

# **Avaliação dos procedimentos de projeto das lajes nervuradas de concreto armado**

## **Evaluation of design procedures to reinforced concrete ribbed slabs**

**José Milton de Araújo**

*Departamento de Materiais e Construção – FURG, Rio Grande, RS*

e-mail: [ed.dunas@mikrus.com.br](mailto:ed.dunas@mikrus.com.br)

**RESUMO:** Neste trabalho, apresenta-se um modelo não-linear para a análise de lajes nervuradas de concreto armado. O modelo considera a não-linearidade física do concreto em compressão, bem como a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. A formulação é baseada na teoria de placas de Mindlin, incluindo as deformações no plano médio da laje. A análise estrutural é realizada com o emprego do método dos elementos finitos, adotando-se um algoritmo iterativo para a solução do sistema de equações não-lineares. Para as integrações ao longo da espessura da laje, adota-se uma discretização em camadas. Através da definição de propriedades equivalentes, pode-se realizar a análise não-linear de lajes nervuradas de concreto armado. Finalmente, o modelo não-linear é empregado para verificar a pertinência dos usuais critérios de projeto de lajes nervuradas de concreto armado, estabelecidos nas normas de projeto.

**ABSTRACT:** In this work is presented a model to nonlinear analysis of reinforced concrete ribbed slabs. The model takes into account the material nonlinearity for concrete in compression, as well as the tension-stiffening effects. The formulation is based on the Mindlin's plate theory and includes membrane deformations. The finite element method and an iterative algorithm are used to nonlinear structural analysis. A layered procedure is employed to the integrations on the thickness of the slab. Defining effective properties is possible to analyze reinforced concrete ribbed slabs. Finally, the nonlinear model is used to verify the design procedures to reinforced concrete ribbed slabs as established in the design codes.

### **1. INTRODUÇÃO**

O conhecimento do comportamento das lajes de concreto armado, principalmente após a fissuração do concreto, é de grande interesse para a engenharia estrutural. Nesse sentido, são desenvolvidos estudos experimentais e numéricos, com o objetivo de analisar a resposta da estrutura frente a um carregamento dado. Apesar das dificuldades inerentes à experimentação em laboratório, alguns resultados experimentais podem ser encontrados na bibliografia [1,12,14,17].

Por outro lado, o desenvolvimento do método dos elementos finitos e dos modelos para análise não-linear de estruturas, tornou a análise numérica uma alternativa barata, e relativamente confiável,

para o estudo das lajes de concreto armado [7,10,11,13,16].

Quando se trata da análise de lajes maciças, emprega-se o denominado método laminar, em que a laje maciça é dividida em diversas lâminas ou camadas de pequena espessura. A matriz de rigidez e as ações nodais não-lineares são obtidas, considerando-se que as tensões não variam ao longo da espessura de uma mesma lâmina. Esse procedimento já é tradicional, tanto para a análise de lajes, quanto para a análise de vigas e cascas de concreto armado.

O modelo laminar também pode ser empregado para a análise de lajes nervuradas de concreto armado. Para isto, deve-se trabalhar com propriedades equivalentes do concreto, para que o modelo seja capaz de representar os vazios deixados na estrutura pela eliminação de parte do

concreto da zona tracionada. Quando os vazios forem permanentemente preenchidos com blocos de um material estrutural secundário, esse efeito favorável pode ser considerado, adotando-se propriedades equivalentes para esse material.

Neste trabalho, apresenta-se um modelo não-linear que permite analisar lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado. O modelo considera a não-linearidade física do concreto em compressão, bem como a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. A formulação é baseada na teoria de placas de Mindlin e inclui as deformações normais no plano médio da laje. A análise estrutural é realizada com o emprego do método dos elementos finitos, utilizando-se o elemento isoparamétrico quadrático de oito nós. Para cada nó, consideram-se cinco graus de liberdade, sendo três deslocamentos e duas rotações independentes do deslocamento transversal do plano da laje. Um algoritmo iterativo é empregado para a solução do sistema de equações não-lineares. A comprovação da validade do modelo, em relação a diversos resultados experimentais, foi previamente apresentada na ref.[5].

O modelo não-linear desenvolvido é utilizado para verificar a validade dos critérios de projeto de lajes nervuradas de concreto armado [4]. Nesses procedimentos de projeto, admite-se que a laje nervurada pode ser analisada como uma laje maciça equivalente. A laje equivalente é isotrópica, possuindo rigidez à torção igual à rigidez à flexão da laje nervurada.

Na próxima seção, descreve-se o procedimento para análise de lajes maciças e de lajes nervuradas de concreto armado, empregando-se o modelo laminar. Os modelos constitutivos para o concreto e para o aço são apresentados na seção seguinte. Ao final do trabalho, apresentam-se os resultados obtidos para diversas lajes nervuradas projetadas segundo os critérios usuais.

## 2. MODELO LAMINAR PARA ANÁLISE DE LAJES DE CONCRETO ARMADO

Na fig. 1, apresenta-se uma laje maciça de concreto armado situada no plano x-y, onde a espessura  $h$  foi dividida em  $n$  camadas de concreto de espessura constante  $\Delta h = h/n$ . A laje pode ter diversas camadas de armadura, orientadas

arbitrariamente em relação ao sistema de eixos x-y.

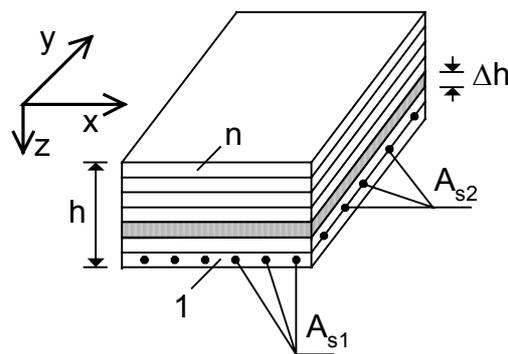


Fig. 1 – Laje maciça de concreto armado

As seguintes propriedades do concreto são empregadas no modelo constitutivo, descrito na próxima seção:

$f_c$  = resistência à compressão simples;

$f_{ct}$  = resistência à tração simples;

$E_c$  = módulo de deformação longitudinal, tangente à origem do diagrama tensão-deformação;

$\nu$  = coeficiente de Poisson.

No caso da laje maciça indicada na fig. 1, essas propriedades são consideradas constantes e iguais para todas as  $n$  camadas de concreto.

Uma armadura genérica, de área  $A_{si}$  por unidade de comprimento, fazendo um ângulo  $\phi_{si}$  com o eixo x, é substituída por uma lâmina contínua de espessura  $t_i = A_{si}$ , com as seguintes propriedades:

$E_s$  = módulo de elasticidade do aço;

$f_y$  = tensão de escoamento do aço.

Na fig. 2, indica-se uma seção transversal de uma laje nervurada, obtida através de um corte paralelo ao eixo x. Neste caso, admite-se que o sistema de eixos x-y é orientado segundo as direções das nervuras.

As nervuras da direção y, representadas na fig. 2, possuem uma largura  $b_y$  e uma altura  $h_w$ , abaixo da mesa de espessura  $h_f$ . O espaçamento entre essas nervuras é  $S_y$ . A armadura de flexão em cada nervura possui uma área total igual a  $A_{sy}$ . As armaduras existentes na mesa não estão representadas na fig. 2.

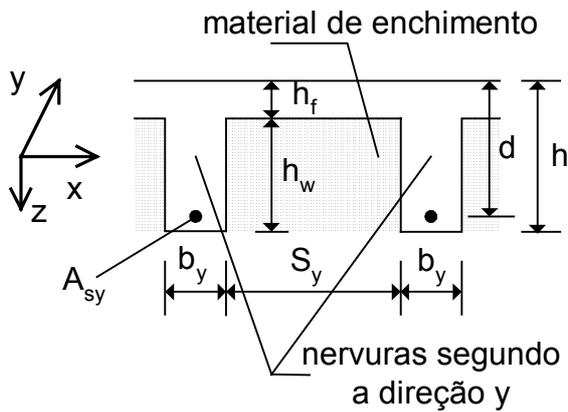


Fig. 2 – Seção transversal de laje nervurada

Um corte paralelo ao eixo  $y$  indicaria as nervuras da direção  $x$ , as quais têm largura  $b_x$ , altura  $h_w$ , espaçamento  $S_x$  e uma área de aço  $A_{sx}$ .

Assim como foi feito para a laje maciça, a laje nervurada é dividida em  $n$  camadas ao longo da espessura  $h$ . As camadas podem ter uma espessura constante  $\Delta h = h/n$ , ou pode-se adotar espessuras diferentes, sendo  $\Delta h_f = h_f/n_1$ , para a região da mesa, e  $\Delta h_w = h_w/n_2$ , para a região das nervuras, com  $n = n_1 + n_2$ .

Para as camadas de concreto situadas na mesa de espessura  $h_f$ , consideram-se as propriedades mecânicas originais  $f_c$ ,  $f_{ct}$ ,  $E_c$  e  $\nu$ .

Para as camadas de concreto situadas na região das nervuras, adotam-se as propriedades equivalentes  $f_{ce}$ ,  $f_{cte}$  e  $E_{ce}$ , dadas por

$$f_{ce} = \beta_c f_c; f_{cte} = \beta_c f_{ct}; E_{ce} = \beta_c E_c \quad (1)$$

onde

$$\beta_c = \sqrt{\beta_{cx} \beta_{cy}} \quad (2)$$

Os coeficientes redutores das propriedades do concreto, para a região das nervuras, são dados por

$$\beta_{cx} = \frac{b_x}{b_x + S_x}; \beta_{cy} = \frac{b_y}{b_y + S_y} \quad (3)$$

Considera-se que o coeficiente de Poisson  $\nu$  permanece com o seu valor original em toda a espessura da laje.

As armaduras contidas nas nervuras são representadas por lâminas de espessura  $t_x$  e  $t_y$ , dadas por

$$t_x = \frac{A_{sx}}{b_x + S_x}; t_y = \frac{A_{sy}}{b_y + S_y} \quad (4)$$

Com esse procedimento, pode-se empregar o modelo laminar para a análise de lajes nervuradas, de modo idêntico ao que é feito para as lajes maciças.

Se houver material de enchimento com resistência mecânica satisfatória que justifique a sua consideração, pode-se definir propriedades equivalentes para o mesmo. Por exemplo, se  $E_b$  representa o módulo de elasticidade do material de enchimento, o módulo de elasticidade equivalente  $E_{be}$  é dado por

$$E_{be} = E_b \sqrt{\left(\frac{S_x}{b_x + S_x}\right) \left(\frac{S_y}{b_y + S_y}\right)} \quad (5)$$

Das equações (1) e (5), verifica-se que o modelo laminar equivalente considera a isotropia para a parte inferior da laje (na região das nervuras), mesmo no caso em que as nervuras possuem larguras e espaçamentos diferentes segundo as duas direções. Essa aproximação é justificável porque, no caso das lajes nervuradas de concreto armado, os efeitos da ortotropia, decorrentes do uso de nervuras diferentes segundo as duas direções, são pequenos, principalmente após a fissuração do concreto.

Observa-se que o modelo empregado para as lajes nervuradas é capaz de reproduzir o comportamento das lajes maciças. Para isto, basta adotar  $S_x = S_y = 0$  e desconsiderar o material de enchimento.

### 3. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A TEORIA DE PLACAS DE MINDLIN

Na teoria de placas de Mindlin[15], as rotações  $\theta_x(x, y)$  e  $\theta_y(x, y)$  são independentes da flecha  $w(x, y)$  da superfície média da placa. Com isso, são consideradas as deformações por corte da placa. No caso das lajes de concreto armado, deve-se considerar, ainda, os deslocamentos  $u_o(x, y)$  e

$v_o(x, y)$  no plano da laje pois, de um modo geral, a superfície média não coincide com a superfície neutra.

Assim, ao empregar o método dos elementos finitos, consideram-se cinco graus de liberdade para cada nó do elemento: um deslocamento transversal, duas rotações e dois deslocamentos no plano do elemento.

A matriz de rigidez do elemento finito,  $\mathbf{K}_e$ , é dada por

$$\mathbf{K}_e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (6)$$

onde a integração é feita ao longo da área  $A_e$  do elemento.

Na equação (6),  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona as deformações generalizadas com os deslocamentos nodais e  $\mathbf{D}$  é a matriz de constantes elásticas do material, integrada na espessura da laje.

Na montagem de  $\mathbf{K}_e$ , pode-se desconsiderar a contribuição das armaduras pois, como o equilíbrio é garantido através de um processo iterativo, a matriz de rigidez só é empregada para inicializar o processo. As armaduras são incluídas no cálculo das ações nodais não-lineares, durante os ciclos iterativos. Desse modo, a matriz  $\mathbf{D}$  inclui as propriedades do concreto e do material de enchimento, quando houver.

Considerando um material isotrópico e elástico linear sob um estado plano de tensões, tem-se a matriz de constantes elásticas

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Para a obtenção da matriz  $\mathbf{D}$  para a laje nervurada, considera-se a laje equivalente composta pelos três materiais, indicada na fig. 3.

O material 1, correspondendo ao concreto da mesa, possui as propriedades  $f_c$ ,  $f_{ct}$ ,  $E_c$  e  $\nu$ . O material 2, representando o concreto das nervuras, possui as propriedades equivalentes  $f_{ce}$ ,  $f_{cte}$  e  $E_{ce}$ , dadas na equação (1), e um coeficiente de Poisson igual a  $\nu$ . O material 3, correspondendo

ao enchimento, possui um módulo de elasticidade equivalente  $E_{be}$ , dado na equação (5), e um coeficiente de Poisson  $\nu_b$ .

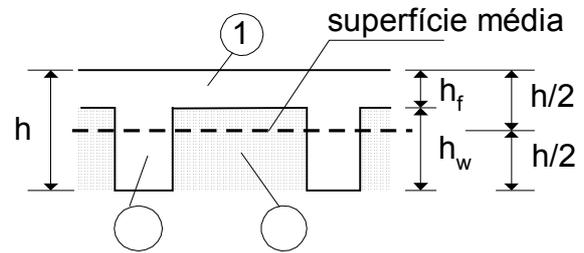


Fig. 3 – Laje equivalente composta por três materiais

A matriz  $\mathbf{D}$  é dada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

A submatrizes  $\mathbf{D}_{11}$  e  $\mathbf{D}_{22}$  incluem os termos de estado plano de tensões e de flexão.

A submatriz de acoplamento  $\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21}^T$  não é nula porque, mesmo para o caso elástico linear, a superfície média da laje não coincide com a superfície neutra, como se deduz da fig. 3.

A submatriz  $\mathbf{D}_{33}$  inclui os termos correspondentes às deformações por corte.

Considerando os 3 materiais representados na fig. 3, tem-se que

$$\mathbf{D}_{11} = \sum_{j=1}^3 A_j \mathbf{E}_j \quad (9)$$

$$\mathbf{D}_{12} = \sum_{j=1}^3 S_j \mathbf{E}_j \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_{22} = \sum_{j=1}^3 I_j \mathbf{E}_j \quad (11)$$

onde a matriz  $\mathbf{E}_j$  é obtida da equação (7), considerando o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material  $j$ .

Para o emprego das equações (9) a (11), utilizam-se as seguintes expressões para  $A_j$ ,  $S_j$  e  $I_j$ :

a) Se  $j = 1$ :

$$A_j = h_f \quad (12)$$

$$S_j = h_f \left( \frac{h_f - h}{2} \right) \quad (13)$$

$$I_j = \frac{h_f^3}{12} + h_f \left( \frac{h_f - h}{2} \right)^2 \quad (14)$$

b) Se  $j = 2,3$ :

$$A_j = h_w \quad (15)$$

$$S_j = h_w \left( \frac{h - h_w}{2} \right) \quad (16)$$

$$I_j = \frac{h_w^3}{12} + h_w \left( \frac{h - h_w}{2} \right)^2 \quad (17)$$

A submatriz  $\mathbf{D}_{33}$  é dada por

$$\mathbf{D}_{33} = \frac{5}{6} \sum_{j=1}^3 A_j \begin{bmatrix} G_j & 0 \\ 0 & G_j \end{bmatrix} \quad (18)$$

A constante  $5/6$  leva em conta que as tensões de cisalhamento não são uniformes ao longo da espessura da laje. O módulo de elasticidade transversal  $G_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}$  é obtido com as propriedades do material  $j = 1,2,3$ .

Observa-se que a matriz  $\mathbf{D}$  é obtida através de integração exata, ao longo da espessura da laje.

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento finito, indicada na equação (6), adota-se um processo de integração seletiva. Para os termos correspondentes à submatriz  $\mathbf{D}_{33}$ , adota-se integração numérica com 2x2 pontos de Gauss. Os demais termos são integrados com integração completa, adotando-se 3x3 pontos de Gauss ao longo da superfície do elemento finito.

Após a montagem da matriz de rigidez global da estrutura e a introdução das condições de contorno, resolve-se o sistema de equações linearizadas para a obtenção da primeira aproximação para os deslocamentos nodais. O vetor de deformações generalizadas  $\mathcal{E}$ , em um ponto de integração situado na superfície de um elemento finito, é igual a  $\mathcal{E} = \mathbf{B}\mathbf{U}_e$ , onde  $\mathbf{U}_e$  representa o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Conhecido  $\mathcal{E}$ , pode-se obter as deformações normais  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e a distorção  $\gamma_{xy}$  no centro de uma camada genérica, situada ao longo da espessura da laje. As distorções  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  não variam na espessura da laje.

As tensões de cisalhamento  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  são dadas por

$$\tau_{xz} = \frac{5}{6} G_j \gamma_{xz} ; \quad \tau_{yz} = \frac{5}{6} G_j \gamma_{yz} \quad (19)$$

onde  $G_j$  é o módulo de elasticidade transversal do material considerado.

Na seção seguinte, apresentam-se os modelos constitutivos para o cálculo das tensões no concreto e nas armaduras, no plano x-y.

#### 4. MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS MATERIAIS

Na fig. 4, representa-se o diagrama tensão-deformação do concreto, obtido em um ensaio de compressão simples.

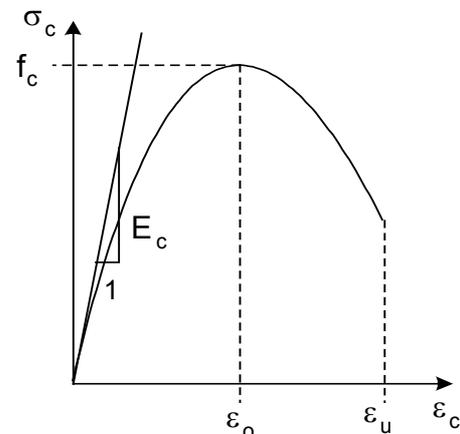


Fig. 4 – Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido

De acordo com o CEB/90 [8], a relação tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial pode ser representada por

$$\sigma_c = -f_c \left[ \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right] \quad (20)$$

onde  $k = -E_c \varepsilon_o / f_c$  e  $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_o$ .

Para a deformação  $\varepsilon_o$ , correspondente à máxima tensão, adota-se o valor  $-0,22(1 + \varphi)/100$ , onde  $\varphi$  é o coeficiente de fluência do concreto.

A deformação de ruptura é  $\varepsilon_u = \eta_u \varepsilon_o$ , onde

$$\eta_u = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{2} + 1 \right) + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{k}{2} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{1/2} \quad (21)$$

O módulo de deformação longitudinal inicial,  $E_c$ , é estimado a partir da resistência média à compressão,  $f_c$ , através da expressão

$$E_c = \frac{21500}{(1 + \varphi)} (f_c / 10)^{1/3} \quad (22)$$

com  $f_c$  e  $E_c$  em MPa.

Para o concreto tracionado, adota-se o diagrama tensão-deformação indicado na fig. 5.

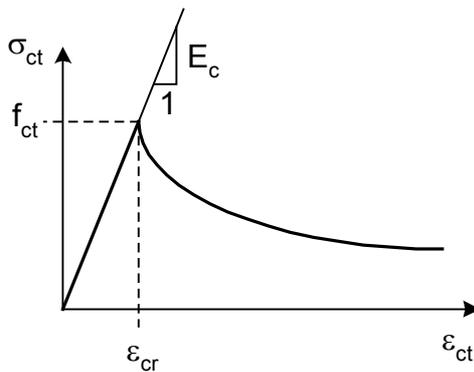


Fig. 5 – Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado

A tensão de tração no concreto,  $\sigma_{ct}$ , é dada por

$$\sigma_{ct} = E_c \varepsilon_{ct}, \text{ se } \varepsilon_{ct} \leq \varepsilon_{cr} = f_{ct} / E_c \quad (23)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ct} \left( \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{ct}} \right)^\alpha, \text{ se } \varepsilon_{ct} > \varepsilon_{cr} \quad (24)$$

onde  $\alpha = 0,15 f_{ct}$ , com  $f_{ct}$  em MPa.

De acordo com o CEB/90, a resistência à tração do concreto,  $f_{ct}$ , pode ser estimada a partir da resistência média à compressão,  $f_c$ , através da expressão

$$f_{ct} = 1,40 \left( \frac{f_c - 8}{10} \right)^{2/3} \quad (25)$$

com  $f_c$  e  $f_{ct}$  em MPa.

A equação (24) leva em conta a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. Expressões semelhantes a essa têm sido empregadas por outros autores [3,19], porém, com um valor constante para o coeficiente  $\alpha$ . Entretanto, a comparação dos resultados obtidos numericamente com a resposta experimental de diversas lajes de concreto armado indica que o coeficiente  $\alpha$  não deve ser constante.

Na fig. 6, apresentam-se alguns diagramas tensão-deformação para diferentes valores do coeficiente  $\alpha$ . Observa-se que o comportamento pós-fissuração é tanto mais frágil, quanto maior for a resistência à tração do concreto.

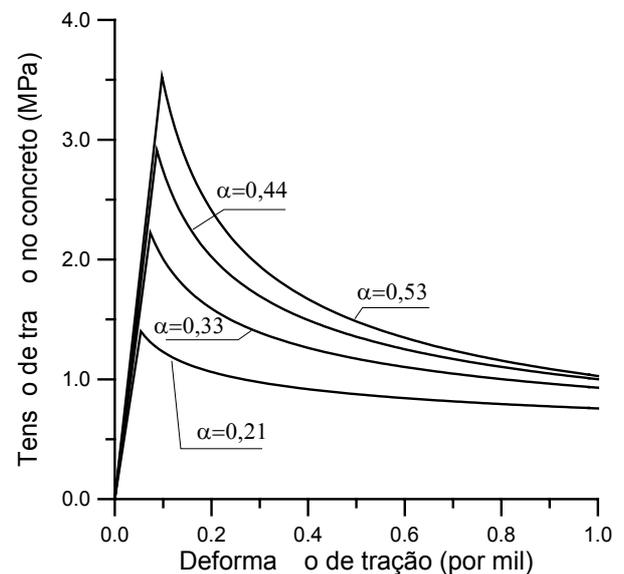


Fig. 6 – Diagramas tensão-deformação para diferentes valores de  $\alpha$

Após a obtenção das deformações normais  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e da distorção  $\gamma_{xy}$  em uma camada genérica, localizada em um ponto de integração na superfície da laje, calculam-se as deformações principais no concreto  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , com  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ . Para levar em conta o efeito de Poisson, empregam-se

as deformações uniaxiais equivalentes,  $\varepsilon_{1e}$  e  $\varepsilon_{2e}$ , dadas por

$$\varepsilon_{1e} = \frac{\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2}{1 - \nu^2} ; \quad \varepsilon_{2e} = \frac{\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 - \nu^2} \quad (26)$$

onde  $\nu = 0,2$  é o coeficiente de Poisson do concreto.

Entrando com as deformações uniaxiais equivalentes nos diagramas tensão-deformação do concreto, obtêm-se as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Retornando ao sistema de eixos x-y, resultam as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  no concreto.

Esse procedimento é empregado enquanto o concreto não estiver fissurado, ou seja, enquanto  $\varepsilon_{1e} < \varepsilon_{cr}$ .

Quando surge uma fissura na camada considerada, sua orientação é fixada. Considera-se que a fissura é perpendicular à direção da deformação principal máxima  $\varepsilon_1$ . O ângulo  $\phi$ , entre a direção de  $\varepsilon_1$  e o eixo x é fixado. Consideram-se, desse modo, dois sistemas de eixos: o sistema global x-y e o sistema local 1-2, com a direção 1, perpendicular à fissura, fazendo um ângulo  $\phi$  com o eixo x.

A partir do surgimento da fissura, despreza-se o coeficiente de Poisson do concreto. As deformações no sistema local 1-2 são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

onde  $c = \cos \phi$  e  $s = \sin \phi$ .

Entrando com as deformações  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  nos diagramas tensão-deformação do concreto, obtêm-se as tensões normais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . A tensão tangencial é dada por  $\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}$ , onde  $G_{12}$  é o módulo de corte do concreto fissurado [9,18,19].

Nesse trabalho, emprega-se a expressão

$$G_{12} = (E_1 + E_2)/4 \quad (28)$$

onde  $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_1$  e  $E_2 = \sigma_2/\varepsilon_2$  são os módulos de deformação secantes nas direções 1 e 2, respectivamente.

Obtidas as tensões  $\sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}^T$  no sistema local 1-2, retorna-se ao sistema global x-y através da relação  $\sigma = \mathbf{R}^T \sigma^*$ , onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação que aparece na equação (27) e  $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$  é o vetor de tensões no concreto no sistema x-y.

Ao empregar o modelo constitutivo, adotam-se as propriedades  $f_c$ ,  $f_{ct}$ ,  $E_c$  e  $\nu$  para o concreto da mesa da laje (material 1 indicado na fig. 3). Para o concreto das nervuras (material 2 representado na fig. 3), deve-se adotar as propriedades equivalentes  $f_{ce}$ ,  $f_{cte}$  e  $E_{ce}$  no lugar de  $f_c$ ,  $f_{ct}$  e  $E_c$ , respectivamente.

Para os aços, adota-se um comportamento elasto-plástico perfeito em tração e em compressão. Assim, se  $\varepsilon_s$  é a deformação normal na direção das armaduras, a tensão  $\sigma_s$  correspondente é dada por

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s, \text{ se } |\varepsilon_s| < f_y/E_s \quad (29)$$

$$\sigma_s = f_y \left( \varepsilon_s / |\varepsilon_s| \right), \text{ se } |\varepsilon_s| \geq f_y/E_s \quad (30)$$

onde  $f_y$  é a tensão de escoamento e  $E_s$  é o módulo de elasticidade do aço.

Neste trabalho, adota-se  $E_s = 200$  GPa.

Definindo o vetor de deformações  $\mathcal{E} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ , obtêm-se a deformação normal nas armaduras através da relação  $\varepsilon_s = \mathbf{R}_s \mathcal{E}$ , onde a matriz de rotação  $\mathbf{R}_s$  é dada por

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi_s & \sin^2 \phi_s & \sin \phi_s \cos \phi_s \end{bmatrix} \quad (31)$$

sendo  $\phi_s$  o ângulo entre a direção da armadura e o eixo x.

Após o cálculo da tensão  $\sigma_s$  na armadura, retorna-se ao sistema x-y, obtendo-se as tensões  $\{\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \tau_{sxy}\} = \sigma_s \mathbf{R}_s$ .

A consideração do material de enchimento exige a definição de modelos constitutivos para o mesmo. Isto pode ser feito de maneira análoga ao que foi apresentado para o concreto. Entretanto, o material de enchimento não é considerado nos

exemplos apresentados a seguir. Por isso, a modelagem desse material será omitida.

Após o cálculo das tensões no concreto e nas armaduras, efetuam-se as integrações na espessura da laje para a obtenção dos esforços solicitantes. Finalmente, esses esforços são integrados na área do elemento finito, para a obtenção do vetor de ações nodais não-lineares. Nesse processo, emprega-se a integração seletiva, adotando-se 2x2 pontos de Gauss, para os termos relativos aos esforços cortantes, e 3x3 pontos de Gauss, para os termos de flexão e estado plano.

Em virtude da não-linearidade física, resulta um desequilíbrio entre o vetor de cargas nodais e o vetor de ações nodais não-lineares, o que exige o emprego de um processo iterativo. Diversos algoritmos iterativos têm sido desenvolvidos para a solução desse sistema de equações não-lineares. Neste trabalho, emprega-se o denominado método secante-Newton, como descrito em [2].

Incrementando a carga, pode-se obter uma resposta completa até a ruína da laje. Considera-se a ocorrência da ruína quando a deformação de compressão no concreto,  $\varepsilon_c$ , for menor que a deformação limite  $\varepsilon_u = \eta_u \varepsilon_o$ , com  $\eta_u$  dado na equação (21).

O modelo desenvolvido neste trabalho foi implementado em um programa de elementos finitos para a análise de lajes de concreto armado. Nesse programa, emprega-se o elemento finito isoparamétrico quadrático de 8 nós. Cada nó apresenta os 5 graus de liberdade, descritos anteriormente.

A seguir, apresentam-se os critérios empregados no projeto das lajes nervuradas de concreto armado [4].

## 5. PROCEDIMENTO DE PROJETO DAS LAJES NERVURADAS

Em todos os exemplos que se seguem, considera-se que as lajes são quadradas, com vãos de cálculo  $L = 10\text{m}$  nas duas direções em planta. As lajes são simplesmente apoiadas nos quatro lados e foram submetidas a uma carga uniformemente distribuída. O seguinte carregamento foi considerado no projeto das lajes:

- carga permanente ( $g$ ): peso próprio acrescido de  $2,0\text{ kN/m}^2$ ;
- carga acidental ( $q$ ): igual a  $2,0\text{ kN/m}^2$ .

A carga total de serviço é  $p_k = g + q$  e a carga de cálculo é  $p_d = 1,4p_k$ .

Para o cálculo da flecha no centro da laje, adota-se a combinação quase permanente do carregamento, dada pela carga  $p_o = g + 0,3q$ , conforme a NBR-6118[6].

As seguintes propriedades dos materiais foram consideradas:

- resistência característica à compressão do concreto:  $f_{ck} = 20\text{ MPa}$ ;
- coeficiente de Poisson do concreto:  $\nu = 0,2$ ;
- coeficiente de fluência do concreto:  $\varphi = 2,5$ ;
- aço CA-50: tensão de escoamento característica  $f_{yk} = 500\text{ MPa}$ .

As lajes nervuradas foram armadas com nervuras iguais nas duas direções, isto é, com  $b = b_x = b_y$  e  $S = S_x = S_y$ . Para a largura das nervuras, adotou-se  $b = 10\text{ cm}$ . Para a espessura da mesa,  $h_f$ , foram considerados os valores 4, 5 e 6cm. A distância livre entre nervuras,  $S$ , foi variada, respeitando-se a limitação  $h_f \geq S/15$ , imposta pela NBR-6118.

Assim, uma vez fixadas as dimensões  $b$ ,  $h_f$  e  $S$ , variou-se a altura das nervuras,  $h_w$ , de 1cm em 1cm até que a flecha final  $W_\infty$  no centro da laje fosse menor ou igual à flecha admissível  $W_{adm} = L/250$ . Para cada valor de  $h_w$ , calcula-se o peso próprio da laje para a obtenção da carga permanente. A flecha final é calculada para a carga quase permanente  $p_o = g + 0,3q$ . Essa flecha é dada por  $W_\infty = 0,001w_c p_o L^4 / D$ , onde  $w_c$  é um coeficiente que encontra-se tabelado na ref.[4]. A

rigidez à flexão da laje é dada por  $D = \frac{E_{cs} h_e^3}{12(1-\nu^2)}$ , onde  $E_{cs} = 0,85E_c$  é o módulo secante do concreto, com  $E_c$  obtido da equação (22), considerando  $\varphi = 2,5$ .

A espessura equivalente  $h_e$  é dada por

$$h_e = \left( \frac{I}{b + S} \right)^{1/3}, \text{ sendo } I \text{ o momento de inércia da}$$

seção T definida em um comprimento  $b + S$  de laje.

Após atender as exigências quanto à flecha, dimensiona-se as armaduras longitudinais das nervuras para a carga de cálculo  $p_d = 1,4p_k$ . Os momentos fletores são obtidos da ref.[4], considerando-se o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ . Uma armadura mínima de 0,15% da área da seção T, em cada nervura, foi observada.

Após o dimensionamento das lajes nervuradas, passou-se para a análise não-linear. Neste caso, são feitas duas análises.

Na primeira análise, adotam-se as propriedades médias dos materiais. Com isto, obtém-se a flecha  $W_{nl}$ , necessária para verificar o atendimento do estado limite de deformações excessivas.

As propriedades médias do concreto são obtidas das seguintes relações[8]:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa}, \text{ resist\^encia \^a compress\~ao};$$

$$f_{ctm} = 1,40 \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3} \text{ MPa}, \text{ resist\^encia \^a tra\~cao};$$

$$E_{cm} = \frac{21500}{(1 + \varphi)} \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3} \text{ MPa}, \text{ m\^odulo tangente}.$$

Para o a\~co, considera-se que  $f_{ym} = f_{yk}$ .

Na segunda análise, adotam-se as propriedades de cálculo, para a obtenção da carga de ruína  $p_{ud}$  da laje. Essa carga é comparada com a carga de projeto  $p_d$ .

As propriedades de cálculo dos materiais são dadas por  $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4}$  ;  $f_{ctd} = \frac{0,7 f_{ctm}}{1,4}$  ;

$$E_{cd} = \frac{21500}{(1 + \varphi)} \left( \frac{f_{cd}}{10} \right)^{1/3} \text{ MPa} ; f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15}.$$

Ent\~ao, emprega-se o modelo constitutivo não-linear, descrito anteriormente, adotando-se  $f_c = 0,85 f_{cm}$ ,  $f_{ct} = f_{ctm}$ ,  $E_c = E_{cm}$  e  $f_y = f_{ym}$ , para verificar o estado de deformações excessivas. Para o cálculo da carga de ruptura, adota-se  $f_c = 0,85 f_{cd}$ ,  $f_{ct} = f_{ctd}$ ,  $E_c = E_{cd}$  e  $f_y = f_{yd}$ . O coeficiente 0,85 é empregado para levar em conta o efeito Rüsck.

## 6. RESULTADOS

Na tabela 1, apresentam-se as características das lajes nervuradas analisadas. Nessa tabela,  $A_s$  representa a área de a\~co por nervura, obtida no dimensionamento. A largura das nervuras é  $b = 10 \text{ cm}$  e a carga acidental é  $q = 2,0 \text{ kN/m}^2$ , para todas as lajes.

Tabela 1 – Características das lajes nervuradas

Laje	$h_f$ cm	$S$ cm	$h_w$ cm	$g$ kN/m <sup>2</sup>	$A_s$ cm <sup>2</sup>
L1	4	30	25	5,73	1,75
L2	4	40	26	5,34	1,99
L3	4	50	27	5,06	2,21
L4	4	60	28	4,86	2,41
L5	5	30	24	5,88	1,78
L6	5	40	25	5,50	2,03
L7	5	50	26	5,24	2,26
L8	5	60	27	5,04	2,47
L9	5	70	27	4,83	2,74
L10	6	30	23	6,02	1,81
L11	6	40	24	5,66	2,08
L12	6	50	25	5,41	2,32
L13	6	60	26	5,22	2,54
L14	6	70	27	5,08	2,74
L15	6	80	27	4,92	3,01
L16	6	90	28	4,83	3,19

Na fig. 1, apresentam-se as respostas obtidas para a laje L3. Nessa figura estão representadas as respostas numéricas, obtidas com as propriedades médias e com as propriedades de cálculo. A reta representa a resposta linear adotada na fase de projeto, obtida com o m\^odulo secante  $E_{cs} = 0,85 E_{cm}$ .

Observa-se que a carga de ruptura  $p_{ud}$  é cerca de 20% superior à carga de cálculo  $p_d$ . A resposta linear se aproxima bem da solução numérica, obtida com as propriedades médias, até a carga de serviço  $p_k$ . A partir dessa carga, as respostas divergem bastante, por causa da fissuração da laje.

Na fig. 2, apresentam-se as respostas linear e não-linear até a carga de serviço, para uma melhor visualização. Observa-se que o cálculo convencional, considerando uma laje maciça de espessura equivalente, é perfeitamente v\~alido até a carga quase permanente.

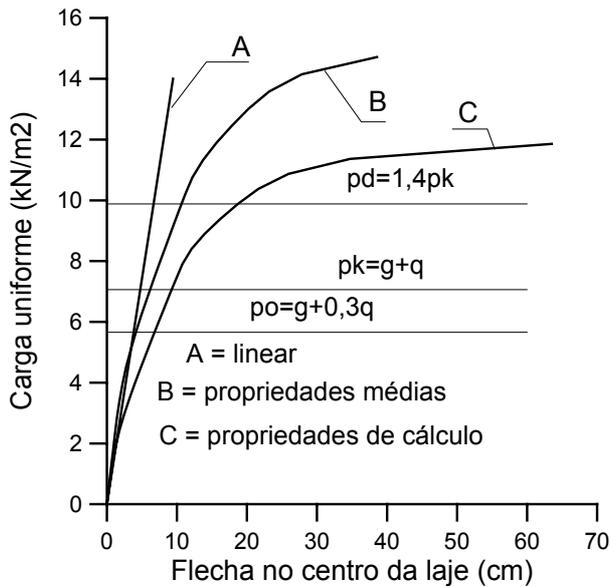


Fig. 1 - Respostas para a laje L3

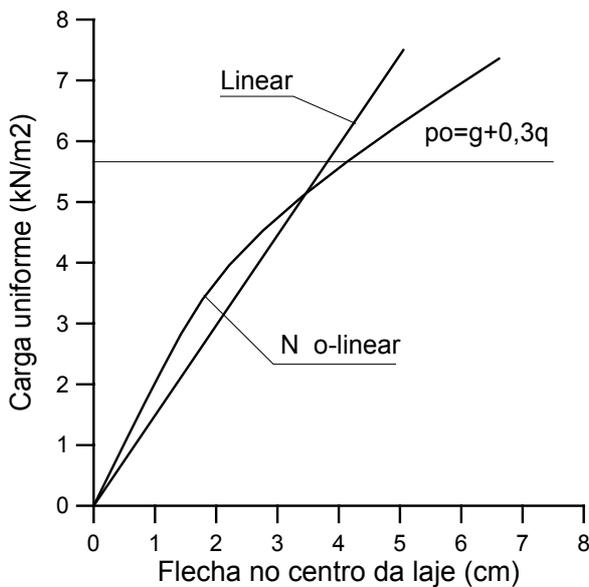


Fig. 2- Respostas para a laje L3

Na tabela 2, apresentam-se os valores obtidos para a flecha  $W_{nl}$ . Esses valores foram obtidos com o modelo computacional, empregando-se as propriedades médias dos materiais, e correspondem à carga quase permanente  $p_o$ . Observa-se que  $W_{nl}$  é sempre maior que  $W_{adm}$ , por causa da fissuração do concreto que se inicia mesmo antes da carga  $p_o$ . Entretanto, o erro máximo detectado é de apenas 12%.

Tabela 2 – Flechas obtidas com o modelo não-linear

Laje	$p_o$ kN/m <sup>2</sup>	$W_{nl}$ cm	$\frac{W_{nl}}{W_{adm}}$
L1	6,33	4,41	1,10
L2	5,94	4,29	1,07
L3	5,66	4,14	1,04
L4	5,46	3,99	1,00
L5	6,48	4,42	1,11
L6	6,10	4,32	1,08
L7	5,84	4,21	1,05
L8	5,64	4,07	1,02
L9	5,43	4,29	1,07
L10	6,62	4,48	1,12
L11	6,26	4,41	1,10
L12	6,01	4,31	1,08
L13	5,82	4,19	1,05
L14	5,68	4,10	1,03
L15	5,52	4,31	1,08
L16	5,43	4,14	1,04

Para as 16 lajes analisadas, verificou-se que a carga de ruptura  $p_{ud}$  foi sempre maior que a carga de cálculo  $p_d$ . A relação  $p_{ud}/p_d$  variou de 1,20 a 1,30. Isto mostra que o procedimento de projeto adotado para as lajes nervuradas é seguro.

## 7. CONCLUSÕES

O modelo computacional apresentado neste trabalho permite analisar lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado. A validade do modelo foi previamente comprovada[5], comparando-se as soluções numéricas com diversos resultados experimentais disponíveis na bibliografia. Desse modo, o modelo numérico serve de referência para a aferição dos usuais procedimentos simplificados para o projeto das lajes nervuradas de concreto armado.

Nos procedimentos de projeto admite-se, como é usual, que a laje nervurada pode ser analisada como uma laje maciça equivalente, tanto para o cálculo de suas deflexões, quanto para o cálculo dos momentos fletores. A laje maciça equivalente é isotrópica e possui rigidez à torção igual à rigidez à flexão.

Os resultados apresentados neste trabalho indicam que as lajes nervuradas, projetadas segundo essa concepção de projeto, atendem as exigências relativas ao estado limite de deformações excessivas. De um modo geral, a flecha final é maior que a flecha admissível, por

causa da fissuração do concreto que se inicia mesmo antes da carga quase permanente. Entretanto, essa diferença nos valores da flecha é menor que 12%, o que é perfeitamente aceitável em virtude de todas as incertezas relativas às cargas, propriedades dos materiais e dos próprios métodos de cálculo.

Uma vez que as lajes nervuradas fissuram para uma carga inferior à carga quase permanente, a flecha inicial será sempre maior que a flecha elástica inicial, baseada na rigidez da laje maciça equivalente. Entretanto, as flechas finais, considerando a fluência do concreto, obtidas com o modelo não-linear e com a análise linear equivalente, tendem ao mesmo valor. Isto ocorre porque o modelo linear equivalente superestima o efeito da fluência do concreto, compensando-se, assim, os efeitos da fissuração.

Conclui-se, portanto, que as lajes nervuradas podem ser calculadas como lajes maciças equivalentes, com rigidez à torção igual à rigidez à flexão. Os eventuais desvios da solução elástica equivalente em relação à resposta não-linear (e experimental) devem-se à fissuração do concreto, não sendo consequência de uma possível redução da rigidez à torção da laje nervurada.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Abdul-Wahab, H. M. S., Khalil, M. H. - *Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs*. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, No. 2, p.219-227, 2000.
2. Araújo, J. M.; Bignon, P. G. - *Métodos de minimização para análise não-linear de estruturas*. Relatório de Pesquisa RP-110/93, CPGEC, UFRGS, Porto Alegre, 1993.
3. Araújo, J. M.; Campos Filho, A. - *Modelo bidimensional para análise de vigas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, No. 34, p.9-12, Lisboa, 1992.
4. Araújo, J. M. - *Curso de Concreto Armado. Vol. 2*, Editora Dunas, Rio Grande, 1999. ([www.mikrus.com.br/ed.dunas](http://www.mikrus.com.br/ed.dunas))
5. Araújo, J. M. - *Um modelo para análise não-linear de lajes nervuradas de concreto armado*. Revista Engenharia, Ciência e Tecnologia, v.06, n.2, p.3-13, UFES, Vitória, 2003.
6. Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Projeto de Estruturas de Concreto. NBR-6118*. Rio de Janeiro, 2003.
7. Bashur, F. K., Darwin, D. - *Nonlinear model for reinforced concrete slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST1, p. 157-170, 1978.
8. Comité Euro-International du Béton - *CEB-FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.
9. Darwin, D., Pecknold, D. A. - *Analysis of RC shear panels under cyclic loading*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 102, No. ST2, p.355-369, 1976.
10. Gilbert, R. I., Warner, R. F. - *Tension stiffening in reinforced concrete slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST12, p.1885-1900, 1978.
11. Huang, Z., Burgess, I. W., Plank, R. J. - *Effective stiffness modelling of composite concrete slabs in fire*. Engineering Structures, Vol. 22, p.1133-1144, 2000.
12. Jain, S. C., Kennedy, J. B. - *Yield criterion for reinforced concrete slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST3, p.631-644, 1974.
13. Jiang, J., Mirza, F. A. - *Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs by a discrete finite element approach*. Computers & Structures, Vol. 65, No. 4, p.585-592, 1997.
14. Jofriet, J. C.; McNeice, G. M. - *Finite element analysis of reinforced concrete slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST3, p.785-806, 1971.
15. Mindlin, R. D. - *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. Journal of Applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 18, No. 1, p.31-38, 1951.
16. Owen, D. R. J.; Figueiras, J. A.; Damjanic, F. - *Finite element analysis of reinforced and*

*prestressed concrete structures including thermal loading*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 41, No. 3, p.323-366, 1983.

17. Taylor, R., Maher, D. R. H., Hayes, B. - *Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs*. Magazine of Concrete Research, Vol.18, No.55, p.85-94, 1966.

18. Vecchio, F. J., Collins, M. P. - *Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes*. Structural Journal, American Concrete Institute, Vol. 86, No.1, p.26-35, 1989.

19. Wang, T.; Hsu, T. T. C. - *Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models*. Computers & Structures, Vol. 79, pp.2781-2791, 2001.