

# CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

ANÁLISE ESTRUTURAL PROBABILÍSTICA

PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

C T - 1 0 4

José Milton de Araújo

Armando Miguel Awruch

1 9 9 2

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar os métodos usuais para análise estrutural probabilística. Os aspectos probabilísticos do problema são devidos às variações aleatórias das propriedades dos materiais no domínio da estrutura. Problemas relativos à variação aleatória das cargas no tempo não são considerados.

Uma técnica bastante utilizada em análise probabilística é a denominada simulação de Monte Carlo. Essa técnica pode, também, ser associada a expansões de Neumann da matriz de rigidez da estrutura, com o objetivo de reduzir o tempo de processamento.

Essas soluções, entretanto, são extremamente onerosas do ponto de vista computacional. Em vista disto, no presente trabalho, as simulações somente são empregadas para análise estática linear.

O método dos elementos finitos probabilístico, por outro lado, permite a solução de problemas maiores. Esse método consiste de expansões em série de Taylor das variáveis envolvidas e segue basicamente a mesma metodologia do método dos elementos finitos clássico. Ao longo do trabalho, essa solução é adotada tanto para análise estática, quanto dinâmica, linear e não linear.

## ABSTRACT

A discussion and some applications of usual methods in probabilistic structural analysis are the main objective of this work. As material properties in the structural domain are characterized by random variations, a probabilistic approach is considered. Random variations of external loads are not taken into account.

Direct Monte Carlo Method is commonly used in probabilistic analysis. Although some improvements in computer resources can be obtained using Neumann expansion of the stiffness matrix, both alternatives are very expensive in terms of CPU time. For that reason these two methods are applied only to static and linear analysis.

When Taylor series expansion of the variable involved in the problem (combined with the classic finite element approach) is used, probabilistic finite element becomes a useful technique for the analysis of large structural systems under static and dynamic conditions, including nonlinear effects.

## SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO .....	4
2 - ANÁLISE ESTOCÁSTICA COM SIMULAÇÃO .....	10
2.1 - Introdução .....	10
2.2 - Modelamento do campo estocástico .....	11
2.3 - Simulação de Monte Carlo direta .....	15
2.4 - Expansão de Neumann .....	16
3 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PROBABILÍSTICO ....	18
3.1 - Considerações gerais .....	18
3.2 - Análise estática linear .....	19
3.3 - Análise dinâmica linear .....	28
3.4 - Análise estática não linear .....	31
3.5 - Análise dinâmica não linear .....	34
4 - ANÁLISE NUMÉRICA .....	38
4.1 - Definição do problema .....	38
4.2 - Modelo constitutivo linear .....	39
4.3 - Modelo constitutivo não linear .....	40
4.4 - Estudo comparativo dos métodos probabilísti- cos .....	43
4.5 - Outras aplicações do método dos elementos finitos probabilístico .....	52
5 - CONCLUSÕES .....	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	61

## 1 - INTRODUÇÃO

A análise estrutural através do método dos elementos finitos, usualmente, é feita admitindo-se que as cargas atuantes na estrutura, bem como as propriedades dos materiais componentes da mesma, são conhecidas deterministicamente.

Entretanto, geralmente esta situação não ocorre nas estruturas reais. Normalmente, o que se tem é um nível de incerteza mais ou menos significativo, quanto a intensidade e a variação do carregamento no tempo e no domínio da estrutura. Além disso, surgem incertezas quanto às propriedades dos materiais, geometria e condições de contorno. Essas incertezas podem ser representadas por flutuações em torno de um valor médio e, geralmente, tais flutuações são aleatórias.

Quando a variação aleatória de uma grandeza ocorre no tempo, o processo relacionado à mesma é denominado processo estocástico. Se, por outro lado, uma distribuição é aleatória no domínio espacial, o mesmo é denominado um campo estocástico<sup>22</sup>.

Dessa forma, em uma análise realística deve-se procurar obter valores esperados e variâncias da resposta estrutural para parâmetros de entrada aleatórios, dos quais se conhecem ou podem ser estimados, os valores esperados e as variâncias.

Nos últimos anos, um grande esforço tem sido feito para incorporar esses conceitos probabilísticos, no já clássico método dos elementos finitos. A grande dificuldade enfrentada, é relativa ao elevado tempo de processamento

computacional e a disponibilidade de memória requeridos para esse fim. Além disso, a dificuldade de modelar processos e campos estocásticos exige a introdução de simplificações que, por vezes, podem levar à irrealidade.

Entretanto, com o desenvolvimento de computadores cada vez mais velozes e com maior capacidade de memória, o método dos elementos finitos probabilístico surge como uma ferramenta poderosa, não só para análise estrutural, mas para a resolução de outros problemas com características estocásticas.

Diversos métodos de análise probabilística têm sido pesquisados e divulgados na literatura. Em geral, são empregados métodos tais como, simulação de Monte Carlo direta, simulação de Monte Carlo com expansão de Neumann, técnicas de perturbação, expansão em série de Taylor e método dos vetores de sensibilidade<sup>3</sup>. Os três últimos, apesar de possuírem formulações ligeiramente diferentes, levam exatamente ao mesmo resultado final<sup>3</sup>.

A simulação de Monte Carlo direta constitui a forma mais simples e evidente para a realização de uma análise probabilística e, por isso, é largamente empregada. Neste método, as propriedades dos materiais, cargas, ou outra variável aleatória, são introduzidas por simulação digital. Uma rotina gera números aleatórios que passam a representar as variáveis do problema. Assim, utiliza-se o mesmo algoritmo para análise determinística sem nenhuma alteração significativa.

As variáveis aleatórias podem estar correlacionadas entre si, através de uma função de autocorrelação predeterminada. Isso ocorre, por exemplo, com as propriedades mecânicas do material em um corpo contínuo. A distribuição espacial é aleatória, mas a propriedade em um ponto do corpo é correlacionada com a dos outros pontos.

A geração de variáveis aleatórias autocorrelacionadas pode ser feita através da decomposição da matriz de covariância pelo método de Cholesky. Essa técnica é

empregada por Yamazaki, Shinozuka e Dasgupta<sup>21</sup> e é apresentada no Capítulo 2. Se as variáveis são altamente correlacionadas, podem surgir dificuldades numéricas na decomposição da matriz de covariância. Nesse caso, pode-se empregar o modelo ARMA<sup>13</sup> ou a decomposição espectral da matriz de covariância<sup>14,17,19</sup>.

O método de Monte Carlo tem sido usado para resolver uma série de problemas. Yamazaki et al.<sup>21</sup> empregam o método para analisar uma chapa carregada uniformemente. No estudo, a carga é considerada determinística e as propriedades do material são aleatórias.

Shinozuka e Astill<sup>16</sup> empregam simulação para calcular as propriedades estatísticas dos autovalores de uma coluna com engaste elástico. Na formulação, as propriedades das molas de engastamento e do material da coluna, bem como a força normal e a geometria, são consideradas aleatórias.

Shinozuka<sup>15</sup> faz uma análise de vigas de concreto simulando a variabilidade espacial da resistência à compressão. A superfície de ruptura bidimensional é decomposta em uma parte determinística e outra aleatória, sendo simulada para cada ponto nodal da malha de elementos finitos.

Apesar de sua versatilidade, o método de Monte Carlo apresenta o inconveniente do elevado tempo de processamento dispendido para ser alcançada a convergência estatística. Um número muito grande de simulações pode ser necessário, especialmente quando a variável aleatória de entrada possui elevado coeficiente de variação. Entretanto, esse método é estatisticamente realístico e pode ser usado para testar a validade de outras técnicas.

Uma alternativa que visa reduzir o trabalho computacional exigido pelo método Monte Carlo, é a denominada simulação com expansão de Neumann<sup>21</sup>. Neste caso, a matriz de rigidez da estrutura é dividida em uma parte determinística e outra aleatória. A matriz determinística é obtida com as propriedades médias dos materiais e é

decomposta uma única vez, no início do processamento. As simulações são realizadas para a geração da matriz aleatória. Assim, para cada simulação, somente são feitas simples substituições com a matriz média já decomposta, ao contrário do método de Monte Carlo direto onde a matriz de rigidez deve ser montada e decomposta para cada simulação.

Yamazaki<sup>21</sup> faz um estudo comparativo do tempo de processamento exigido pelo método de Monte Carlo direto e com expansão de Neumann, concluindo que essa segunda alternativa pode ser mais eficiente. Constata-se, também, que quanto maior é a ordem da expansão, maior é a proximidade das respostas obtidas com os dois métodos.

Shinozuka e Deodatis<sup>18</sup> analisam uma barra prismática carregada axialmente, empregando expansão de Neumann de primeira ordem. A carga é considerada determinística, e a variabilidade na resposta é devida à variação do módulo de elasticidade do material. Os autores concluem que, com essa ordem da expansão, os resultados são aceitáveis para pequenas variações da propriedade do material. Se o coeficiente de variação da propriedade é grande, devem ser empregadas expansões de ordem superior.

O método de Neumann, apesar de constituir um avanço em relação à simulação de Monte Carlo direta, conserva o inconveniente do grande tempo de processamento requerido para a convergência estatística.

O elevado esforço computacional exigido pelos métodos que empregam simulação, acaba por torná-los inviáveis para a solução de grandes problemas, especialmente quando se trata de análise dinâmica. Entretanto, essa é a solução estatisticamente confiável, particularmente quando a variabilidade das propriedades do material é grande.

Alternativas eficientes do ponto de vista computacional, são baseadas em expansões em série de Taylor das variáveis envolvidas no problema. Uma vez que a série deve ser truncada, normalmente nos termos de segunda ordem, a precisão da solução diminui à medida que a variabilidade

das propriedades aumenta. Para pequenas variações das propriedades, entretanto, os resultados são compatíveis com os obtidos por simulação<sup>16,21</sup>.

O método pode ser apresentado em formas alternativas, como uma técnica de perturbação ou de sensibilidade. Os resultados obtidos, entretanto, são idênticos aos da formulação em série de Taylor<sup>3</sup>.

Essas técnicas, associadas ao método dos elementos finitos, dão origem ao genericamente denominado método dos elementos finitos probabilístico. Esse é o primeiro método viável do ponto de vista computacional, tanto para análise estática quanto para análise dinâmica.

O método tem sido empregado satisfatoriamente para resolver uma série de problemas. Vanmarcke e Grigoriu<sup>20</sup> fazem uma análise de vigas com rigidez variando aleatoriamente ao longo do eixo. Baecher e Ingra<sup>1</sup> analisam recalques de fundações apoiadas em um solo cujas propriedades variam espacialmente.

Collins e Thomson<sup>4</sup> empregam uma técnica de perturbação para determinar as propriedades estatísticas dos autovalores de uma barra vibrando longitudinalmente. Lawrence<sup>6</sup> emprega o método dos elementos finitos probabilístico para analisar vigas e placas com propriedades e cargas aleatórias.

Uma apresentação detalhada do método dos elementos finitos probabilístico para análise estática e dinâmica, linear e não linear, é feita por Liu et al.<sup>9,10,11,12</sup>.

O objetivo deste trabalho é apresentar e comparar os três métodos discutidos anteriormente para análise estrutural. As técnicas baseadas em simulação somente são apresentadas para o caso de análise estática linear, em vista do elevado tempo de processamento requerido. O método dos elementos finitos probabilístico, por outro lado, é desenvolvido para uma análise completa, linear e não linear.

O trabalho é limitado ao caso de variabilidade aleatória espacial, ou seja, a campos estocásticos. Apesar da formulação permitir a consideração da variabilidade das

cargas, apenas o caso de propriedades aleatórias é testado numericamente. Problemas relativos à variação aleatória das cargas no tempo, fogem ao objetivo do trabalho.

## 2 - ANÁLISE ESTOCÁSTICA COM SIMULAÇÃO

### 2.1 - Introdução

Um campo estocástico fica definido através da média e da variância da variável aleatória e da função de autocorrelação. Como alternativa, pode-se empregar a transformada de Fourier da autocorrelação, denominada densidade espectral<sup>22</sup>.

Na discretização do campo estocástico através do método dos elementos finitos, as propriedades do material podem ser atribuídas aos pontos nodais. As funções de interpolação podem, então, ser usadas para determinar as propriedades em um ponto qualquer do elemento. Ocorre que, geralmente, as funções de interpolação admitidas no método dos elementos finitos não são consistentes com a variabilidade das propriedades do material no domínio da estrutura<sup>21</sup>. Além disso, o número de operações necessárias, especialmente no método dos elementos finitos probabilístico, seriam muito grandes se essa hipótese fosse admitida.

Assim, uma solução adequada consiste em atribuir valores às propriedades do material a nível de elemento. As propriedades são consideradas no centróide do elemento e supostas constantes no domínio do mesmo, ou seja, é admitida a homogeneidade a nível de elemento.

Essa alternativa, além de ser consistente com a formulação padrão do método dos elementos finitos, é vantajosa, uma vez que as dimensões da matriz de covariância

são reduzidas. Além disso, essa hipótese simplifica consideravelmente a solução pelo método dos elementos finitos probabilístico.

Para que as propriedades possam ser consideradas constantes, o elemento deve ser pequeno. Assim sendo, o tamanho do elemento deve ser definido em termos da precisão da solução determinística e do ponto de vista da variabilidade das propriedades<sup>21</sup>.

## 2.2 - Modelamento do campo estocástico

A variação espacial das propriedades do material, como o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, é considerada homogênea. Uma propriedade genérica  $\alpha$  é escrita na forma

$$\alpha = \alpha_0 \left[ 1 + a(\underline{x}) \right], \quad (2.1)$$

onde  $\alpha_0$  é o valor médio da propriedade, e  $a(\underline{x})$  representa as flutuações em torno da média.

A parte flutuante  $a(\underline{x})$  tem média zero, isto é,

$$E \left[ a(\underline{x}) \right] = 0, \quad (2.2)$$

e função de autocorrelação

$$R(\underline{\xi}) = E \left[ a(\underline{x}) a(\underline{x} + \underline{\xi}) \right] \quad (2.3)$$

onde  $\underline{x}$  é o vetor posição de um ponto do corpo e  $\underline{\xi}$  é o vetor separação entre dois pontos  $\underline{x}$  e  $\underline{x} + \underline{\xi}$ .

O símbolo  $E[ ]$  é usado para representar o valor esperado.

Se a variação espacial da propriedade é isotrópica, a função de autocorrelação depende apenas da distância  $|\underline{\xi}|$

entre os dois pontos.

A função de autocorrelação adotada é dada por<sup>24</sup>

$$R(\xi) = \sigma^2 e^{-\left(\frac{|\xi|}{d}\right)^2} \quad (2.4)$$

onde  $d$  é a escala de correlação e  $\sigma$  é o desvio padrão da variável aleatória  $a(\underline{x})$ .

Deste modo, o desvio padrão de  $a(\underline{x})$  representa o coeficiente de variação da propriedade, ou seja,

$$\sigma = \frac{\sigma_\alpha}{\alpha_0} = v_\alpha, \quad (2.5)$$

onde  $\sigma_\alpha$  é o desvio padrão da propriedade.

Como já foi salientado, o tamanho do elemento finito deve ser pequeno para assegurar que as propriedades sejam constantes no mesmo. Assim, se existem  $n$  elementos na malha significa que existem  $n$  valores da propriedade associados a esses elementos.

Desta maneira, os  $n$  valores  $a_i = a(\underline{x}_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ , são aleatórios com média zero mas correlacionados, onde  $\underline{x}_i$  é a localização do centróide do elemento  $i$ .

As características de correlação podem ser especificadas em termos da matriz de covariância, cuja componente genérica é dada por

$$E_{ij} = \text{Cov}[a_i, a_j] = E[a_i a_j] = R(\xi_{ij}), \quad (2.6)$$

onde  $\xi_{ij} = |\underline{x}_j - \underline{x}_i|$  é a distância entre os centróides dos elementos  $i$  e  $j$ .

Um vetor  $\underline{a} = \{a_1, \dots, a_n\}^T$  de variáveis aleatórias com média zero e covariância  $E_{ij}$  pode ser gerado como

$$\underline{a} = \underline{L} \underline{Z} \quad , \quad (2.7)$$

onde  $\underline{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}^T$  é um vetor de  $n$  variáveis aleatórias Gaussianas não correlacionadas com média zero e desvio padrão unitário, e  $\underline{L}$  é uma matriz triangular inferior obtida pela decomposição de Cholesky da matriz de covariância.

Como as variáveis  $\underline{Z}$  não são correlacionadas, verifica-se que

$$E[\underline{Z} \underline{Z}^T] = \underline{I} \quad (2.8)$$

onde  $\underline{I}$  é a matriz identidade.

Então

$$E[\underline{a} \underline{a}^T] = E\left[\left(\underline{L} \underline{Z}\right) \left(\underline{L} \underline{Z}\right)^T\right] = \underline{L} E[\underline{Z} \underline{Z}^T] \underline{L}^T \quad (2.9)$$

e introduzindo (2.8) chega-se a

$$E[\underline{a} \underline{a}^T] = \underline{L} \underline{L}^T \quad (2.10)$$

Como  $\underline{L} \underline{L}^T$  é igual a matriz de covariância, conclui-se que as variáveis geradas a partir da equação (2.7), são correlacionadas de acordo com a função de autocorrelação dada.

Assim, essa técnica pode ser usada para a simulação de um campo estocástico.

A hipótese de distribuição Gaussiana implica na possibilidade de geração de valores negativos para a propriedade, como se observa da equação (2.1). Então, os valores da variável aleatória  $a(x)$  são limitados ao intervalo

$$- 0,95 \leq a \leq 0,95 \quad , \quad (2.11)$$

onde o limite superior é introduzido para manter a simetria da distribuição<sup>21</sup>.

Se, após a simulação, resultar algum valor de "a" fora do intervalo definido por (2.11), o campo estocástico é desprezado e nova simulação é realizada.

Deve ser notado que a matriz de covariância é decomposta uma única vez, e as amostras simuladas se diferenciam pelos vetores  $\underline{Z}$  que vão sendo gerados. As componentes desses vetores são obtidas como exposto a seguir.

Seja  $r$  um número gerado aleatoriamente no intervalo  $[0,1]$  com uma distribuição uniforme. Então,  $r$  pode ser visto como a probabilidade acumulada  $Q$  da variável aleatória Gaussiana  $Z$ , isto é,

$$r = Q(Z) = \int_{-\infty}^Z p(Z) dz, \quad (2.12)$$

onde  $p(Z)$  é a função densidade de probabilidade normal.

Para encontrar o valor de  $Z$ , pode-se empregar o método de Newton-Raphson na forma recursiva

$$Z_{i+1} = Z_i + \frac{r - Q_i}{p_i}, \quad (2.13)$$

onde  $Q_i = Q(Z_i)$ ,  $p_i = p(Z_i)$  e  $i$  representa a ciclo iterativo.

Se as variáveis  $\underline{a}$  são altamente correlacionadas, a decomposição da matriz de covariância poderá ficar prejudicada e, neste caso, pode-se recorrer a um dos métodos citados no Capítulo 1.

A geração dos números aleatórios "r" é feita com uma subrotina apresentada por Gordon<sup>7</sup>.

### 2.3 - Simulação de Monte Carlo direta

Tendo definido o campo estocástico, o método de Monte Carlo direto passa a usar a mesma formulação determinística do método dos elementos finitos. Para cada amostra simulada é montada a matriz de rigidez global da estrutura  $\underline{K}$ , e resolvido o sistema de equações

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{U} , \quad (2.14)$$

onde  $\underline{F}$  e  $\underline{U}$  são os vetores de cargas e deslocamentos nodais.

Observa-se, que para cada amostra, é necessário montar e decompor a matriz de rigidez, o que leva a um alto custo computacional.

Encontrados os deslocamentos nodais, calculam-se as deformações e as tensões por

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{U} , \quad (2.15)$$

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} , \quad (2.16)$$

onde  $\underline{B}$  é a matriz que relaciona deformações e deslocamentos nodais, e  $\underline{D}$  é a matriz de constantes elásticas.

O valor esperado  $E[\underline{U}]$  dos deslocamentos nodais é estimado por

$$E[\underline{U}] \cong \bar{\underline{U}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_s} \underline{U}^i}{N_s} , \quad (2.17)$$

onde  $N_s$  é o número de simulações realizadas.

A matriz de covariância dos deslocamentos é dada por

$$\text{Cov}[\underline{U}, \underline{U}] \cong \frac{\sum_{i=1}^{N_s} (\underline{U}^i - \bar{\underline{U}})(\underline{U}^i - \bar{\underline{U}})^T}{N_s}, \quad (2.18)$$

e o vetor variância é a diagonal de  $\text{Cov}[\underline{U}, \underline{U}]$ .

De maneira análoga, podem ser calculadas as estatísticas das deformações e das tensões.

#### 2.4 - Expansão de Neumann

Conforme visto na seção anterior, no método de Monte Carlo direto, a matriz de rigidez necessita ser montada e decomposta para cada amostra simulada. Uma alternativa que evita essa decomposição é baseada na expansão de Neumann da matriz de rigidez.

A matriz de rigidez global  $\underline{K}$  é desmembrada em duas parcelas na forma

$$\underline{K} = \underline{K}_0 + \Delta\underline{K}, \quad (2.19)$$

onde  $\underline{K}_0$  é a matriz de rigidez obtida com os valores médios das propriedades, e  $\Delta\underline{K}$  representa a parte desviadora da média.

A expansão de Neumann de  $\underline{K}^{-1}$  toma a forma<sup>21</sup>

$$\underline{K}^{-1} = (\underline{K}_0 + \Delta\underline{K})^{-1} = (\underline{I} - \underline{P} + \underline{P}^2 - \underline{P}^3 + \dots) \underline{K}_0^{-1} \quad (2.20)$$

onde  $\underline{P} = \underline{K}_0^{-1} \Delta\underline{K}$  e  $\underline{I}$  é a matriz identidade.

Então, os deslocamentos nodais  $\underline{U}$  são obtidos por

$$\underline{U} = \underline{K}^{-1} \underline{F} = (\underline{I} - \underline{P} + \underline{P}^2 - \underline{P}^3 + \dots) \underline{K}_0^{-1} \underline{F} \quad (2.21)$$

A solução  $\underline{U}_0$  correspondente a  $\underline{K}_0$  é

$$\underline{\underline{U}}_0 = \underline{\underline{K}}_0^{-1} \underline{\underline{F}}, \quad (2.22)$$

de forma que os deslocamentos nodais são dados pela série

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}_0 - \underline{\underline{P}}\underline{\underline{U}}_0 + \underline{\underline{P}}^2\underline{\underline{U}}_0 - \underline{\underline{P}}^3\underline{\underline{U}}_0 \dots \quad (2.23)$$

A equação (2.23) pode ser escrita na forma

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}_0 - \underline{\underline{U}}_1 + \underline{\underline{U}}_2 - \underline{\underline{U}}_3 + \dots, \quad (2.24)$$

onde

$$\underline{\underline{U}}_1 = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{U}}_0, \underline{\underline{U}}_2 = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{U}}_1, \dots \quad (2.25)$$

Assim, o termo genérico da série,  $\underline{\underline{U}}_i$ , é dado por

$$\underline{\underline{U}}_i = \underline{\underline{P}}\underline{\underline{U}}_{i-1} \quad (2.26)$$

e introduzindo a expressão de  $\underline{\underline{P}}$  resulta,

$$\underline{\underline{U}}_i = \underline{\underline{K}}_0^{-1} (\Delta \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}}_{i-1}), \quad i=1, \dots \quad (2.27)$$

Dessa forma, a equação (2.22) é empregada para a obtenção da resposta determinística, e a equação (2.27) é usada iterativamente até a ordem desejada.

Observa-se, que apenas a matriz  $\underline{\underline{K}}_0$  é decomposta, e isto é feito uma única vez. Assim, as simulações são empregadas para redefinir apenas a parte flutuante  $\Delta \underline{\underline{K}}$  da matriz de rigidez. O produto  $\Delta \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}}_{i-1}$  é feito levando-se em conta que  $\Delta \underline{\underline{K}}$  é bandada, e o processo deverá ser mais eficiente que o método de Monte Carlo direto.

Entretanto, se o coeficiente de variação da propriedade é grande, poderá ser necessário reter muitos termos na série e o método voltará a apresentar os inconvenientes da simulação direta.

Uma vez determinados os deslocamentos, deformações e tensões, podem ser avaliados os valores esperados e as variâncias de forma idêntica ao apresentado para o método de Monte Carlo.

### 3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PROBABILÍSTICO

#### 3.1 - Considerações gerais

No capítulo anterior foram apresentadas as técnicas para análise estrutural estocástica baseadas em simulações. Essas técnicas, apesar de serem muito simples, têm o inconveniente do elevado esforço computacional requerido para a convergência estatística.

Uma alternativa que permite resolver o problema sem simulações, consiste na expansão em série de Taylor das grandezas aleatórias envolvidas. Evidentemente, a série deve ser truncada e a solução obtida será aproximada. Entretanto, se a variação das propriedades é pequena, poucos termos na série serão suficientes para garantir a precisão. Devido ao grande número de operações efetuadas e da alta taxa de ocupação da memória, as expansões são limitadas aos termos de segunda ordem.

Formulações alternativas são baseadas em técnicas de perturbação e de sensibilidade que, entretanto, levam ao mesmo resultado obtido com série de Taylor. O método dos elementos finitos associado a essas técnicas é denominado genericamente de método dos elementos finitos probabilístico.

Neste capítulo, o método é apresentado para análise estática e dinâmica, linear e não linear. No capítulo 4 é feita a comparação dos resultados obtidos com o método e com as técnicas de simulação.

### 3.2 - Análise estática linear

O sistema de equações de equilíbrio para uma estrutura elástica linear submetida a cargas estáticas, é dado por

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}}, \quad (3.1)$$

onde  $\underline{\underline{F}}$  e  $\underline{\underline{U}}$  representam os vetores de cargas e de deslocamentos nodais, respectivamente, e  $\underline{\underline{K}}$  é a matriz de rigidez da estrutura.

Se as propriedades apresentam variações aleatórias em torno do valor médio, a matriz de rigidez pode ser expandida em série de Taylor até os termos de segunda ordem como

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{\underline{K}}_{\sim i} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\underline{K}}_{\sim ij} a_i a_j, \quad (3.2)$$

onde os  $a_i$  são variáveis aleatórias com média zero e autocorrelacionadas, conforme apresentado no capítulo 2, e  $\underline{\underline{K}}_0$  é a matriz de rigidez avaliada com as propriedades médias.

Além disso,

$$\underline{\underline{K}}_{\sim i} = \left( \frac{\partial \underline{\underline{K}}}{\partial a_i} \right)_{\underline{\underline{a}}=0} \quad (3.3)$$

$$\underline{\underline{K}}_{\sim ij} = \left( \frac{\partial^2 \underline{\underline{K}}}{\partial a_i \partial a_j} \right)_{\underline{\underline{a}}=0} \quad (3.4)$$

De maneira análoga, as cargas podem apresentar variações aleatórias em torno da média  $\underline{\underline{F}}_0$ , e a expansão de segunda ordem toma a forma

$$\tilde{F} = \tilde{F}_o + \sum_{i=1}^n \tilde{F}_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{F}_{ij} a_i a_j \quad (3.5)$$

Com isso, os deslocamentos nodais  $\tilde{U}$  também apresentarão flutuações em torno do valor médio  $\tilde{U}_o$  e podem ser expandidos como

$$\tilde{U} = \tilde{U}_o + \sum_{i=1}^n \tilde{U}_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{U}_{ij} a_i a_j \quad (3.6)$$

Introduzindo (3.2), (3.5) e (3.6) no sistema de equações (3.1) e fazendo  $\tilde{a} = \tilde{0}$  resulta

$$\tilde{F}_o = \tilde{K}_o \tilde{U}_o, \quad (3.7)$$

que representa as equações de equilíbrio determinísticas, das quais se obtém os deslocamentos  $\tilde{U}_o$ .

Diferenciando a equação (3.1) em relação a  $a_i$  e fazendo  $\tilde{a} = \tilde{0}$  chega-se a

$$\tilde{F}_i = \tilde{K}_i \tilde{U}_o + \tilde{K}_o \tilde{U}_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.8)$$

ou

$$\tilde{F}_i^* = \tilde{K}_o \tilde{U}_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.9)$$

onde

$$\tilde{F}_i^* = \tilde{F}_i - \tilde{K}_i \tilde{U}_o. \quad (3.10)$$

As equações (3.9) permitem determinar os deslocamentos  $\tilde{U}_i$ .

Diferenciando a equação (3.1) em relação a  $a_i$  e  $a_j$  e fazendo  $\tilde{a} = \tilde{0}$  resulta

$$\tilde{F}_{ij} = K_{ij} U_o + K_i U_j + K_j U_i + K_o \tilde{U}_{ij} \quad (3.11)$$

ou

$$\tilde{F}_{ij}^* = K_o \tilde{U}_{ij}; \quad i=1, \dots, n \quad e \quad j=1, \dots, n, \quad (3.12)$$

$$\tilde{F}_{ij}^* = \tilde{F}_{ij} - K_{ij} U_o - K_i U_j - K_j U_i. \quad (3.13)$$

As equações (3.12) permitem determinar os deslocamentos  $\tilde{U}_{ij}$ .

Observa-se, que apenas a matriz  $K_o$  necessita ser decomposta e isto é feito uma única vez.

De maneira análoga à equação (3.6), os deslocamentos nodais de um elemento genérico e podem ser escritos na forma

$$\tilde{U}^e = \tilde{U}_o^e + \sum_{i=1}^n \tilde{U}_i^e a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{U}_{ij}^e a_i a_j, \quad (3.14)$$

onde  $\tilde{U}_o^e$ ,  $\tilde{U}_i^e$  e  $\tilde{U}_{ij}^e$  são subvetores apropriados de  $\tilde{U}_o$ ,  $\tilde{U}_i$  e  $\tilde{U}_{ij}$ , respectivamente.

As deformações  $\tilde{\varepsilon}^e$  em um ponto do elemento são dadas por

$$\tilde{\varepsilon}^e = \tilde{B}^e \tilde{U}^e, \quad (3.15)$$

onde  $\tilde{B}^e$  é a matriz que relaciona deformações e deslocamentos.

Introduzindo (3.14) em (3.15) chega-se a

$$\tilde{\varepsilon}^e = \tilde{\varepsilon}_o^e + \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i^e a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{\varepsilon}_{ij}^e a_i a_j, \quad (3.16)$$

onde

$$\underline{\underline{\sigma}}_0^e = \underline{\underline{B}}^e \underline{\underline{U}}_0^e \quad (3.17)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_i^e = \underline{\underline{B}}^e \underline{\underline{U}}_i^e \quad (3.18)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{ij}^e = \underline{\underline{B}}^e \underline{\underline{U}}_{ij}^e \quad (3.19)$$

A matriz constitutiva  $\underline{\underline{D}}^e$  do elemento é expandida na forma

$$\underline{\underline{D}}^e = \underline{\underline{D}}_0^e + \sum_{i=1}^n \underline{\underline{D}}_i^e a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\underline{D}}_{ij}^e a_i a_j, \quad (3.20)$$

onde  $\underline{\underline{D}}_0^e$  é a matriz constitutiva avaliada com as propriedades médias e

$$\underline{\underline{D}}_i^e = \left[ \frac{\partial \underline{\underline{D}}^e}{\partial a_i} \right]_{\underline{\underline{a}}=0} \quad (3.21)$$

$$\underline{\underline{D}}_{ij}^e = \left[ \frac{\partial^2 \underline{\underline{D}}^e}{\partial a_i \partial a_j} \right]_{\underline{\underline{a}}=0} \quad (3.22)$$

As tensões  $\underline{\underline{\sigma}}^e$  em um ponto do elemento são obtidas por

$$\underline{\underline{\sigma}}^e = \underline{\underline{D}}^e \underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (3.23)$$

Introduzindo (3.16) e (3.20) em (3.23) chega-se a

$$\underline{\underline{\sigma}}^e = \underline{\underline{\sigma}}_0^e + \sum_{i=1}^n \underline{\underline{\sigma}}_i^e a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\underline{\sigma}}_{ij}^e a_i a_j, \quad (3.24)$$

onde

$$\underline{\sigma}_o^{\circ} = \underline{D}_o^{\circ} \underline{\varepsilon}_o^{\circ}, \quad (3.25)$$

$$\underline{\sigma}_i^{\circ} = \underline{D}_i^{\circ} \underline{\varepsilon}_o^{\circ} + \underline{D}_o^{\circ} \underline{\varepsilon}_i^{\circ}, \quad (3.26)$$

$$\underline{\sigma}_{ij}^{\circ} = \underline{D}_{ij}^{\circ} \underline{\varepsilon}_o^{\circ} + \underline{D}_i^{\circ} \underline{\varepsilon}_j^{\circ} + \underline{D}_j^{\circ} \underline{\varepsilon}_i^{\circ} + \underline{D}_o^{\circ} \underline{\varepsilon}_{ij}^{\circ}, \quad (3.27)$$

por semelhança com a equação (3.1).

A partir da equação (3.6), pode-se determinar a esperança dos deslocamentos nodais como

$$E[\underline{U}] = \underline{U}_o + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{U}_{ij} E_{ij}, \quad (3.28)$$

onde  $E_{ij}$  é a componente da matriz de covariância dada na equação (2.6).

De maneira análoga são determinadas as esperanças das deformações e tensões por

$$E[\underline{\varepsilon}^{\circ}] = \underline{\varepsilon}_o^{\circ} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\varepsilon}_{ij}^{\circ} E_{ij}, \quad (3.29)$$

$$E[\underline{\sigma}^{\circ}] = \underline{\sigma}_o^{\circ} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\sigma}_{ij}^{\circ} E_{ij}. \quad (3.30)$$

As matrizes de covariância dos deslocamentos, deformações e tensões são dadas por

$$\begin{aligned} \text{Cov} [ \underline{U}, \underline{U} ] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{U}_i \underline{U}_j^T E_{ij} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \underline{U}_{ij} \underline{U}_{kl}^T (E_{il} E_{jk} + E_{ik} E_{jl}), \quad (3.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov} [ \underline{\varepsilon}^{\circ}, \underline{\varepsilon}^{\circ} ] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\varepsilon}_i^{\circ} \underline{\varepsilon}_j^{\circ T} E_{ij} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \underline{\varepsilon}_{ij}^{\circ} \underline{\varepsilon}_{kl}^{\circ T} (E_{il} E_{jk} + E_{ik} E_{jl}), \quad (3.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov} [ \underline{\sigma}^{\circ}, \underline{\sigma}^{\circ} ] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\sigma}_i^{\circ} \underline{\sigma}_j^{\circ T} E_{ij} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \underline{\sigma}_{ij}^{\circ} \underline{\sigma}_{kl}^{\circ T} (E_{il} E_{jk} + E_{ik} E_{jl}), \quad (3.33) \end{aligned}$$

As expressões para as covariâncias são obtidas considerando as relações

$$E_{ijk} = 0 \quad (3.34)$$

$$E_{ijkl} = E_{ij} E_{kl} + E_{il} E_{jk} + E_{ik} E_{jl}, \quad (3.35)$$

que são válidas para variáveis aleatórias Gaussianas.

A formulação apresentada até aqui é desenvolvida por Yamazaki et al.<sup>21</sup> e fornece os valores esperados e covariâncias, consistentes com a expansão de segunda ordem.

Entretanto, a disponibilidade de memória requerida para armazenar os termos de segunda ordem pode inviabilizar o método, especialmente em problemas que envolvem muitos graus de liberdade. Além disso, as somas quádruplas que aparecem nas expressões das covariâncias tornam o custo computacional muito elevado.

Uma solução eficiente é apresentada por Liu et al.<sup>10</sup> e é adotada no presente trabalho. Nessa formulação, os valores esperados são consistentes com a expansão de segunda ordem, mas as covariâncias são de primeira ordem.

Multiplicando ambos os termos da equação (3.12) por  $\frac{1}{2} E_{ij}$  e somando para  $i$  e  $j$  de 1 a  $n$  chega-se a

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_{ij}^* E_{ij} = K_o \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij} E_{ij} \right] \quad (3.36)$$

A equação (3.36) é da forma

$$\bar{F}_2 = K_o \bar{U}_2 \quad , \quad (3.37)$$

onde

$$\bar{F}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (F_{ij} - K_o U_o - 2K_o U_j) E_{ij} \quad ; \quad (3.38)$$

$$\bar{U}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n U_{ij} E_{ij} \quad (3.39)$$

Resolvida a equação (3.37), verifica-se que a esperança de  $\underline{U}$  é dada por

$$E [\underline{U}] = \underline{U}_o + \bar{\underline{U}}_2 . \quad (3.40)$$

Dessa forma, não há a necessidade de armazenar os termos de segunda ordem da expansão.

A aproximação de primeira ordem da matriz de covariância dos deslocamentos é dada por

$$\text{Cov} [\underline{U}, \underline{U}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{U}_i \underline{U}_j^T E_{ij} \quad (3.41)$$

Assim, para encontrar as estatísticas dos deslocamentos, deve-se resolver uma vez a equação (3.7),  $n$  vezes a equação (3.9) e uma vez a equação (3.37). Mesmo com essa simplificação, ainda restam  $n+2$  sistemas de equações que devem ser resolvidos.

Uma alternativa para reduzir o tamanho do problema, consiste em transformar a matriz de covariância  $E_{ij}$  em uma matriz diagonal<sup>10</sup>. Para isso, é necessário resolver um problema de autovalores análogo a análise modal em dinâmica estrutural. Neste trabalho, essa solução não é adotada, de forma que as estatísticas dos deslocamentos são avaliadas através das equações (3.40) e (3.41).

Introduzindo (3.19) e (3.39) em (3.29) verifica-se que

$$E [\underline{\varepsilon}^\circ] = \underline{\varepsilon}_o^\circ + \underline{B}^\circ \bar{\underline{U}}_2^\circ , \quad (3.42)$$

onde  $\bar{\underline{U}}_2^\circ$  é o subvetor apropriado de  $\bar{\underline{U}}_2$ .

A aproximação de primeira ordem para a covariância das deformações é dada por

$$\text{Cov} [\underline{\varepsilon}^\circ, \underline{\varepsilon}^\circ] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\varepsilon}_i^\circ \underline{\varepsilon}_j^\circ{}^T E_{ij} \quad (3.43)$$

Resolvida a equação (3.37), verifica-se que a esperança de  $\underline{U}$  é dada por

$$E [\underline{U}] = \underline{U}_0 + \bar{\underline{U}}_2 . \quad (3.40)$$

Dessa forma, não há a necessidade de armazenar os termos de segunda ordem da expansão.

A aproximação de primeira ordem da matriz de covariância dos deslocamentos é dada por

$$\text{Cov} [\underline{U}, \underline{U}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{U}_i \underline{U}_j^T E_{ij} \quad (3.41)$$

Assim, para encontrar as estatísticas dos deslocamentos, deve-se resolver uma vez a equação (3.7),  $n$  vezes a equação (3.9) e uma vez a equação (3.37). Mesmo com essa simplificação, ainda restam  $n+2$  sistemas de equações que devem ser resolvidos.

Uma alternativa para reduzir o tamanho do problema, consiste em transformar a matriz de covariância  $E_{ij}$  em uma matriz diagonal<sup>10</sup>. Para isso, é necessário resolver um problema de autovalores análogo a análise modal em dinâmica estrutural. Neste trabalho, essa solução não é adotada, de forma que as estatísticas dos deslocamentos são avaliadas através das equações (3.40) e (3.41).

Introduzindo (3.19) e (3.39) em (3.29) verifica-se que

$$E [\underline{\varepsilon}^{\circ}] = \underline{\varepsilon}_0^{\circ} + \underline{B}^{\circ} \bar{\underline{U}}_2^{\circ} , \quad (3.42)$$

onde  $\bar{\underline{U}}_2^{\circ}$  é o subvetor apropriado de  $\bar{\underline{U}}_2$ .

A aproximação de primeira ordem para a covariância das deformações é dada por

$$\text{Cov} [\underline{\varepsilon}^{\circ}, \underline{\varepsilon}^{\circ}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\varepsilon}_i^{\circ} \underline{\varepsilon}_j^{\circ T} E_{ij} \quad (3.43)$$

De maneira análoga, pode-se mostrar que a esperança das tensões é dada por

$$E[\underline{\sigma}^e] = \underline{D}_o^e E[\underline{\varepsilon}^e] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (2D_{ij}^e \varepsilon_j^e + D_{ij}^e \varepsilon_o^e) E_{ij}, \quad (3.44)$$

e a aproximação de primeira ordem para a covariância é

$$\text{Cov}[\underline{\sigma}^e, \underline{\sigma}^e] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i^e \sigma_j^{eT} E_{ij} \quad (3.45)$$

Se apenas uma propriedade varia aleatoriamente dentro do elemento, das equações (3.21) e (3.22) verifica-se que

$$\underline{D}_i^e = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq e \\ \underline{D}_e^e, & \text{se } i = e \end{cases}; \quad (3.46)$$

$$\underline{D}_{ij}^e = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq e \text{ ou } j \neq e \\ \underline{D}_{ee}^e, & \text{se } i = j = e \end{cases}. \quad (3.47)$$

Nesse caso, a equação (3.44) toma a forma

$$E[\underline{\sigma}^e] = \underline{D}_o^e E[\underline{\varepsilon}^e] + \sum_{j=1}^n \underline{D}_{e\cdot j}^e \varepsilon_j^e E_{\cdot j} + \frac{1}{2} \underline{D}_{ee}^e \varepsilon_o^e E_{ee}. \quad (3.48)$$

Além disso, as tensões  $\sigma_i^e$  são dadas por

$$\sigma_i^e = \begin{cases} \underline{D}_{oi}^e \varepsilon_i^e, & \text{se } i \neq e \\ \underline{D}_{oi}^e \varepsilon_i^e + \underline{D}_{eo}^e \varepsilon_o^e, & \text{se } i = e \end{cases} \quad (3.49)$$

### 3.3 - Análise dinâmica linear

As equações do movimento da estrutura discretizada são dadas por

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{C}}\underline{\underline{V}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{U}} \quad (3.50)$$

onde  $\underline{\underline{F}}$  é o vetor de cargas nodais;

$\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{V}}$  e  $\underline{\underline{U}}$  são vetores de acelerações, velocidades e deslocamentos nodais, respectivamente;

$\underline{\underline{M}}$ ,  $\underline{\underline{C}}$  e  $\underline{\underline{K}}$  são matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

Seguindo o processo apresentado na seção anterior, as expansões em série de Taylor tomam a forma

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{\underline{F}}_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\underline{F}}_{ij} a_i a_j, \quad (3.51)$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{\underline{A}}_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\underline{A}}_{ij} a_i a_j, \quad (3.52)$$

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{\underline{V}}_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\underline{V}}_{ij} a_i a_j, \quad (3.53)$$

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{\underline{U}}_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{\underline{U}}_{ij} a_i a_j, \quad (3.54)$$

$$\tilde{C} = \tilde{C}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{C}_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{C}_{ij} a_i a_j, \quad (3.55)$$

$$\tilde{K} = \tilde{K}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{K}_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{K}_{ij} a_i a_j, \quad (3.56)$$

e é admitido que a matriz de massa é determinística.

Introduzindo as expansões na equação (3.50) e fazendo  $\tilde{a} = \tilde{0}$  chega-se a

$$\tilde{F}_0 = \tilde{M} \tilde{A}_0 + \tilde{C}_0 \tilde{V}_0 + \tilde{K}_0 \tilde{U}_0 \quad (3.57)$$

que representa as equações determinísticas do movimento.

Diferenciando a equação (3.50) em relação a  $a_i$  e fazendo  $\tilde{a} = \tilde{0}$  resulta

$$\tilde{F}_i^* = \tilde{M} \tilde{A}_i + \tilde{C}_0 \tilde{V}_i + \tilde{K}_0 \tilde{U}_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.58)$$

onde

$$\tilde{F}_i^* = \tilde{F}_i - \tilde{C}_i \tilde{V}_0 - \tilde{K}_i \tilde{U}_0. \quad (3.59)$$

Diferenciando a equação (3.50) em relação a  $a_i$  e  $a_j$ , fazendo  $\tilde{a} = \tilde{0}$ , multiplicando ambos os termos por  $\frac{1}{2} E_{ij}$  e somando para  $i$  e  $j$  de 1 a  $n$ , chega-se a

$$\tilde{F}_2 = \tilde{M} \tilde{A}_2 + \tilde{C}_0 \tilde{V}_2 + \tilde{K}_0 \tilde{U}_2, \quad (3.60)$$

onde

$$\tilde{F}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\tilde{F}_{ij} - \tilde{C}_{ij} \tilde{V}_0 - \tilde{K}_{ij} \tilde{U}_0 - 2\tilde{C}_{ij} \tilde{V}_0 - 2\tilde{K}_{ij} \tilde{U}_0) E_{ij} \quad (3.61)$$

$$\bar{\underline{A}}_{\sim 2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{A}_{\sim ij} E_{ij} \quad , \quad (3.62)$$

$$\bar{\underline{V}}_{\sim 2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{V}_{\sim ij} E_{ij} \quad , \quad (3.63)$$

$$\bar{\underline{U}}_{\sim 2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{U}_{\sim ij} E_{ij} \quad . \quad (3.64)$$

As equações (3.57), (3.58) e (3.60) são integradas no tempo e, para cada instante, são avaliadas as estatísticas dos deslocamentos, velocidades e acelerações por

$$E[\underline{U}] = \underline{U}_o + \bar{\underline{U}}_{\sim 2} \quad (3.65)$$

$$E[\underline{V}] = \underline{V}_o + \bar{\underline{V}}_{\sim 2} \quad (3.66)$$

$$E[\underline{A}] = \underline{A}_o + \bar{\underline{A}}_{\sim 2} \quad (3.67)$$

$$\text{Cov}[\underline{U}, \underline{U}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{U}_{\sim i} \underline{U}_{\sim j}^T E_{ij} \quad (3.68)$$

$$\text{Cov}[\underline{V}, \underline{V}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underline{V}_{\sim i} \underline{V}_{\sim j}^T E_{ij} \quad (3.69)$$

$$\text{Cov} [ \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A} ] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \underset{\sim}{A}_i \underset{\sim}{A}_j^T E_{ij} \quad (3.70)$$

As estatísticas das deformações e tensões são obtidas da forma apresentada na seção anterior.

No presente trabalho, as integrações no tempo são efetuadas com o emprego do método de Newmark conforme apresentado por Bathe<sup>2</sup>.

Adotando amortecimento de Rayleigh tem-se

$$\underset{\sim}{C} = \gamma \underset{\sim}{M} + \beta \underset{\sim}{K} \quad , \quad (3.71)$$

e, em vista das equações (3.55) e (3.56), chega-se a

$$\underset{\sim}{C}_o = \gamma \underset{\sim}{M} + \beta \underset{\sim}{K}_o \quad , \quad (3.72)$$

$$\underset{\sim}{C}_i = \beta \underset{\sim}{K}_i \quad , \quad (3.73)$$

$$\underset{\sim}{C}_{ij} = \beta \underset{\sim}{K}_{ij} \quad . \quad (3.74)$$

### 3.4 - Análise estática não linear

Neste caso, o carregamento é aplicado em incrementos iguais a  $\Delta F$  de maneira que, em uma etapa de carga  $m$ , a carga total atuando na estrutura é  $F^m$ .

A equação de equilíbrio estático na etapa  $m$  é dada por

$$F^m = f(\underset{\sim}{U}^m), \quad (3.75)$$

onde  $f(\underset{\sim}{U}^m)$  é o vetor de forças internas incluindo as não linearidades física e geométrica, e  $\underset{\sim}{U}^m$  representa os deslocamentos na configuração de equilíbrio.

Em termos incrementais a equação (3.75) toma a forma

$$\Delta \tilde{F} = \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{U}} \right]_{\tilde{U}=\tilde{U}^m} \Delta \tilde{U} \quad (3.76)$$

Por definição, o termo entre parênteses representa a matriz de rigidez tangente da estrutura,  $K_{\tilde{t}}^m$ , avaliada com os deslocamentos  $\tilde{U}^m$ .

Logo, a equação incremental é

$$\Delta \tilde{F} = K_{\tilde{t}}^m \Delta \tilde{U} \quad (3.77)$$

Observa-se que esta equação é semelhante à (3.1) para o caso linear, com a diferença que a matriz  $K$  é substituída pela matriz tangente  $K_{\tilde{t}}^m$  e que agora trabalha-se com incrementos.

Assim, as equações obtidas para o caso linear podem ser empregadas em forma incremental, resultando

$$\Delta \tilde{F}_{\tilde{o}} = K_{\tilde{t}_o}^m \Delta \tilde{U}_{\tilde{o}}, \quad (3.78)$$

$$\Delta \tilde{F}_{\tilde{i}}^* = K_{\tilde{t}_o}^m \Delta \tilde{U}_{\tilde{i}}, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.79)$$

com

$$\Delta \tilde{F}_{\tilde{i}}^* = \Delta \tilde{F}_{\tilde{i}} - K_{\tilde{t}_i}^m \Delta \tilde{U}_{\tilde{o}}, \quad (3.80)$$

$$\Delta \tilde{F}_{\tilde{2}} = K_{\tilde{t}_o}^m \Delta \tilde{U}_{\tilde{2}}, \quad (3.81)$$

onde

$$\Delta \tilde{F}_{\tilde{2}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\Delta \tilde{F}_{\tilde{ij}} - K_{\tilde{t}_{ij}}^m \Delta \tilde{U}_{\tilde{o}} - 2K_{\tilde{t}_i}^m \Delta \tilde{U}_{\tilde{j}}) E_{ij}. \quad (3.82)$$

Deve-se observar que a matriz tangente  $K_{\sim t_0}^m$  deve ser obtida com os deslocamentos médios  $U_{\sim 0}^m$ . Entretanto, no início da etapa de carga, o que se conhece é o vetor de deslocamentos  $U_{\sim 0}^{m-1}$  para as cargas  $F_{\sim 0}^{m-1}$ . Assim, a equação (3.78) deve ser resolvida iterativamente como se segue.

Com os deslocamentos  $U_{\sim 0}^{m-1}$  monta-se a matriz tangente  $K_{\sim t_0}^{m-1}$  e emprega-se o método de Newton-Raphson para encontrar  $\Delta U_{\sim 0}$ . Inicialmente, resolve-se o sistema

$$\Delta F_{\sim 0} = K_{\sim t_0}^{m-1} \Delta U_{\sim 0}^1 \quad (3.83)$$

Com  $\Delta U_{\sim 0}^1$  avalia-se o incremento  $\Delta f_{\sim 0}$  nas forças internas e calcula-se o vetor de desequilíbrio  $\psi$  por

$$\psi = \Delta F_{\sim 0} - \Delta f_{\sim 0} \quad (3.84)$$

Em uma iteração genérica  $i$  deve-se resolver

$$\psi = K_{\sim t_0}^{m-1} \Delta U_{\sim 0}^i \quad (3.85)$$

e o incremento  $\Delta U_{\sim 0}$  acumulado até essa iteração é

$$\Delta U_{\sim 0} = \sum_{j=1}^i \Delta U_{\sim 0}^j \quad (3.86)$$

Com  $\Delta U_{\sim 0}$  avalia-se  $\Delta f_{\sim 0}$  e repete-se o processo até a convergência.

O incremento nas forças internas é dado por

$$\Delta f_{\sim 0} = \sum_{e=1}^n \int_{V_e} B_e^T \Delta \sigma^e dv \quad (3.87)$$

onde  $\Delta \underline{\sigma}^{\circ}$  é o incremento de tensões incluindo as não linearidades, e  $n$  é o número de elementos na estrutura<sup>29</sup>.

Se a não linearidade geométrica for considerada, a matriz  $\underline{B}^{\circ}$  será função dos deslocamentos atualizados na iteração corrente.

Encontrado o incremento  $\Delta \underline{U}_o$ , atualiza-se o vetor de deslocamentos nodais para

$$\underline{U}_o^m = \underline{U}_o^{m-1} + \Delta \underline{U}_o \quad (3.88)$$

Com os deslocamentos  $\underline{U}_o^m$ , é redefinida a matriz de rigidez tangente  $\underline{K}_{t_o}^m$ . Agora, as equações (3.79) e (3.81) são resolvidas diretamente, sem iterações, já que  $\underline{K}_{t_o}^m$  é a matriz tangente atualizada.

Uma vez resolvidas as equações (3.78), (3.79) e (3.81) em uma dada etapa de carga, as estatísticas dos deslocamentos, deformações e tensões são obtidas conforme apresentado na seção 3.2.

### 3.5 - Análise dinâmica não linear

As equações do movimento em forma incremental são dadas por

$$\Delta \underline{F} = \underline{M} \Delta \underline{A} + \underline{C}_{t_m}^m \Delta \underline{V} + \underline{K}_{t_m}^m \Delta \underline{U} \quad (3.89)$$

onde  $\underline{C}_{t_m}^m$  e  $\underline{K}_{t_m}^m$  são as matrizes de amortecimento e de rigidez tangentes avaliadas no instante  $t_m$ , respectivamente.

Na equação (3.89),  $\Delta \underline{F}$ ,  $\Delta \underline{A}$ ,  $\Delta \underline{V}$  e  $\Delta \underline{U}$ , representam os incrementos de cargas, acelerações, velocidades e deslocamentos na passagem do instante  $t_{m-1}$  ao instante  $t_m$ .

Comparando as equações (3.89) e (3.50), verifica-se que os sistemas a serem resolvidos são dados por

$$\Delta \bar{F}_{\sim 0} = M \Delta \bar{A}_{\sim 0} + C_{\sim to}^m \Delta \bar{V}_{\sim 0} + K_{\sim to}^m \Delta \bar{U}_{\sim 0}, \quad (3.90)$$

$$\Delta F_{\sim i}^* = M \Delta A_{\sim i} + C_{\sim to}^m \Delta V_{\sim i} + K_{\sim to}^m \Delta U_{\sim i}, \quad i=1, \dots, n, \quad (3.91)$$

com

$$\Delta F_{\sim i}^* = \Delta F_{\sim i} - C_{\sim ti}^m \Delta V_{\sim 0} - K_{\sim ti}^m \Delta U_{\sim 0}, \quad (3.92)$$

$$\Delta \bar{F}_{\sim 2} = M \Delta \bar{A}_{\sim 2} + C_{\sim to}^m \Delta \bar{V}_{\sim 2} + K_{\sim to}^m \Delta \bar{U}_{\sim 2}, \quad (3.93)$$

com

$$\Delta \bar{F}_{\sim 2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ( \Delta F_{\sim ij} - C_{\sim tij}^m \Delta V_{\sim 0} - K_{\sim tij}^m \Delta U_{\sim 0} - 2C_{\sim tij}^m \Delta V_{\sim j} - 2K_{\sim tij}^m \Delta U_{\sim j} ) E_{ij} \quad (3.94)$$

As matrizes tangentes  $C_{\sim to}^m$  e  $K_{\sim to}^m$  devem ser avaliadas no instante  $t_m$ . Como essas matrizes só são conhecidas no instante  $t_{m-1}$ , a equação (3.90) deve ser resolvida iterativamente empregando o método de Newton-Raphson.

Adotando o método de Newmark com coeficientes de estabilização iguais a 0,5 e 0,25, tem-se<sup>2</sup>

$$\Delta V_{\sim 0} = \alpha_1 \Delta U_{\sim 0} - 2V_{\sim 0}^{m-1} \quad (3.95)$$

$$\Delta A_{\sim 0} = \alpha_0 \Delta U_{\sim 0} - 2\alpha_1 V_{\sim 0}^{m-1} - 2A_{\sim 0}^{m-1} \quad (3.96)$$

onde

$$\alpha_0 = \frac{4}{\Delta t^2}, \quad (3.97)$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{\Delta t}, \quad (3.98)$$

sendo  $\Delta t$  o tamanho do intervalo de tempo.

Introduzindo (3.95) e (3.96) na equação (3.90) e substituindo  $C_{\sim to}^m$  e  $K_{\sim to}^m$  por  $C_{\sim to}^{m-1}$  e  $K_{\sim to}^{m-1}$  resulta

$$\Delta \tilde{F}_{\tilde{o}}^* = K_{\tilde{o}}^* \Delta \tilde{U}_{\tilde{o}}, \quad (3.99)$$

onde

$$K_{\tilde{o}}^* = K_{\tilde{t}_o}^{m-1} + \alpha_o M + \alpha_1 C_{\tilde{t}_o}^{m-1}, \quad (3.100)$$

$$\Delta \tilde{F}_{\tilde{o}}^* = \Delta \tilde{F}_{\tilde{o}} + 2M (\alpha_1 \tilde{V}_{\tilde{o}}^{m-1} + A_{\tilde{o}}^{m-1}) + 2C_{\tilde{t}_o}^{m-1} \tilde{V}_{\tilde{o}}^{m-1}. \quad (3.101)$$

A equação (3.99) é resolvida iterativamente da mesma forma apresentada para o caso de análise estática.

Entretanto, o vetor de desequilíbrio em uma iteração genérica  $i$  é dado por

$$\psi = \Delta \tilde{F}_{\tilde{o}}^* - \Delta \tilde{f}_{\tilde{o}} - \alpha_o M \Delta \tilde{U}_{\tilde{o}} - \alpha_1 C_{\tilde{t}_o}^{m-1} \Delta \tilde{U}_{\tilde{o}}, \quad (3.102)$$

onde  $\Delta \tilde{U}_{\tilde{o}}$  é o incremento dos deslocamentos acumulado até essa iteração e dado por (3.86).

No cálculo do vetor de desequilíbrio é admitido que a matriz de amortecimento se mantém constante no passo de tempo.

Uma vez alcançada a convergência, os deslocamentos, velocidades e acelerações são atualizados na forma

$$\tilde{U}_{\tilde{o}}^m = \tilde{U}_{\tilde{o}}^{m-1} + \Delta \tilde{U}_{\tilde{o}}, \quad (3.103)$$

$$\tilde{V}_{\tilde{o}}^m = \tilde{V}_{\tilde{o}}^{m-1} + \Delta \tilde{V}_{\tilde{o}}, \quad (3.104)$$

$$\tilde{A}_{\tilde{o}}^m = \tilde{A}_{\tilde{o}}^{m-1} + \Delta \tilde{A}_{\tilde{o}}. \quad (3.105)$$

Com os deslocamentos atualizados são redefinidas as matrizes de rigidez,  $K_{\tilde{t}_o}^m$ , e de amortecimento,  $C_{\tilde{t}_o}^m$ . Agora, as expressões (3.91) e (3.93) podem ser integradas no tempo, sem iterações, resolvendo equações semelhantes a (3.99).

Adotando amortecimento de Rayleigh tem-se

$$C_{\sim t_0}^{m-1} = \gamma M + \beta K_{\sim t_0}^{m-1}, \quad (3.106)$$

e as expressões (3.100) a (3.102) tomam a forma

$$K_{\sim o}^* = (1 + \beta \alpha_1) K_{\sim t_0}^{m-1} + (\alpha_0 + \gamma \alpha_1) M \quad (3.107)$$

$$\Delta F_{\sim o}^* = \Delta F_{\sim o} + 2M \left[ (\alpha_1 + \gamma) V_{\sim o}^{m-1} + A_{\sim o}^{m-1} \right] + 2\beta K_{\sim t_0}^{m-1} V_{\sim o}^{m-1} \quad (3.108)$$

$$\psi = \Delta F_{\sim o}^* - \Delta f_{\sim o} - (\alpha_0 + \gamma \alpha_1) M \Delta U - \beta \alpha_1 K_{\sim t_0}^{m-1} \Delta U \quad (3.109)$$

Uma vez resolvidas as equações para um dado passo de tempo, as estatísticas desejadas são obtidas da forma apresentada na seção 3.3.

## 4. ANÁLISE NUMÉRICA

### 4.1 - Definição do Problema

Neste capítulo, os métodos apresentados anteriormente são testados e comparados quanto aos aspectos da confiabilidade da resposta e da eficiência computacional. Os métodos que empregam simulações somente são testados em análise estática linear, devido ao grande esforço computacional requerido. O método dos elementos finitos probabilístico é testado em análise estática e dinâmica, linear e não linear.

A estrutura analisada é uma viga biapoiada, submetida a duas cargas concentradas e equidistantes dos apoios, conforme indicado na figura 4.1.

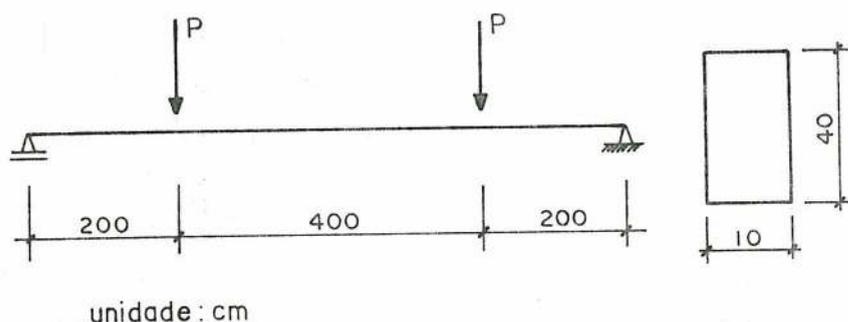


Figura 4.1. - Geometria da viga

Na análise, a metade da viga é discretizada em 40 elementos isoparamétricos de oito nós para estado plano de tensões<sup>2a</sup>, conforme indicado na figura 4.2.

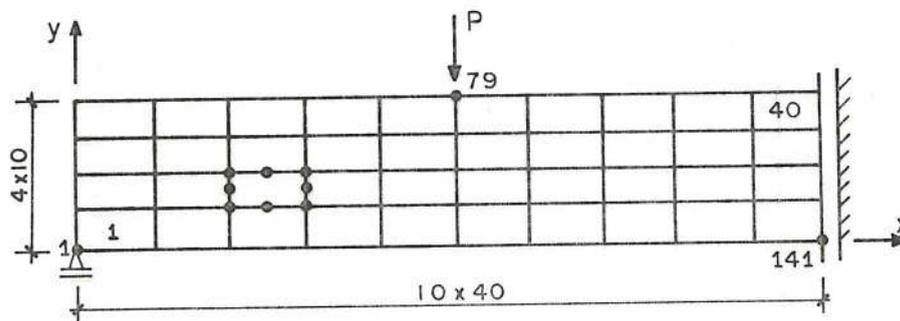


Figura 4.2 - Malha de elementos finitos

Os resultados analisados referem-se ao deslocamento transversal  $W$ , a deformação longitudinal  $\varepsilon_x$  e a tensão normal  $\sigma_x$  no nó 141. Na análise dinâmica apresenta-se também, a velocidade de vibração transversal,  $v$ , do nó 141.

Na geração do campo estocástico, o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , é considerado determinístico e igual a 0,2. O módulo de elasticidade é a única propriedade aleatória considerada. A análise é feita para um valor médio do módulo igual a  $E_0 = 30.000$  MPa e para três valores do coeficiente de variação  $V_E = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Para a escala de autocorrelação, definida na equação (2.4), adota-se o valor de 80 cm. Com isso, pode-se admitir que os elementos são pequenos, já que a dimensão do maior lado é apenas igual à metade da escala de autocorrelação<sup>21</sup>.

As cargas são consideradas determinísticas.

#### 4.2 - Modelo constitutivo linear

No emprego do método dos elementos finitos probabilístico, torna-se necessário determinar a matriz constitutiva média e suas expansões de primeira e segunda ordens, conforme apresentado no Capítulo 3.

Para o caso elástico linear isotrópico a matriz constitutiva média é dada por<sup>23</sup>

$$\tilde{D}_o^L = \frac{E_o}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ \text{simétrica} & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Como apenas uma propriedade varia aleatoriamente dentro do elemento, as componentes  $\tilde{D}_i$  e  $\tilde{D}_{ij}$  são obtidas a partir das equações (3.46) e (3.47). Ao ser considerada a equação (2.1), conclui-se que

$$\tilde{D}_i = \tilde{D}_o \quad ; \quad (4.2)$$

$$\tilde{D}_{ij} = 0 \quad . \quad (4.3)$$

Conforme se verifica a partir das equações (3.3) e (3.4), a componente  $\tilde{K}_{ij}$  da matriz de rigidez é nula e a componente  $\tilde{K}_i$  é uma matriz que só recebe contribuição do elemento  $i$ .

#### 4.3 - Modelo constitutivo não linear

O modelo constitutivo não linear adotado nos exemplos, é baseado na formulação proposta por Darwin e Pecknold<sup>5</sup>. Neste caso, o material é considerado ortotrópico com os eixos de ortotropia coincidentes com as direções das tensões principais.

A matriz constitutiva tangente, no sistema principal, é dada por<sup>5</sup>

$$\tilde{D}_o^L = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu \sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ & E_2 & 0 \\ \text{simétrica} & & G_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são os módulos tangentes nas duas direções e

$$G_{12} = \frac{1}{4} ( E_1 + E_2 - 2\nu \sqrt{E_1 E_2} ) \quad (4.5)$$

A matriz constitutiva no sistema cartesiano global é obtida por

$$\underline{\underline{D}}_o = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{D}}_o^L \underline{\underline{R}}^T, \quad (4.6)$$

onde  $\underline{\underline{R}}$  é a matriz de rotação.

Na presente análise, admite-se que as direções das tensões e das deformações principais são coincidentes. Além disso, o material é considerado elástico não linear e a não linearidade geométrica não é incluída.

O módulo tangente  $E_i$ , em uma direção  $i$ , é obtido de uma relação tensão - deformação unidimensional. Na análise numérica realizada, considera-se a título de ilustração, que o material obedece a equação proposta por Desayi e Krishnan<sup>6</sup> para o concreto, em compressão. A mesma equação será usada para tração.

A relação tensão-deformação unidimensional adotada é representada na figura 4.3

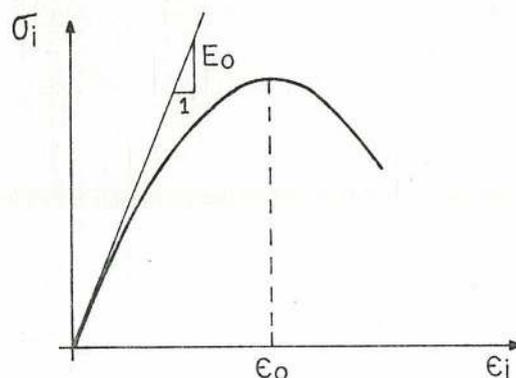


Figura 4.3 - Relação tensão-deformação unidimensional

A equação unidimensional é dada por

$$\sigma_i = \frac{E_o \varepsilon_i}{1 + \eta_i^2} \quad (4.7)$$

onde  $\eta_i = \varepsilon_i / \varepsilon_o$ .

Para  $\varepsilon_o$  adota-se o valor 0,004.

O módulo tangente  $E_i$  é dado por

$$E_i = E_o \left( \frac{1 - \eta_i^2}{1 + \eta_i^2} \right) \quad (4.8)$$

e o módulo secante  $E_{si}$  é

$$E_{si} = \frac{E_o}{1 + \eta_i^2} \quad (4.9)$$

Dadas as deformações principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , as tensões principais são obtidas por

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} E_{s1} & \nu \sqrt{E_{s1} E_{s2}} \\ \nu \sqrt{E_{s1} E_{s2}} & E_{s2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Uma rotação das tensões principais leva às tensões cartesianas globais, com as quais são avaliadas as forças internas não lineares.

As demais observações feitas para o caso linear se aplicam na íntegra para o caso não linear.

#### 4.4 - Estudo comparativo dos métodos probabilísticos

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos com os três métodos apresentados para o caso estático linear. Na análise, a carga  $P$  atuante na viga, Figura 4.1, foi considerada igual a 100 kN.

Nas figuras 4.4 a 4.8 são apresentados os resultados obtidos com simulação de Monte Carlo direta até um total de 500 amostras. Nessas figuras, encontra-se representada a evolução do valor esperado e do desvio padrão da resposta com o aumento do número de simulações. São considerados três valores para o coeficiente de variação do módulo de elasticidade.

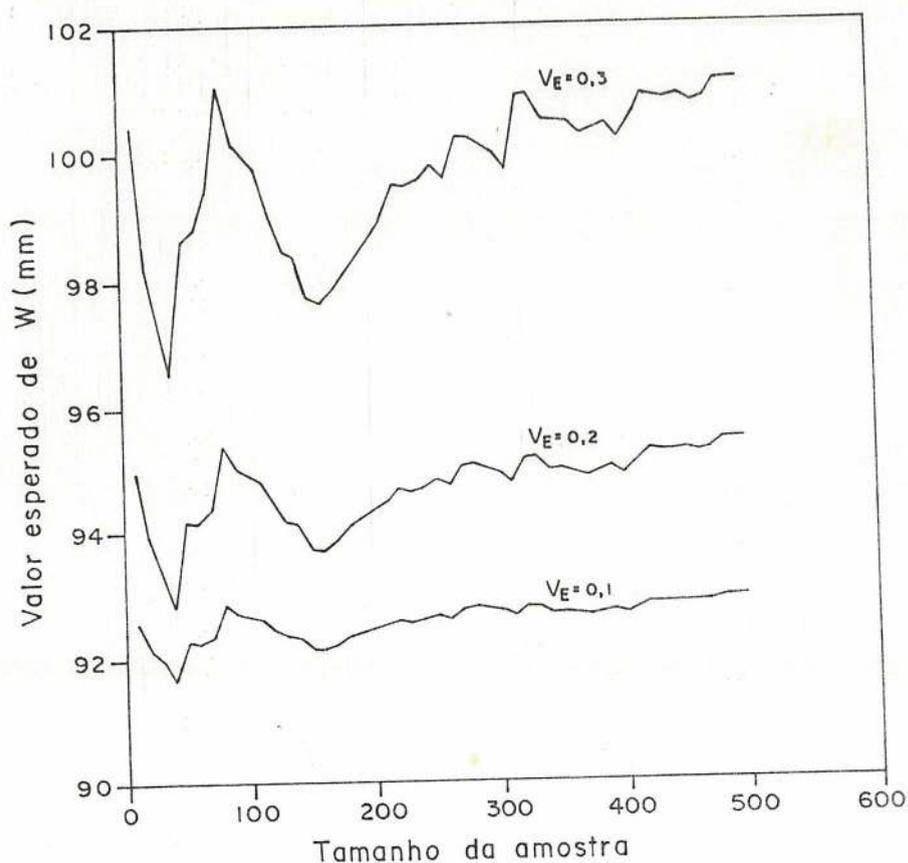


Figura 4.4 - Valor esperado de  $W$

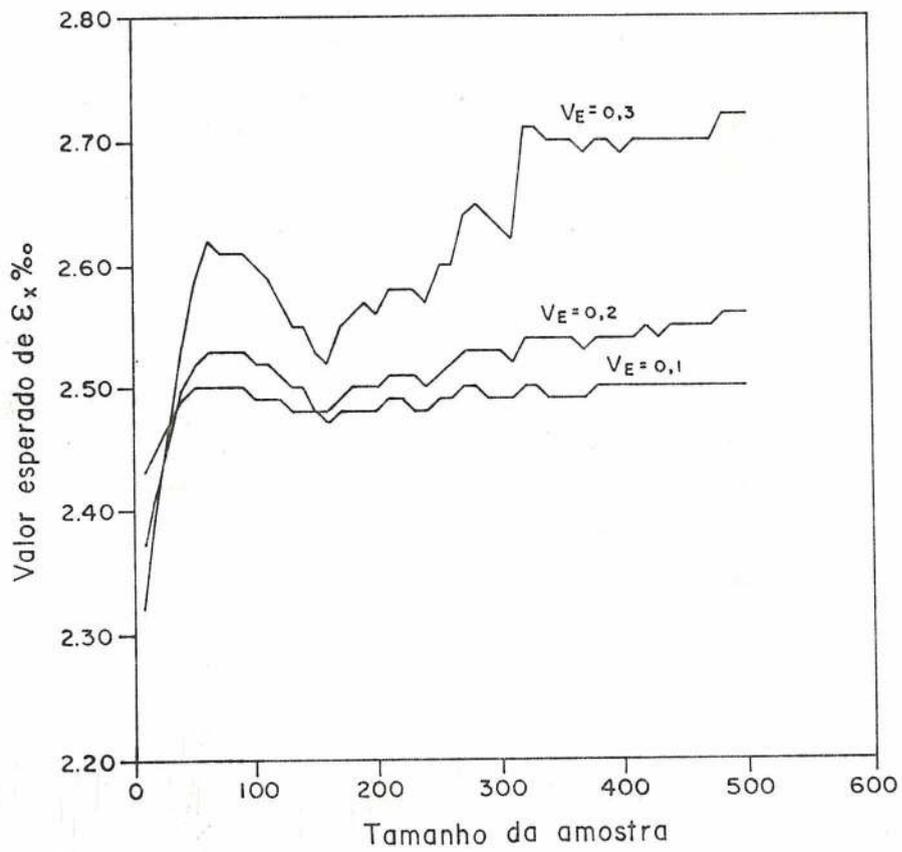


Figura 4.5 - Valor esperado de  $\varepsilon_x$

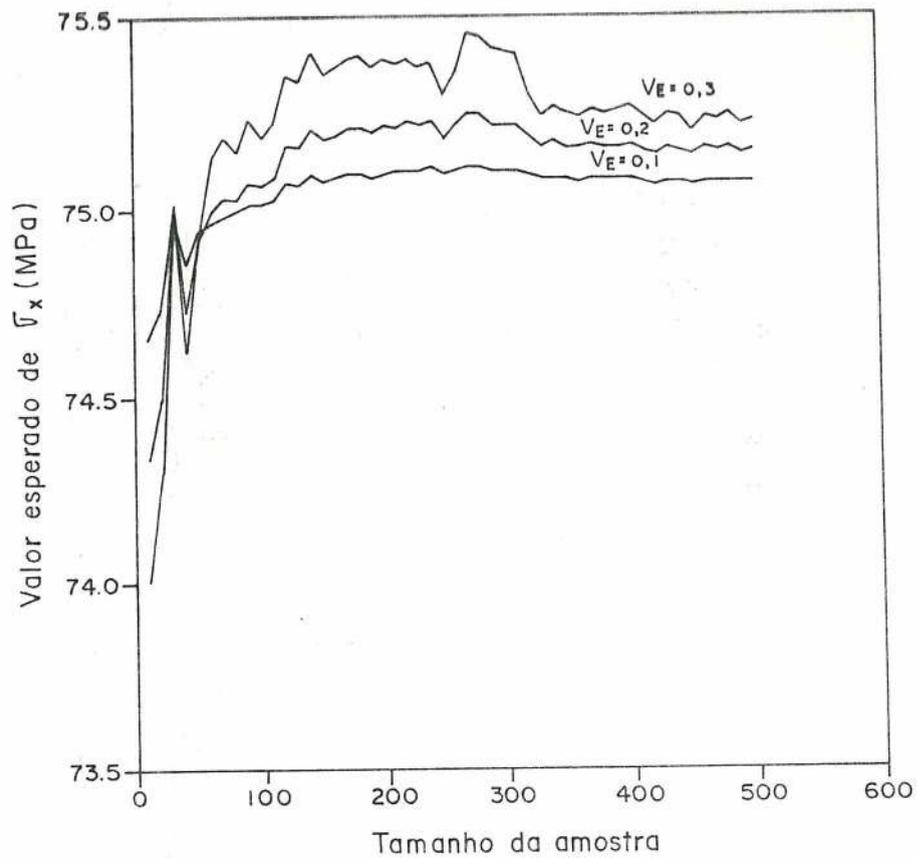


Figura 4.6 - Valor esperado de  $\sigma_x$

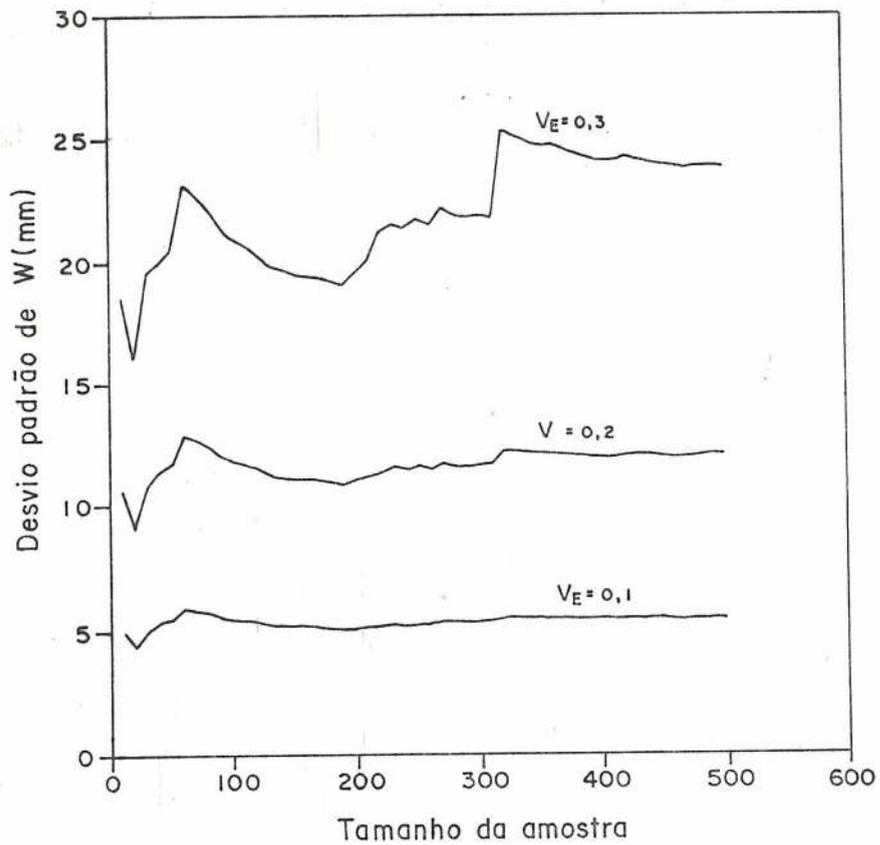


Figura 4.7 - Desvio padrão de  $W$

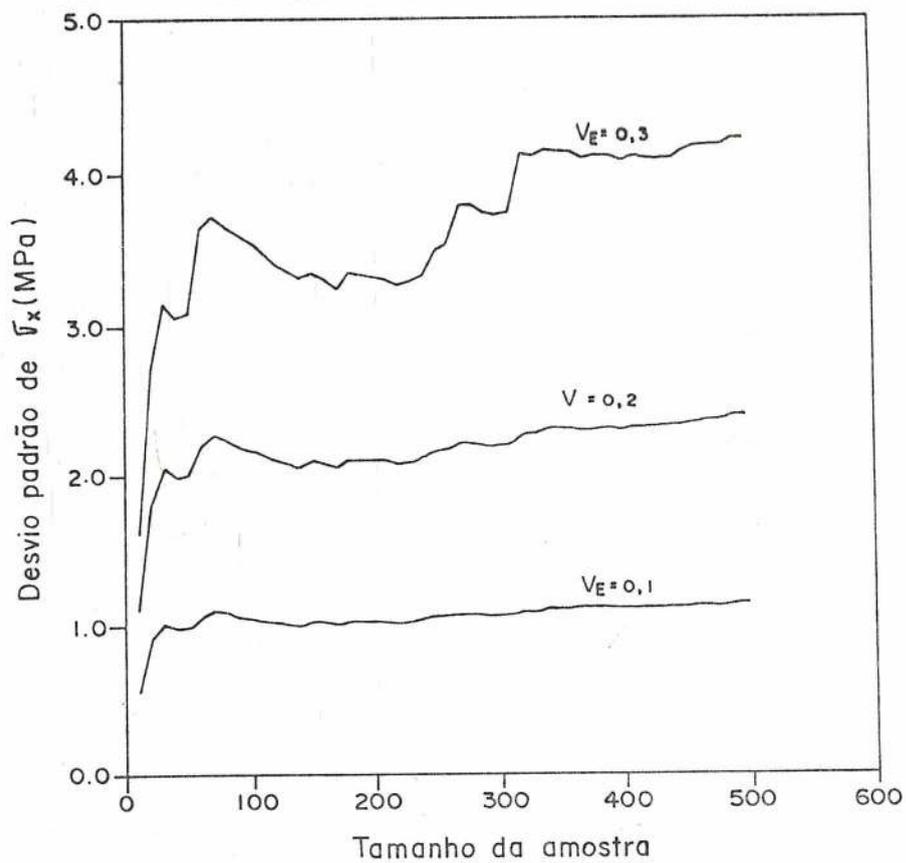


Figura 4.8 - Desvio padrão de  $\sigma_x$

Observando as figuras anteriores, conclui-se que o número de simulações é suficiente para a convergência estatística quando o coeficiente de variação da propriedade é pequeno,  $V_E \leq 0,2$ . Para  $V_E = 0,3$ , entretanto, a convergência não é alcançada, o que indica que mais simulações devem ser realizadas. Conclui-se ainda que o valor esperado e o desvio padrão da resposta aumentam com o crescimento do coeficiente de variação da propriedade.

Nas figuras 4.9 a 4.14, encontram-se representadas as respostas obtidas com o método de Neumann para diversas ordens da expansão. Nas mesmas figuras, são apresentadas as soluções pelo método dos elementos finitos probabilístico, expansão em série de Taylor, de primeira e segunda ordens. Os resultados atribuídos ao método de Monte Carlo são aqueles correspondentes a 500 simulações. Nessas figuras, o coeficiente de variação do módulo de elasticidade foi fixado em  $V_E = 0,3$ .

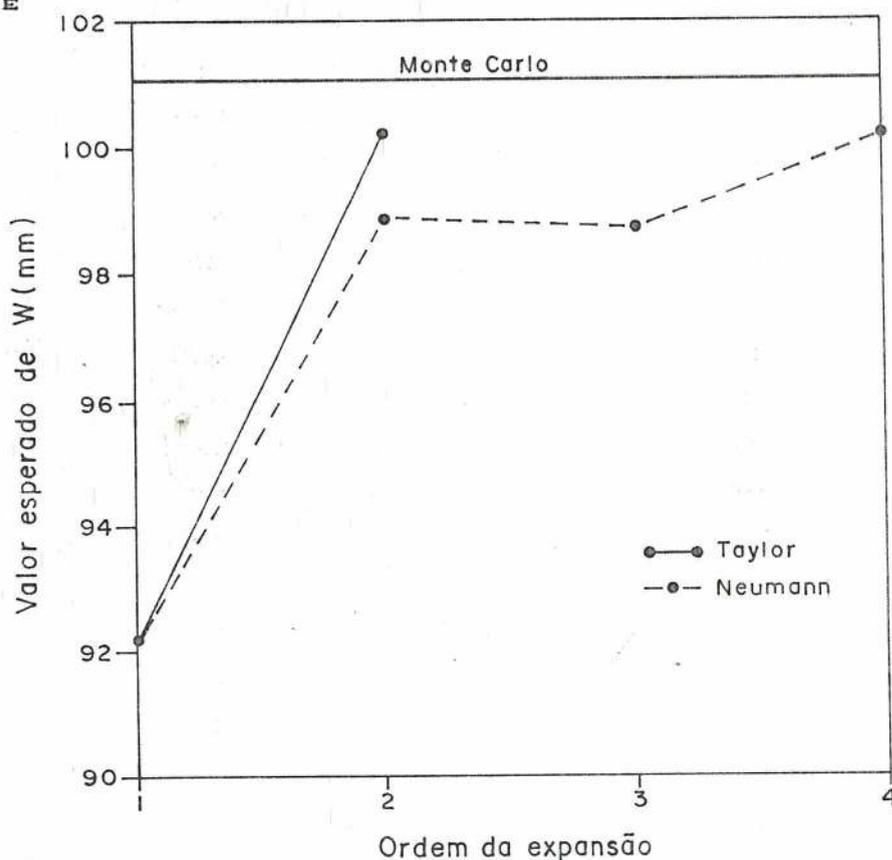


Figura 4.9 - Valor esperado de W

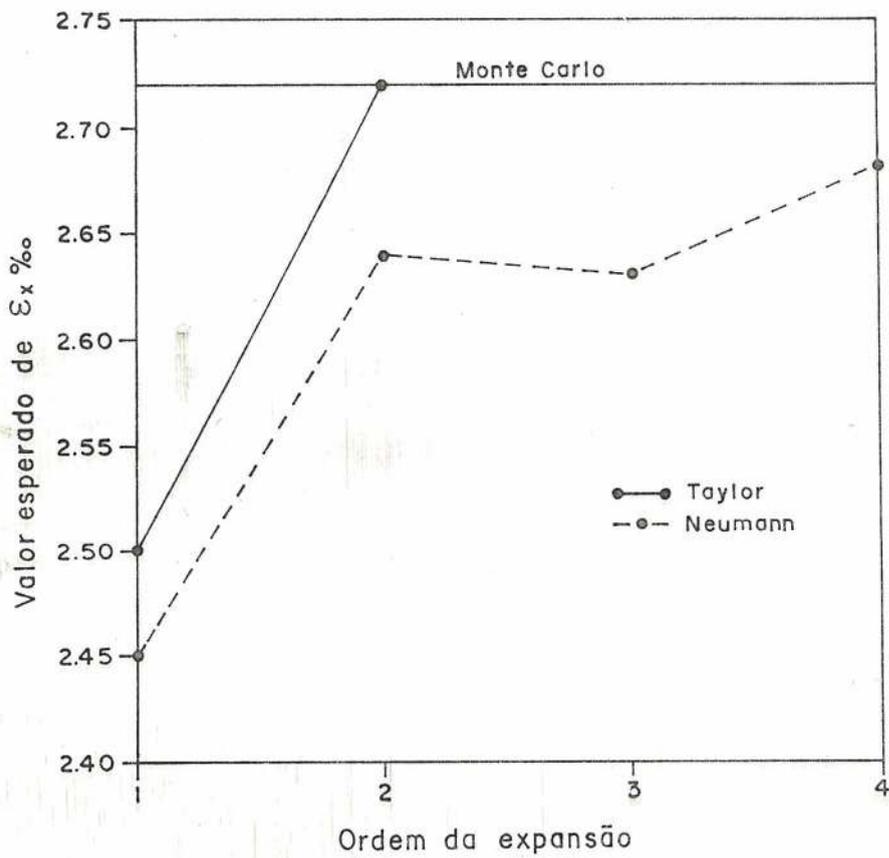


Figura 4.10 - Valor esperado de  $\epsilon_x$

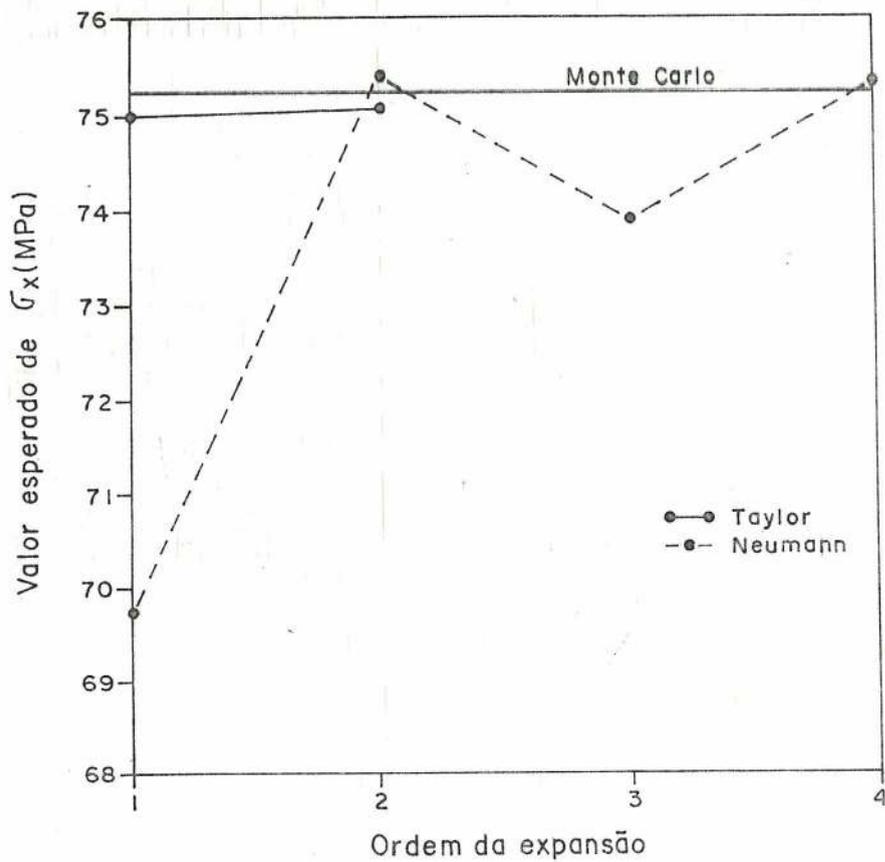
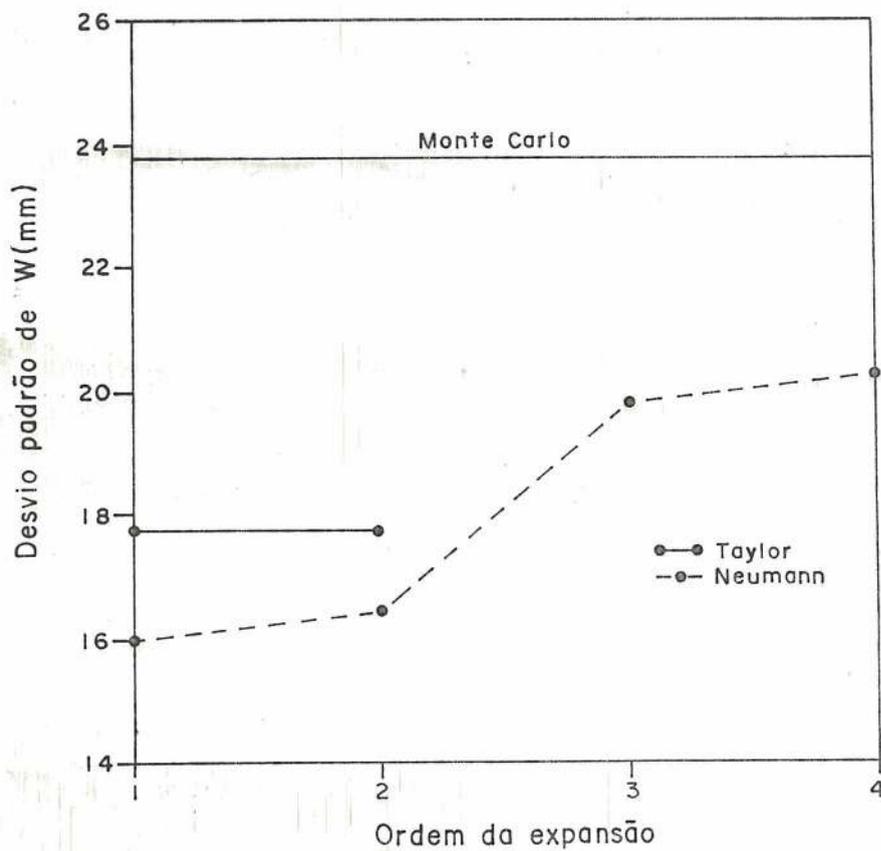
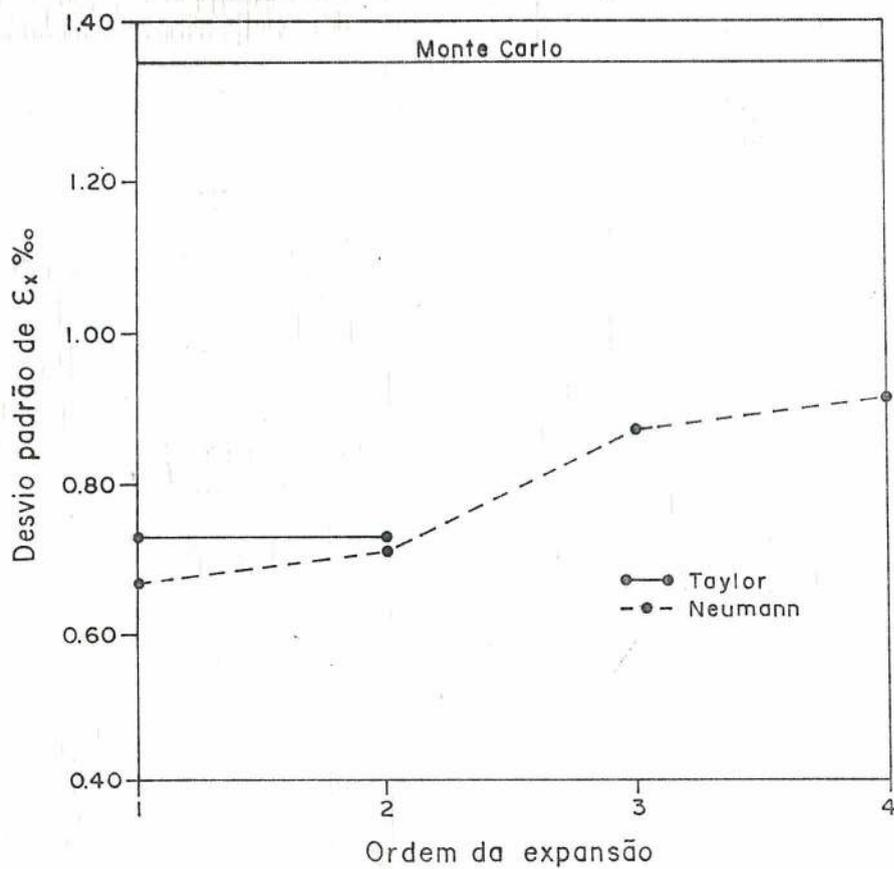


Figura 4.11 - Valor esperado de  $\sigma_x$

Figura 4.12 - Desvio padrão de  $W$ Figura 4.13 - Desvio padrão de  $\epsilon_x$

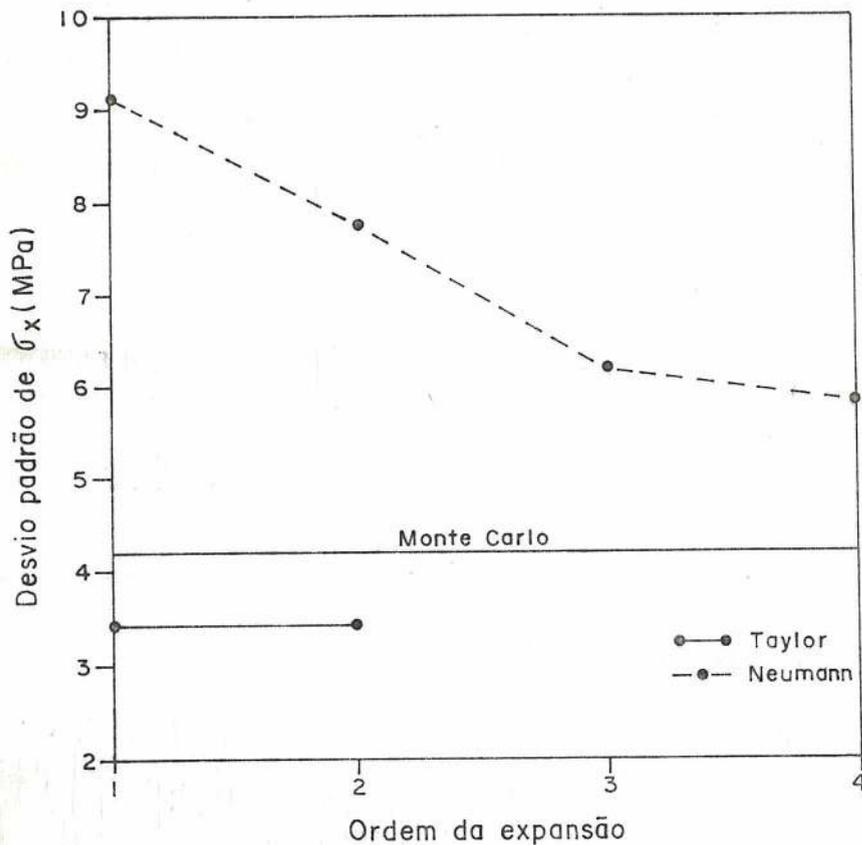


Figura 4.14 - Desvio padrão de  $\sigma_x$

Analisando os resultados, conclui-se que com o crescimento da ordem da expansão, a solução obtida com o método de Neumann se aproxima da encontrada através de simulação direta.

Verifica-se, também, que o método dos elementos finitos probabilístico de segunda ordem fornece excelentes resultados para os valores esperados. Neste caso, o método é sensivelmente superior à técnica de expansão de Neumann. O desvio padrão da resposta, entretanto, não é satisfatório, pois a aproximação da covariância é de primeira ordem e a variação da propriedade é grande,  $V_E = 0,3$ .

Nas figuras 4.15 e 4.16 são apresentadas as relações entre os valores esperados e o coeficiente de variação da propriedade, obtidas com série de Taylor e através de simulação direta.

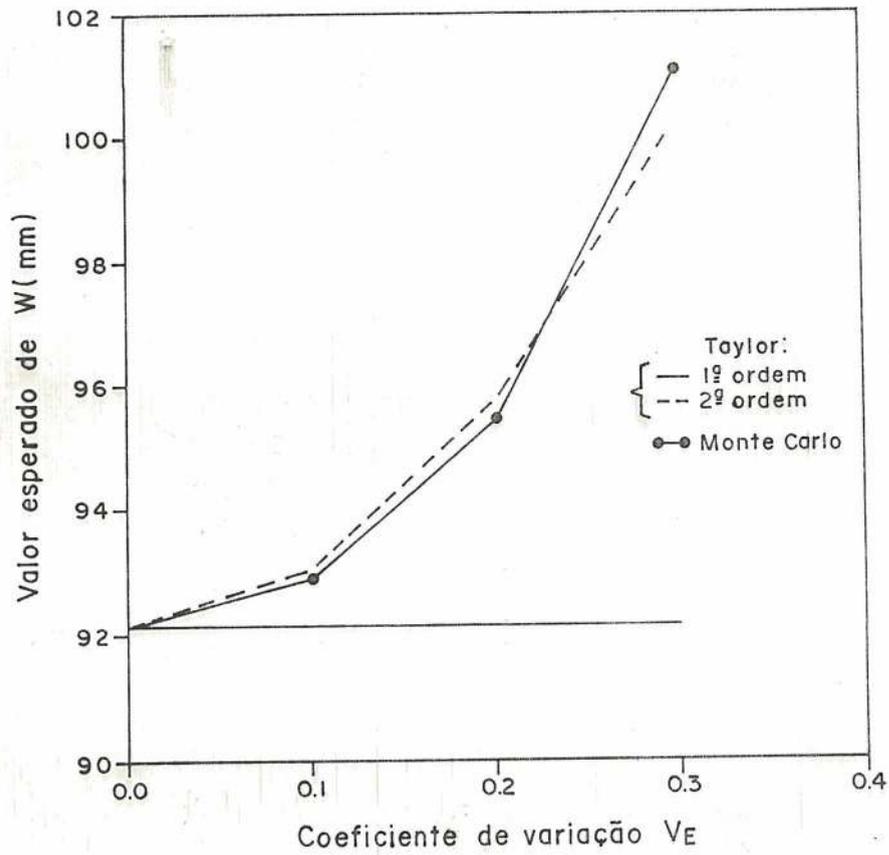


Figura 4.15 - Valor esperado de  $W$

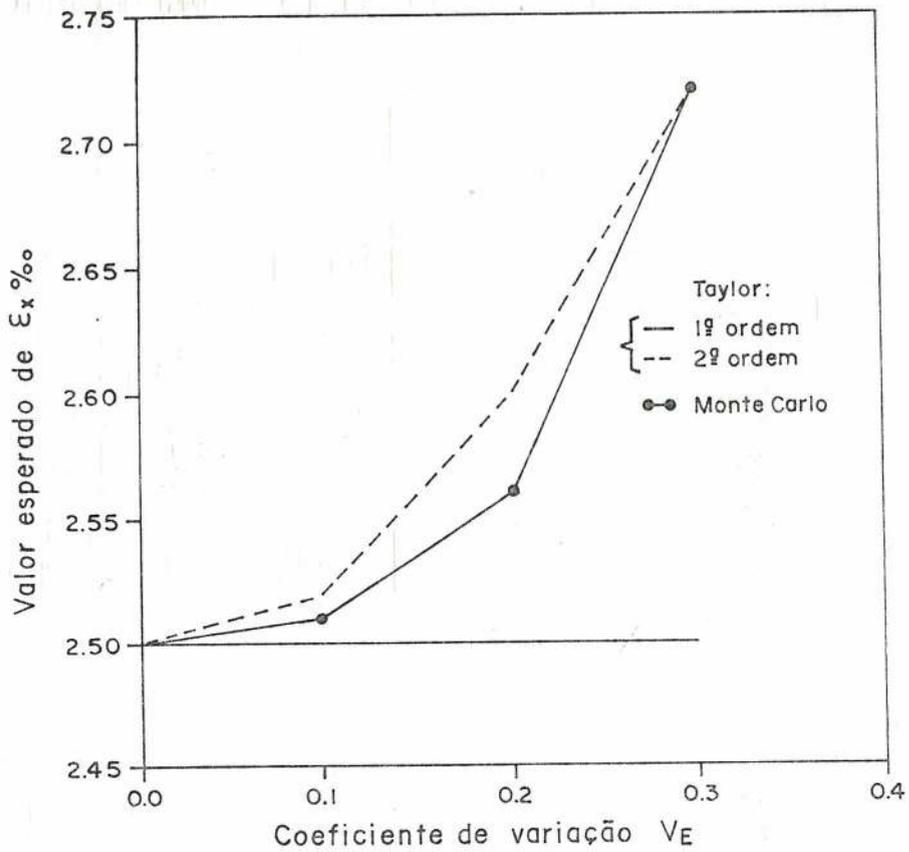


Figura 4.16 - Valor esperado de  $\epsilon_x$

Conforme indicado nas figuras, o valor esperado obtido com expansão em série de Taylor de primeira ordem é independente da variação da propriedade. Isso ocorre porque nesse caso ele representa a própria solução determinística.

Entretanto, os resultados encontrados com expansão de segunda ordem são concordantes com os obtidos através de simulação direta.

Na tabela 4.1 apresentam-se os tempos de processamento computacional exigidos pelos métodos testados. Ao menor tempo encontrado foi atribuído o valor unitário, de forma que a tabela representa os tempos de processamento relativos.

Tabela 4.1 - Tempo de processamento relativo

Método	Tempo de CPU
Série de Taylor de 1 <sup>a</sup> . ordem	1
Série de Taylor de 2 <sup>a</sup> . ordem	1,42
Neumann de 2 <sup>a</sup> . ordem	108
Neumann de 3 <sup>a</sup> . ordem	115
Neumann de 4 <sup>a</sup> . ordem	121
Neumann de 5 <sup>a</sup> . ordem	129
Monte Carlo	142

Observando a tabela, verifica-se que métodos que empregam simulação são extremamente onerosos do ponto de vista computacional.

Além disso, constata-se que o método de Neumann não apresentou uma melhoria significativa em relação à simulação de Monte Carlo direta. Com isso, o único método computacionalmente viável foi o método dos elementos finitos probabilístico, indicado na Tabela como Série de Taylor.

#### 4.5 - Outras aplicações do método dos elementos finitos probabilístico

Os exemplos apresentados nessa seção referem-se exclusivamente ao método dos elementos finitos probabilístico com expansão de segunda ordem. Esses exemplos complementam as aplicações apresentadas anteriormente.

Nas figuras 4.17 a 4.19 são apresentados alguns resultados obtidos em análise dinâmica linear. Para esse fim, foi considerado amortecimento de Rayleigh com coeficientes  $\gamma = \beta = 0,5\%$  e massa específica igual a  $2,55 \text{ kNs}^2/\text{m}^4$ .

As cargas são aplicadas subitamente no instante  $t=0$  e mantidas constantes ao longo do tempo.

Na figura 4.17 é apresentada a variação do valor esperado do deslocamento transversal com o tempo para  $V_E = 0$  e  $V_E = 0,3$ . O primeiro caso corresponde à vibração determinística da viga.

Observando a figura, verifica-se que a amplitude esperada da vibração estocástica é maior do que a amplitude obtida deterministicamente. Verifica-se também, uma redução nas frequências esperadas de vibração.

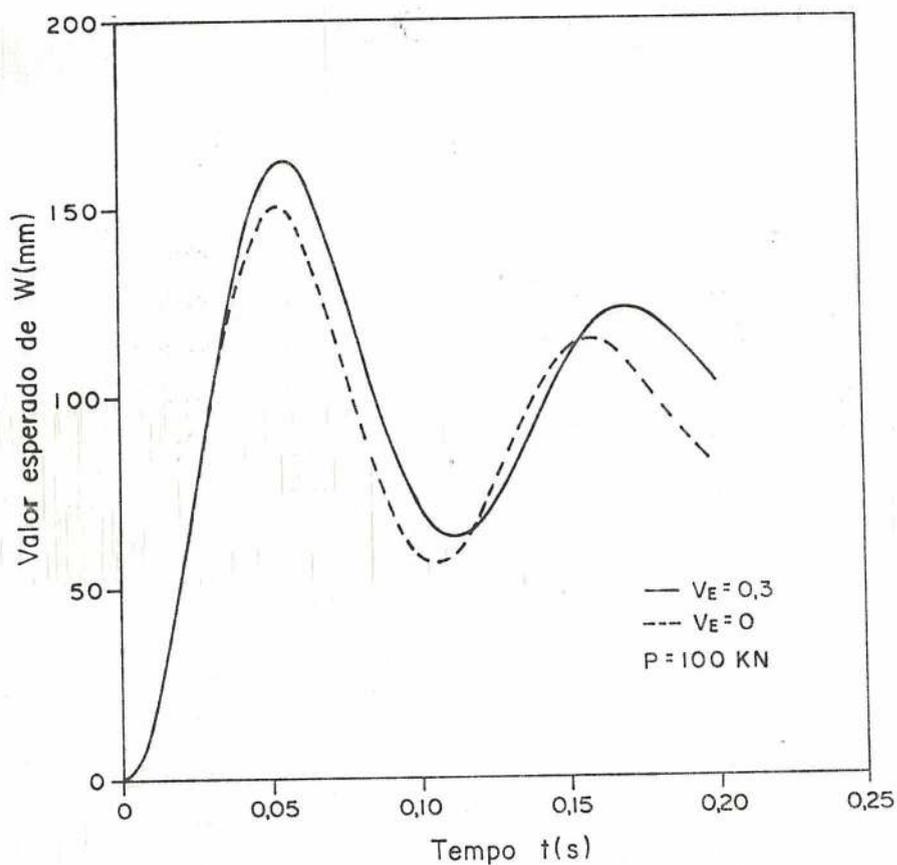


Figura 4.17 - Vibração linear amortecida

Na figura 4.18 são apresentadas as velocidades transversais esperadas para os casos determinístico e estocástico e, na figura 4.19 indicam-se as variações da tensão normal  $\sigma_x$ .

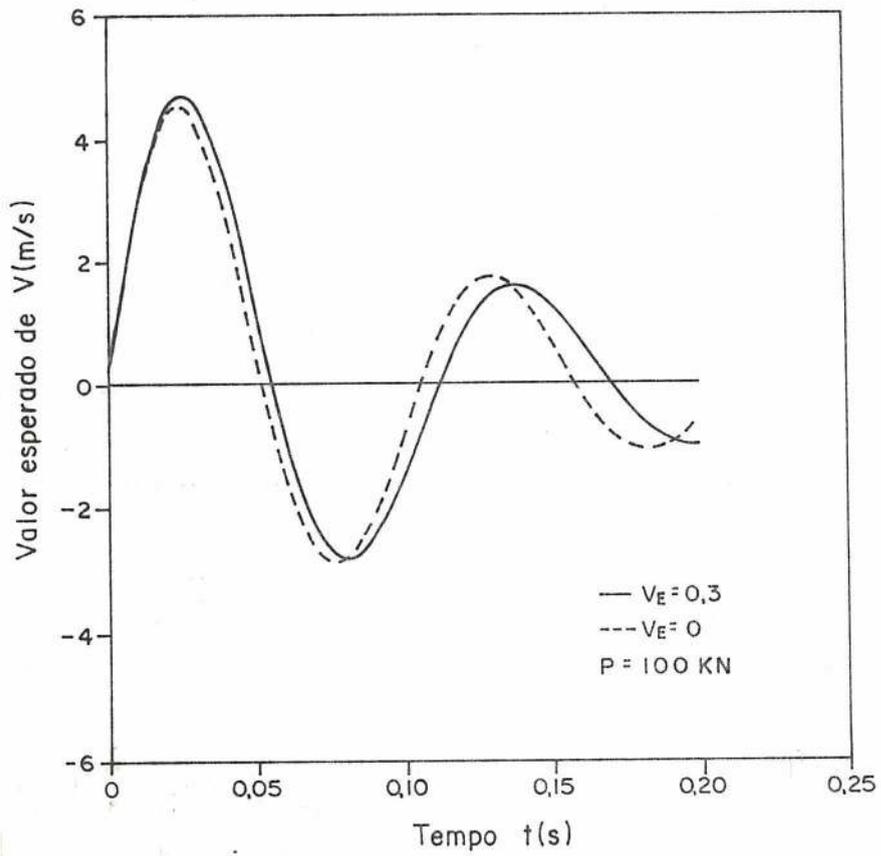


Figura 4.18 - Velocidade transversal

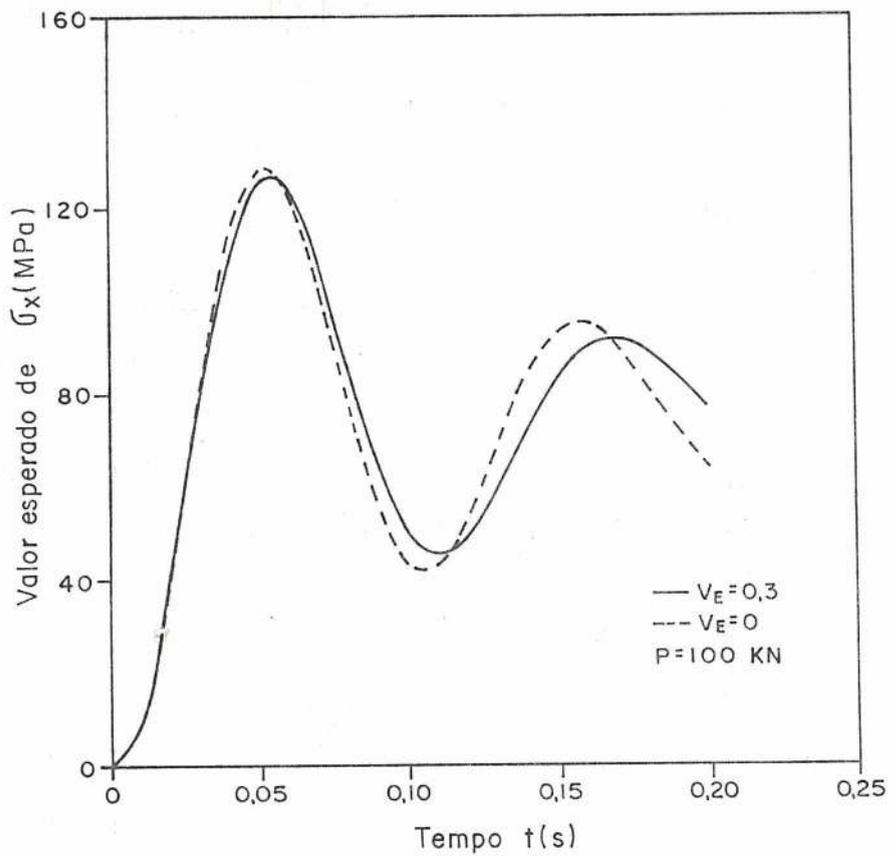


Figura 4.19 - Valor esperado de  $\sigma_x$

Observando as figuras anteriores, verifica-se uma pequena diferença entre as respostas no primeiro ciclo de vibração. Essa defasagem, entretanto, aumenta à medida que novos ciclos vão sendo considerados.

Nas figuras 4.20 a 4.22, são apresentadas as relações entre os valores esperados da resposta e o coeficiente de variação da propriedade para o caso estático não linear. Nessas figuras as respostas referem-se a uma carga fixa e igual a 100 kN.

Conforme se observa, os valores esperados do deslocamento e da deformação aumentam no mesmo sentido que o coeficiente de variação da propriedade. Por outro lado, ocorre uma redução da tensão à medida que se afasta da resposta determinística.

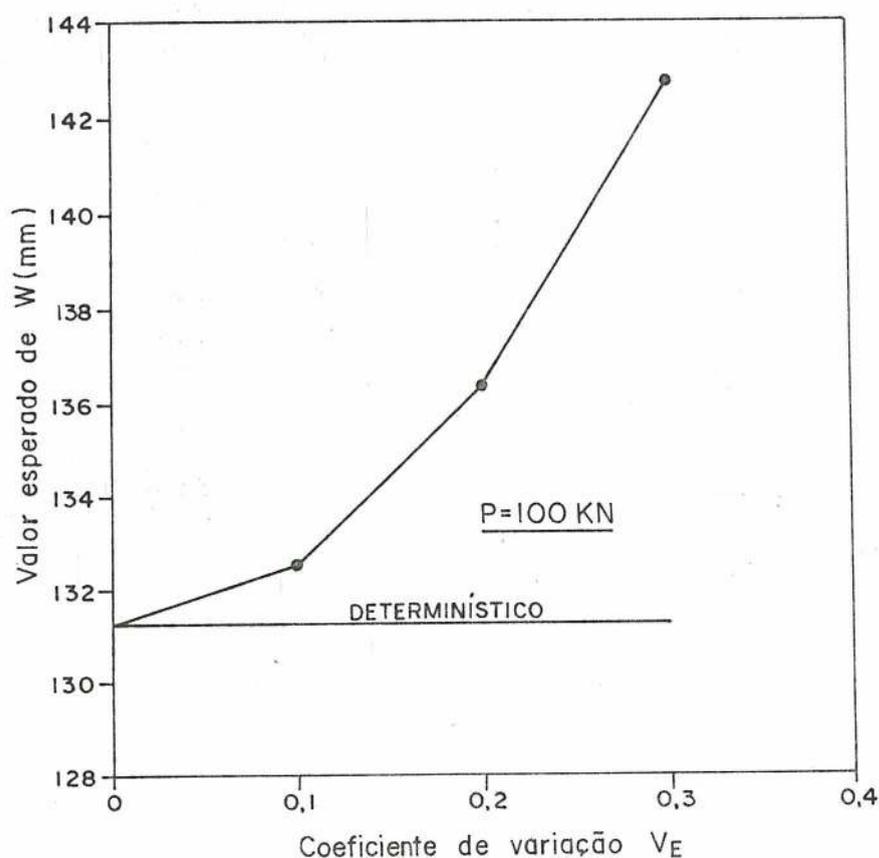


Figura 4.20 - Valor esperado de  $W$

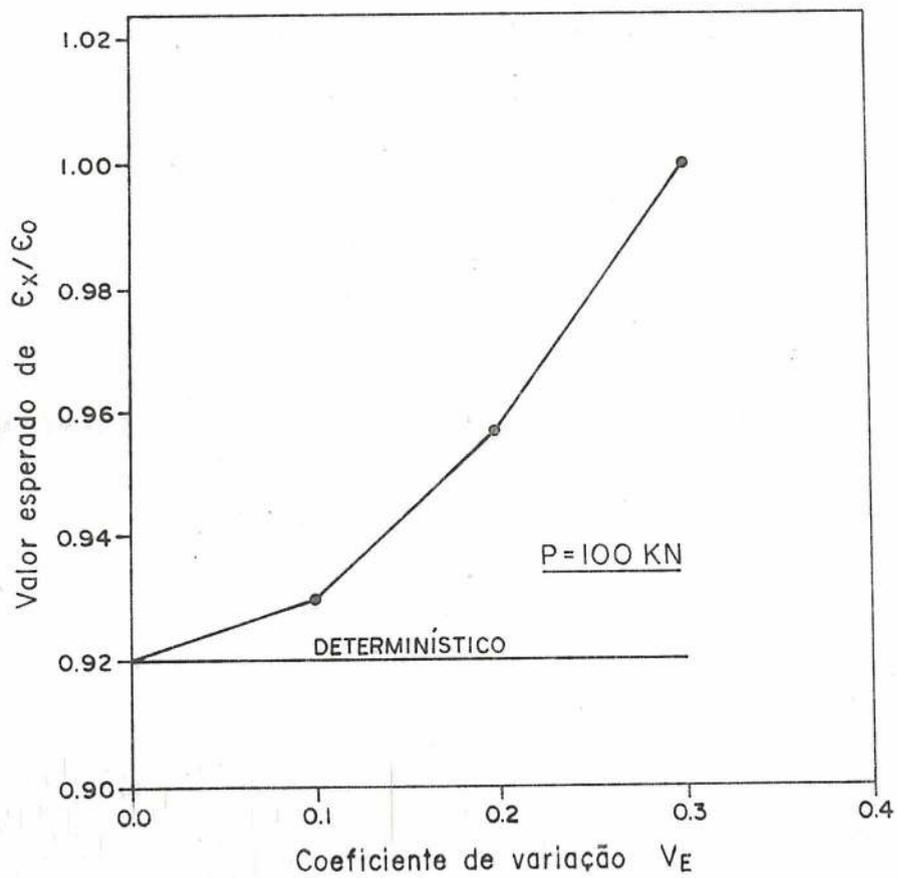


Figura 4.21 - Valor esperado de  $\epsilon_x/\epsilon_0$

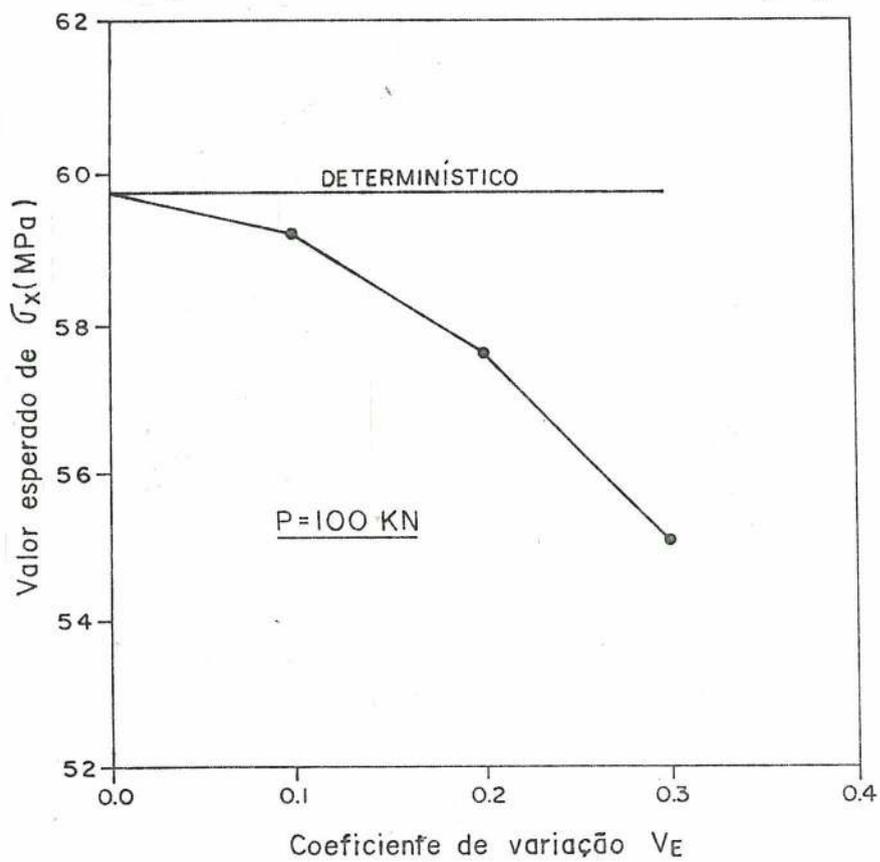


Figura 4.22 - Valor esperado de  $\sigma_x$

Na figura 4.23 são apresentadas as curvas carga-valor esperado do deslocamento para os casos linear e não linear. Para a obtenção da resposta não linear, as cargas foram aplicadas 10 incrementos iguais até o valor máximo de 100 kN.

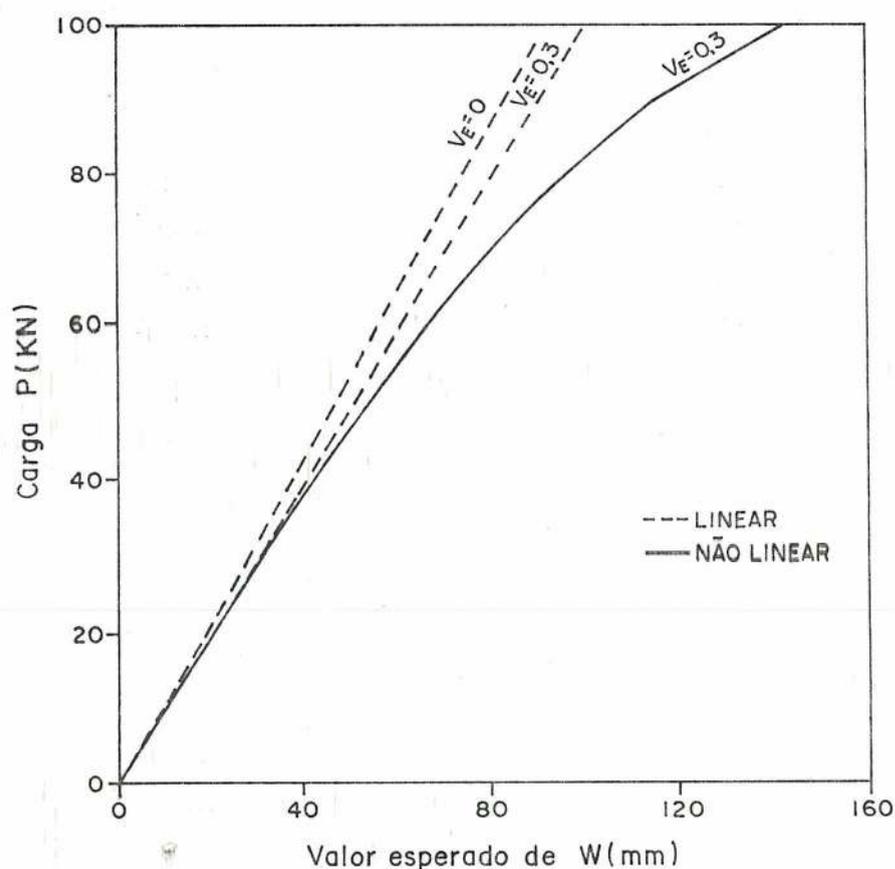


Figura 4.23 - Relações carga-deslocamento

Na figura 4.24 apresentam-se as relações carga-valor esperado da tensão para o caso determinístico e para  $V_E = 0,3$ . A figura refere-se a análise estática não linear com as cargas sendo incrementadas de 50 kN a 100 kN.

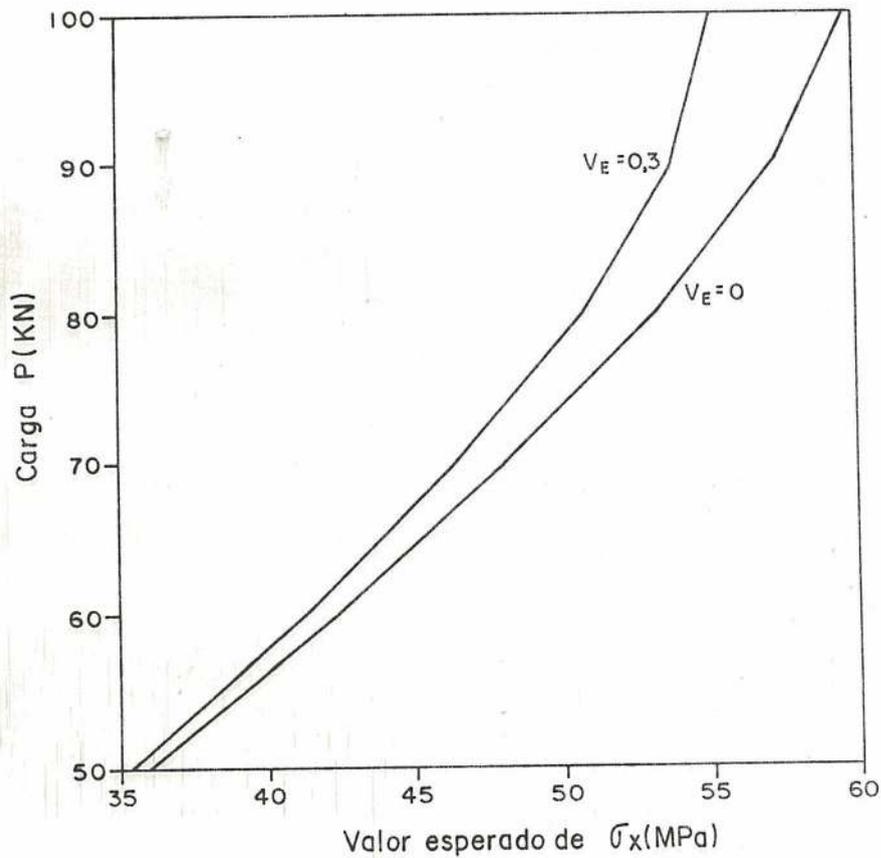


Figura 4.24 - Relações carga-tensão

Nas figuras 4.25 e 4.26 são comparadas as respostas obtidas em dinâmica linear e não linear.

Conforme se verifica, a amplitude do deslocamento é maior quando a não linearidade física é incluída. As tensões, por outro lado, são menores no caso não linear, o que já era de se esperar.

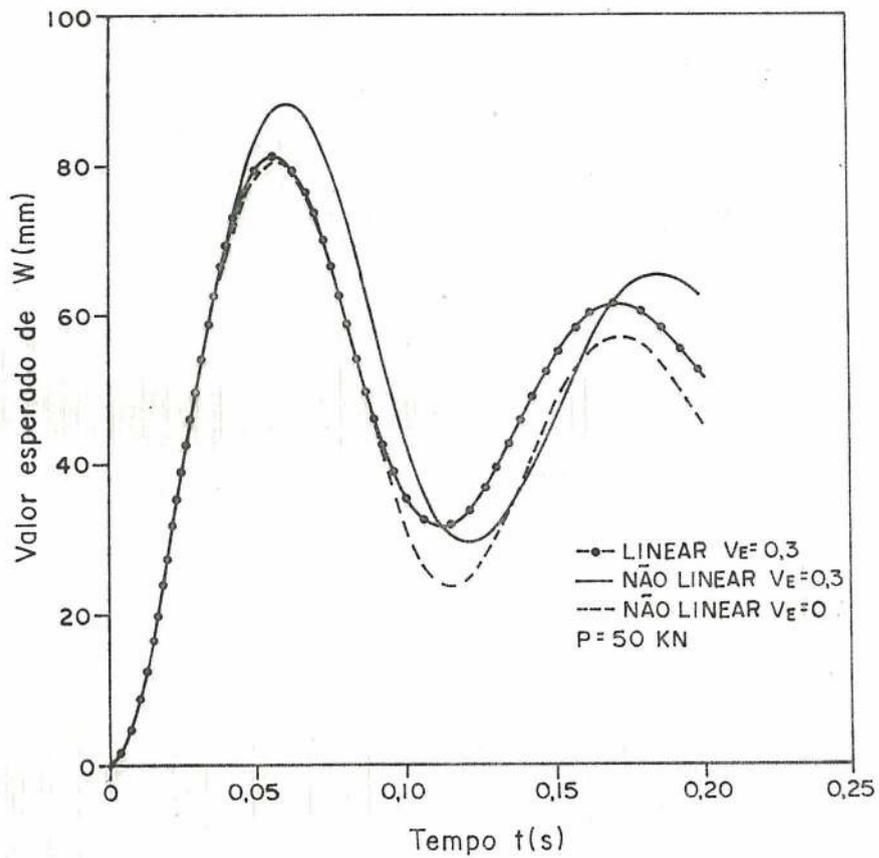


Figura 4.25 - Vibração amortecida - linear e não linear

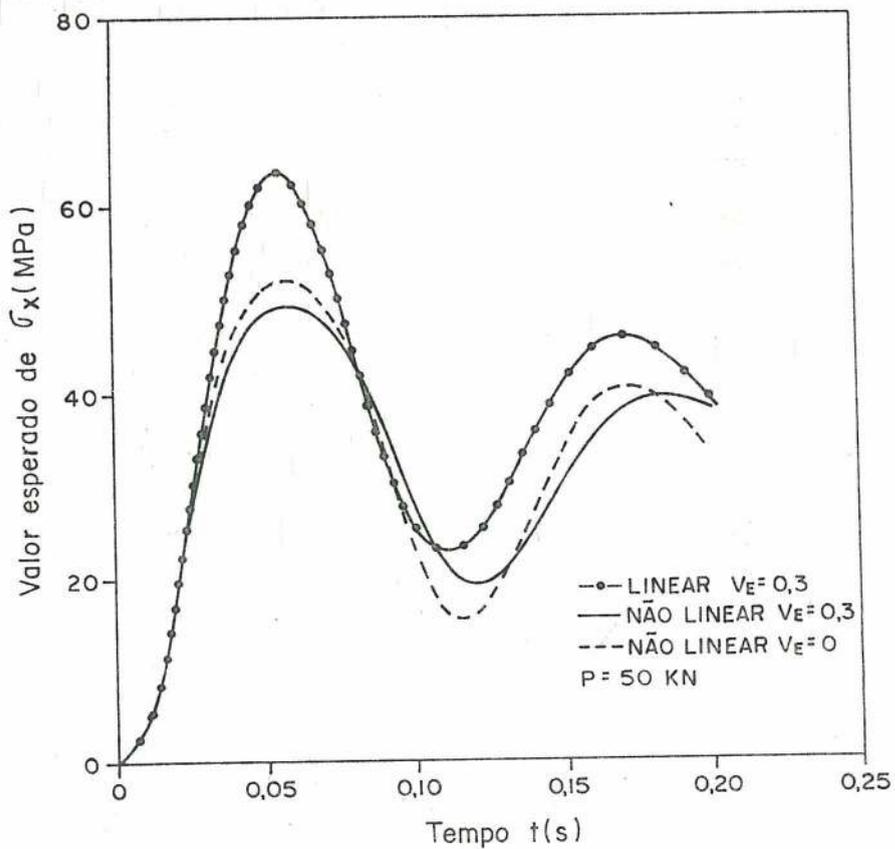


Figura 4.26 - Valor esperados de  $\sigma_x$  - linear e não linear

## 5. CONCLUSÕES

Em função dos resultados apresentados neste trabalho, algumas conclusões podem ser obtidas quanto a eficiência computacional e precisão dos métodos analisados.

Com relação ao método de Monte Carlo, verificou-se um excessivo esforço computacional requerido para a convergência estatística da resposta. Esse esforço aumenta com o crescimento do coeficiente de variação da propriedade do material. Para grandes variações como  $V_E = 0,3$  um número muito elevado de simulações se faz necessário, o que inviabiliza o emprego do método, especialmente em análise dinâmica não linear.

O método de Neumann com simulações objetiva reduzir o tempo de processamento computacional sem, entretanto, lograr muito êxito.

De maneira geral, pode-se concluir que as técnicas que empregam simulações são restritas a problemas de pequeno porte.

O método dos elementos finitos probabilístico, por outro lado, constitui-se numa ferramenta eficiente para análise de estruturas com propriedades estocásticas. Dentre os métodos analisados, esse é o único método viável para análise dinâmica não linear. A precisão do método, entretanto, fica prejudicada quando a variabilidade da propriedade material é grande.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - Baecher, G. B. and Ingra, S. - Stochastic FEM in settlement predictions. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 107, No. GT4, pp.449 - 463, 1981.
- 2 - Bathe, K. J. - Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice - Hall, Inc., 1982.
- 3 - Benaroya, H. and Rehak, M. - Finite element methods in probabilistic structural analysis: A selective review. Applied Mechanics Review, Vol. 41, No. 5, pp. 201-213, 1988.
- 4 - Collins, J.D. and Thomson, W.T. - The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties. AIAA Journal, Vol. 7, No. 4, pp. 642-648, 1969.
- 5 - Darwin, D. and Pecknold, D.A. - Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, No. EM2, pp. 229-241, 1977.
- 6 - Desayi, K. and Krishnan, S. - Equation for the stress-strain curve of concrete. Journal of the American Concrete Institute, Vol. 61, No. 3, pp. 345-350, 1964.
- 7 - Gordon, G. - System Simulation. Prentice-Hall Inc., 1969.
- 8 - Lawrence, M.A. - Basis random variables in finite element analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 1849-1863, 1987.
- 9 - Liu, W.K., Belytschko, T. and Mani, A. - Probabilistic finite elements for nonlinear structural dynamics.

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 56, pp. 61-81, 1986.
- 10- Liu, W.K., Belytschko, T. and Mani, A. - Random field finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 1831-1845, 1986.
  - 11- Liu, W.K., Besterfield, G.H. and Belytschko, T. - Variational approach to probabilistic finite elements. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No. 12, pp. 2115-2133, 1988.
  - 12- Liu, W. K., Besterfield, G. and Belytschko, T. - Transient probabilistic systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 67, pp. 27-54, 1988.
  - 13- Naganuma, T., Deodatis, G. and Shinozuka, M. - ARMA model for two-dimensional processes. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 113, No. 2, pp. 234-251, 1987.
  - 14- Shinozuka, M. and Wen, Y. K. - Monte Carlo solution of nonlinear vibrations. AIAA Journal, Vol. 10, No. 1, pp. 37-40, 1972.
  - 15- Shinozuka, M. - Probabilistic modeling of concrete structures. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 98, No. EM6, pp. 1433-1451, 1972.
  - 16- Shinozuka, M. and Astill, C. J. - Random eigenvalue problems in structural analysis. AIAA Journal, Vol. 10, No. 4, pp. 456-462, 1972.
  - 17- Shinozuka, M. - Monte Carlo solution of structural dynamics. Computers and Structures, Vol. 2, pp. 855-874, 1972.
  - 18- Shinozuka, M. and Deodatis, G. - Response variability of stochastic finite element systems. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No. 3, pp. 499-519, 1988.
  - 19- Spanos, P. D. and Ghanem, R. - Stochastic finite element expansion for random media. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, No. 5, pp. 1035-1053, 1989.

- 20- Vanmarcke, E. and Grigoriu, M. - Stochastic finite element analysis of simple beams. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, No. 5, pp. 1203-1214, 1983.
- 21- Yamazaki, F., Shinozuka, M. and Dasgupta, G. - Neumann expansion for stochastic finite element analysis. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No. 8, pp. 1335-1355, 1988.
- 22- Yang, Tsung-Yuan - Random Vibration of Structures. John Wiley & Sons, 1986.
- 23- Zienkiewicz, O. C. - The Finite Element Method. McGraw-Hill, 3a. ed. 1977.