$ MPa. As lajes são armadas com armaduras diferentes nas duas direções, conforme se indica na tabela 6.

Tabela 6 – Armaduras das lajes de Taylor et al

Laje	h_e (cm)	d (cm)	A_{sx} (cm ² /m)	A_{sy} (cm ² /m)
S1	5,10	4,15	2,34	2,80
S7	4,40	3,45	2,80	3,18
S9	7,60	6,65	1,46	1,56

Nas figuras 14 a 16 são apresentadas as relações carga total – flecha no centro das lajes. Observa-se que o modelo bilinear acompanha bem os resultados experimentais até a carga de escoamento P_e . Para as lajes S1 e S7, a carga de ruptura é bem maior que P_e .

A laje S9 tem uma ruptura brusca, após a fissuração, pois a taxa de armadura é muito baixa. Entretanto, a carga de ruptura é maior que P_e , mesmo neste caso.

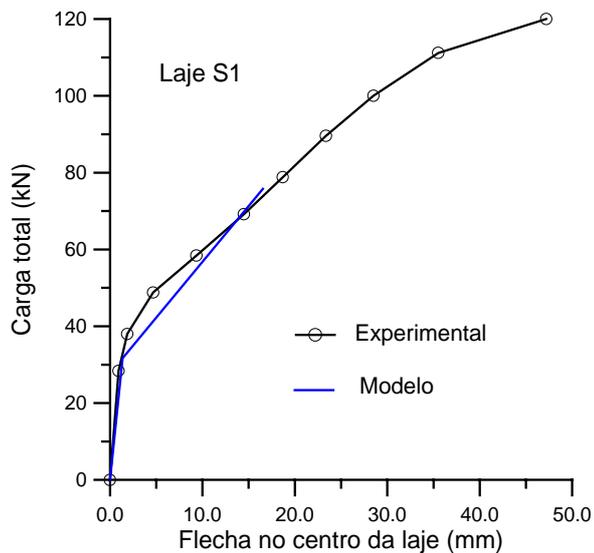


Fig. 14 - Resposta para a laje maciça S1 de Taylor et al

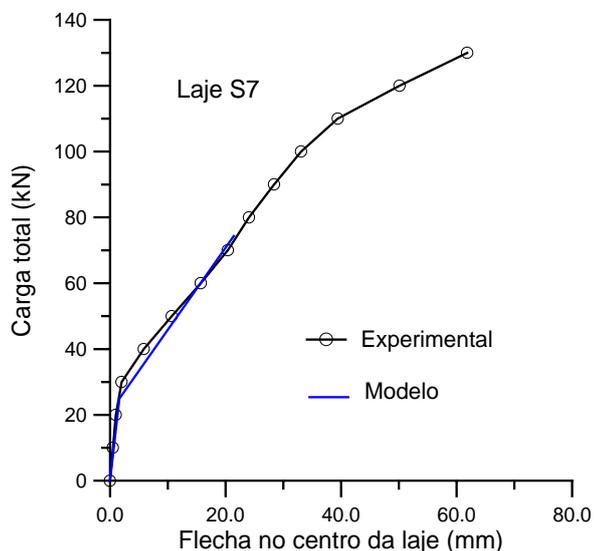


Fig. 15- Resposta para a laje maciça S7 de Taylor et al

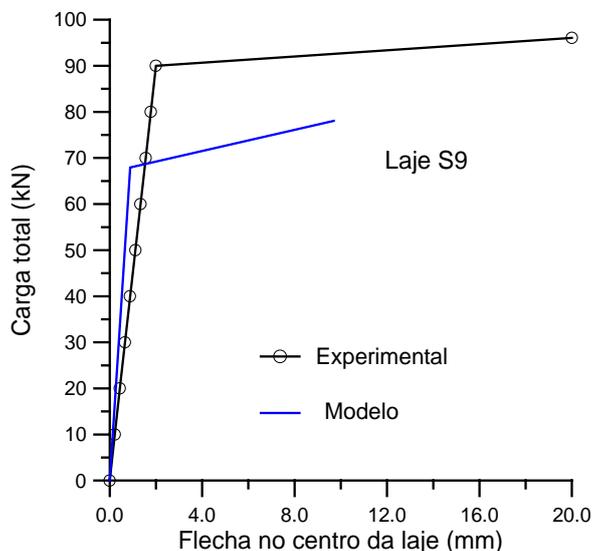


Fig. 16 - Resposta para a laje maciça S9 de Taylor et al

5. CONCLUSÕES

Em função dos resultados apresentados neste trabalho, podem ser tiradas as seguintes conclusões:

- O modelo bilinear é satisfatório para a avaliação das deformações das lajes maciças e das lajes nervuradas de concreto armado. Essas últimas podem ser analisadas como laje maciça com uma espessura equivalente. Isto demonstra que as lajes nervuradas possuem boa rigidez à torção e que elas podem ser analisadas como laje maciça, conforme foi mostrado nos trabalhos anteriores [1,2].
- Uma carga aplicada em área reduzida pode ser distribuída segundo uma inclinação 1:2 até o nível das armaduras, para o cálculo das flechas e da capacidade de carga das lajes de concreto armado.
- O modelo bilinear representa bem os resultados experimentais no estágio I e no estágio II, até o início do escoamento das armaduras.
- A carga P_e , correspondente ao início do escoamento das armaduras, é bem inferior à carga de ruptura. As lajes de concreto armado possuem grande capacidade de redistribuição de esforços e apresentam uma boa reserva de segurança.

REFERÊNCIAS

1. Araújo, J. M. – *Considerações sobre a rigidez à torção das lajes nervuradas de concreto armado*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.7, p.1-8, Setembro, 2005.
2. Araújo, J. M. – *A rigidez equivalente das lajes nervuradas de concreto armado*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.8, p.1-9, Abril, 2006.
3. Araújo, J. M. – *Avaliação dos procedimentos de projeto das lajes nervuradas de concreto armado*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.3, p.15-25, junho, 2003.
4. Araújo, J.M. – *Curso de Concreto Armado*, v.2, 2ª. ed., Editora Dunas, Rio Grande, 2003.
5. Abdul-Wahab, H. M. S., Khalil, M. H. - *Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs*. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, n. 2, p.219-227, 2000.
6. Comité Euro-International du Béton – *CEB-FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.

7. Associação Brasileira de Normas Técnicas – *Projeto de Estruturas de Concreto. NBR-6118.* Rio de Janeiro, 2003.
8. Taylor, R.; Maher, D. R. H.; Hayes, B. – *Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs.* Magazine of Concrete Research, vol. 18, n. 55, p.85-94, 1966