

# MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM NO PROJETO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO

**JOSÉ MILTON DE ARAÚJO**

*Departamento de Materiais e Construção - FURG, Rio Grande, RS*

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é a avaliação dos principais métodos simplificados disponíveis para a consideração dos efeitos de segunda ordem no dimensionamento de pilares de concreto armado. Analisam-se dois métodos apresentados no projeto da nova NBR-6118, os métodos do CEB/78 e do CEB/90, dois métodos sugeridos na norma espanhola e o método simplificado do ACI. As armaduras obtidas com os métodos simplificados são comparadas com aquelas derivadas do dimensionamento rigoroso, considerando-se as não-linearidades física e geométrica do problema. Apenas o caso de cargas de curta duração é considerado.

**Palavras-Chave:** Pilares de concreto armado, efeitos de segunda ordem, dimensionamento.

## ABSTRACT

The subject of this work is the analysis of the main simplified methods to consider the second order effects in the design of reinforced concrete columns. Two methods presented in the new Brazilian code NBR-6118, the CEB/78 and CEB/90 methods, two methods suggested in the Spanish code and the ACI method are analyzed. The steel cross section areas obtained through the simplified methods are compared with those obtained through the rigorous design, where both physical and geometrical nonlinearities are taking into account. The study is restricted to short-term loads.

**Keywords:** Reinforced concrete columns, second order effects, dimensioning.

## INTRODUÇÃO

De um modo geral, as normas de projeto exigem que a segurança dos pilares esbeltos de concreto armado seja comprovada por meio de um processo rigoroso que leva em conta, de maneira "exata", as não-linearidades física e geométrica.

Segundo o projeto da nova NBR-6118[6], por exemplo, essa análise rigorosa é exigida sempre que o índice de esbeltez  $\lambda$  for superior a 90. Para pilares com índices de esbeltez menores, permite-se um cálculo simplificado, pois os efeitos de segunda ordem, decorrentes da não-linearidade geométrica, não são tão importantes.

Desse modo, é usual classificar os pilares como curtos, moderadamente esbeltos e esbeltos. Para os pilares curtos, pode-se desprezar os efeitos de segunda ordem e para os pilares moderadamente esbeltos, esses efeitos podem ser introduzidos através de algum método simplificado.

Diversos algoritmos podem ser empregados para a análise e o dimensionamento de pilares esbeltos, estando os principais descritos na referência [3].

Em um primeiro algoritmo, pode-se fazer uso da analogia de Mohr para o cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar. Para isto, é necessário conhecer a curvatura do eixo da barra, associada a um esforço normal e a um momento fletor dados. Na determinação da curvatura, consideram-se diagramas tensão-

deformação não-lineares para o concreto e para o aço. Em virtude dessa não-linearidade (denominada não-linearidade física), torna-se necessário o emprego de um processo iterativo para o cálculo da curvatura.

Inicialmente, consideram-se várias seções transversais ao longo do eixo do pilar e determinam-se os esforços solicitantes nessas seções. Estes são os esforços solicitantes de primeira ordem, obtidos na configuração indeformada da barra. A partir dos esforços solicitantes, determinam-se as curvaturas nas diversas seções transversais. Em seguida, aplica-se ao pilar um carregamento transversal fictício igual à distribuição das curvaturas. Empregando a analogia de Mohr, obtém-se os deslocamentos transversais do eixo do pilar.

Em virtude desses deslocamentos, ocorre um aumento dos momentos fletores na configuração deformada do pilar. Considera-se que o esforço normal permanece inalterado, com os seus valores de primeira ordem. Com os novos momentos fletores e com os esforços normais, repete-se todo o processo para a obtenção das curvaturas e dos deslocamentos transversais. Desenvolve-se, assim, um processo iterativo para a consideração da não-linearidade geométrica.

Se os deslocamentos convergirem para um valor finito, significa que o pilar, com uma determinada armadura, é estável frente às cargas aplicadas. Por outro lado, se os deslocamentos crescerem indefinidamente, fica constatada a ruína por instabilidade do equilíbrio. A ruína por ruptura é verificada comparando-se os momentos fletores solicitantes com o momento de ruína da seção transversal.

Para obter uma resposta completa do pilar até a ruína, emprega-se um processo incremental. Assim, após a convergência dos deslocamentos transversais, aplica-se um novo incremento de carga e repete-se toda a análise. Dessa forma, pode-se determinar o carregamento de ruína do pilar.

Esse algoritmo também pode ser empregado para o dimensionamento de pilares esbeltos. Para isto, basta ir variando a área de aço e determinando o carregamento de ruína do pilar. Quando o carregamento de ruína se aproximar do carregamento de projeto, tem-se concluído o dimensionamento. Com esse

algoritmo foram preparadas diversas tabelas de dimensionamento imediato[2]. A descrição dessas tabelas é feita na seção seguinte.

O método das diferenças finitas também pode ser empregado para a análise de pilares esbeltos. Inicialmente, consideram-se várias seções transversais ao longo do eixo do pilar e determinam-se os momentos fletores solicitantes nessas seções. Esses momentos são escritos em termos dos deslocamentos transversais nas seções, os quais são as incógnitas do problema. As curvaturas do eixo da barra são aproximadas em diferenças finitas e também são escritas em função dos deslocamentos transversais. Aplicando-se a equação diferencial de equilíbrio em todas as seções, obtém-se um sistema de equações algébricas. Esse sistema é não-linear e deve ser resolvido iterativamente.

Os algoritmos descritos anteriormente são relativamente simples e de fácil implementação computacional. Entretanto, eles apresentam algumas limitações, particularmente em relação às condições de contorno. Dessa maneira, o programa desenvolvido fica restrito a alguns casos particulares de carga e de condições de contorno do pilar. Havendo alguma alteração nessas condições, torna-se necessário modificar o programa computacional.

O problema também pode ser resolvido empregando-se o método dos elementos finitos. Neste caso, obtém-se um programa geral que permite realizar a análise de pilares com diversas condições de contorno e de carga[3].

Qualquer que seja o algoritmo empregado, sempre que o objetivo da análise for o projeto estrutural, deve-se trabalhar com dois diagramas tensão-deformação dos materiais, conforme está indicado na fig. 1.

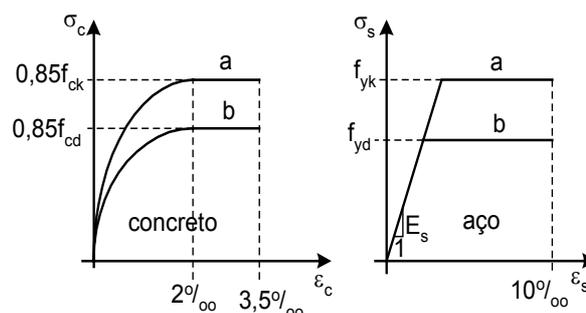


Fig. 1 - Diagramas tensão-deformação dos materiais

Para o cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar, adotam-se os diagramas tensão-deformação com as resistências características dos materiais (diagramas **a** da fig. 1). Isto é feito para que os esforços de segunda ordem de cálculo sejam majorados pelo mesmo coeficiente  $\gamma_f$  usado para majorar os esforços de primeira ordem.

Por outro lado, ao verificar a ruptura de uma seção transversal, deve-se empregar os diagramas com as resistências de cálculo (diagramas **b** da fig. 1).

## DIMENSIONAMENTO RIGOROSO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO

As tabelas de dimensionamento imediato apresentadas na ref.[2] foram elaboradas para pilares com o carregamento e a seção transversal indicados na fig. 2.

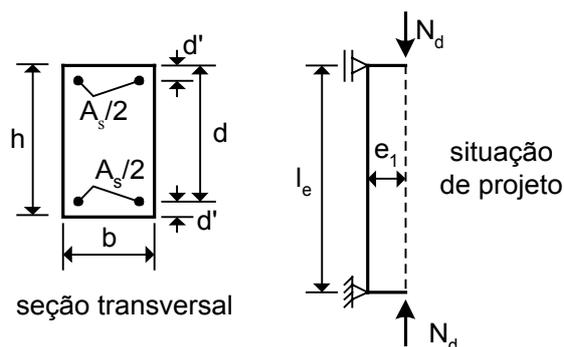


Fig. 2 - Seção transversal e carregamento do pilar

Na fig. 2,  $N_d$  é o esforço normal de compressão de cálculo,  $e_1$  é a excentricidade de primeira ordem e  $l_e$  é o comprimento de flambagem do pilar. O pilar está submetido à flexão normal composta e sua seção se mantém constante ao longo do eixo, inclusive a armadura. A área total de aço na seção transversal,  $A_s$ , é disposta em duas camadas, conforme indicado na fig. 2.

Para o emprego das tabelas de dimensionamento da ref.[2], deve-se calcular os parâmetros  $\beta = l_e/d$  e  $\delta = d'/d$ . Os esforços adimensionais para entrada nas tabelas são

$$\nu = \frac{N_d}{0,85bd f_{cd}} \quad (1)$$

$$\mu_1 = \frac{N_d e_1}{0,85bd^2 f_{cd}} \quad (2)$$

onde  $f_{cd}$  é a resistência à compressão de cálculo do concreto.

Das tabelas, obtém-se a taxa mecânica de armadura  $\omega$ , com a qual calcula-se a área de aço

$$A_s = 2\omega bd \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \quad (3)$$

onde  $f_{yd}$  é a tensão de escoamento de cálculo do aço.

O esforço normal de cálculo e as resistências de cálculo dos materiais são dados por

$$N_d = \gamma_f N_k; f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}; f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (4)$$

onde  $N_k$  é o esforço normal característico,  $f_{ck}$  é a resistência à compressão característica do concreto e  $f_{yk}$  é a tensão de escoamento característica do aço.

Para os coeficientes parciais de segurança, adotam-se os valores  $\gamma_f = 1,4$ ,  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ .

As tabelas foram elaboradas para os aços CA-50, tendo sido adotados os diagramas tensão-deformação indicados na fig. 1. Para o concreto em compressão, emprega-se o diagrama parábola-retângulo e para o aço, adota-se um diagrama bilinear, válido para tração e compressão. A resistência à tração do concreto é desprezada na análise.

As armaduras obtidas com essas tabelas serão usadas para testar a precisão dos diversos métodos simplificados analisados neste trabalho.

## MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA O DIMENSIONAMENTO

## DE PILARES

### Formulação dos métodos simplificados

As normas de projeto adotam dois tipos básicos de métodos simplificados para o dimensionamento de pilares de concreto armado.

Em um primeiro tipo de formulação, arbitra-se uma configuração deformada para o eixo do pilar, bem como a curvatura máxima na seção crítica. Com isto, obtém-se uma expressão para a excentricidade de segunda ordem e pode-se calcular o momento fletor máximo para o dimensionamento. Esse tipo de formulação é adotado no CEB/78[9], no CEB/90[10] e na norma espanhola[8]. No projeto da nova NBR-6118[6], também é apresentado um método deste tipo, o qual é uma versão simplificada do método proposto na NBR-6118/80[5].

Em um segundo tipo de formulação, resolve-se a estrutura de maneira exata, considerando um comportamento elástico linear do material. Para isto, arbitra-se uma rigidez à flexão equivalente e obtém-se o momento fletor máximo para o dimensionamento. Esse tipo de formulação é adotado pelo ACI[1]. Um método alternativo desse tipo também é apresentado no projeto da nova NBR-6118.

Considere-se o pilar birrotulado submetido ao carregamento indicado fig. 3. Em uma seção transversal genérica, o deslocamento transversal do eixo é  $W = W(x)$ . Devido à simetria do carregamento, esse deslocamento é máximo na seção central, onde vale  $e_2 = W(l_e/2)$ .

O dimensionamento da seção central do pilar deve ser feito para o esforço normal de cálculo  $N_d$  e para o momento fletor de cálculo  $M_d = N_d e_{tot}$ . A excentricidade total  $e_{tot}$  é dada por  $e_{tot} = e_1 + e_2$ , onde  $e_1$  é a excentricidade de primeira ordem e  $e_2$  é a excentricidade de segunda ordem. O dimensionamento à flexo-compressão normal para o par de esforços  $(N_d, M_d)$  segue o procedimento padrão descrito em [4].

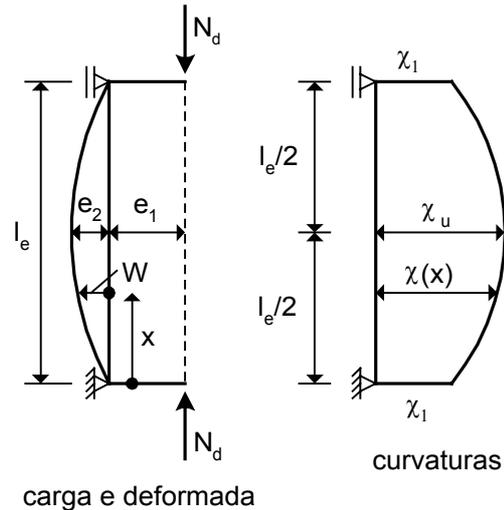


Fig. 3 - Cargas, deformada e curvaturas do eixo do pilar

Na fig. 3, representa-se a variação das curvaturas ao longo do eixo do pilar. Nas seções de extremidade, tem-se a curvatura de primeira ordem  $\chi_1$  e na seção central a curvatura máxima é  $\chi_u$ . A curvatura  $\chi(x)$  em uma seção genérica pode ser aproximada por

$$\chi(x) = \chi_1 + (\chi_u - \chi_1) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l_e} \quad (5)$$

Como  $\chi(x) = -W''(x)$ , pode-se integrar a expressão (5) duas vezes e aplicar as condições de contorno  $W(0) = 0$  e  $W(l_e) = 0$  para encontrar a expressão da deformada

$$W(x) = \chi_1 \left( \frac{l_e x - x^2}{2} \right) + (\chi_u - \chi_1) \frac{l_e^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l_e} \quad (6)$$

Substituindo  $x = l_e/2$  na expressão (6), obtém-se a excentricidade de segunda ordem

$$e_2 = \chi_1 \frac{l_e^2}{8} + (\chi_u - \chi_1) \frac{l_e^2}{\pi^2} \quad (7)$$

Considerando  $\pi^2 \cong 10$  e admitindo a relação

$$\chi_1 = \left( \frac{e_1}{e_1 + e_2} \right) \chi_u \quad (8)$$

a equação (7) pode ser escrita na forma

$$e_2 = \frac{l_e^2}{40} \left( 4 + \frac{e_1}{e_1 + e_2} \right) \chi_u \quad (9)$$

que é a expressão adotada no CEB/90[10].

Se a curvatura de primeira ordem  $\chi_1$  for desprezada, a expressão (7) pode ser escrita como

$$e_2 = \frac{l_e^2}{10} \chi_u \quad (10)$$

que é a expressão adotada no CEB/78[9], na NBR-6118[5,6] e na norma espanhola[8].

Observa-se que nessa categoria de métodos simplificados há uma aproximação introduzida pela equação (5) e, também, no valor arbitrado para a curvatura máxima  $\chi_u$ .

Em outra categoria de métodos simplificados, resolve-se diretamente a equação diferencial de equilíbrio[7] do pilar da fig. 3. A solução seria exata se o pilar fosse constituído por um material elástico linear. A aproximação do método consiste no valor escolhido para a rigidez à flexão.

Resolvendo a equação diferencial de equilíbrio para o pilar da fig. 3, obtém-se o momento solicitante máximo  $M_d$  na seção central, na forma

$$M_d = \delta_n M_{1d} = \delta_n (N_d e_1) \quad (11)$$

onde  $\delta_n$  é um fator de amplificação de momentos.

Lembrando que  $M_d = N_d e_{tot}$ , pode-se escrever  $e_{tot} = \delta_n e_1$ , como é apresentado no segundo método do projeto da nova NBR-6118.

Em todos os métodos simplificados, quando a excentricidade de primeira ordem varia linearmente de um extremo ao outro do pilar, desde  $e_{1a}$  até  $e_{1b}$ , adota-se a excentricidade equivalente

$$e_1 = 0,6e_{1a} + 0,4e_{1b} \geq 0,4e_{1a} \quad (12)$$

onde  $e_{1a} \geq |e_{1b}|$ .

Neste caso, também é necessário dimensionar a seção do apoio mais solicitado com o esforço normal  $N_d$  e com o momento de primeira ordem  $M_d = N_d e_{1a}$ .

## Métodos do projeto da nova NBR-6118

Método A: método do pilar padrão com curvatura aproximada

De acordo com esse método, a excentricidade de segunda ordem é dada por

$$e_2 = \frac{l_e^2}{10} \frac{0,005}{(v_o + 0,5)h} \quad (13)$$

onde

$$v_o = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad (14)$$

e  $A_c = bh$  é a área da seção transversal, sendo  $h$  sua altura na direção considerada.

Para o emprego da equação (13), adota-se  $v_o = 0,5$ , sempre que resultar  $v_o < 0,5$ .

Método B: método do pilar padrão com rigidez  $\kappa$  (kapa) aproximada

A excentricidade total  $e_{tot}$  é dada por

$$e_{tot} = \frac{e_1}{1 - \frac{\lambda^2 v_o}{120\kappa}} \quad (15)$$

onde  $\lambda$  é o índice de esbeltez e  $\kappa$  é dado por

$$\kappa = 32 \left( 1 + \frac{5e_{tot}}{h} \right) v_o \quad (16)$$

Introduzindo (16) em (15), obtém-se a expressão para  $e_{tot}$ , na forma

$$e_{tot} = \left( B + \sqrt{B^2 + 0,2 e_1/h} \right) h \quad (17)$$

onde

$$B = \frac{\lambda^2}{38400} + 0,5 \frac{e_1}{h} - 0,1 \quad (18)$$

## Método do CEB/78

Segundo o CEB/78, a excentricidade de segunda ordem é dada por

$$e_2 = \frac{l_e^2}{10} \frac{0,0035 + f_{yd}/E_s}{(\nu_o/0,425)h} \quad (19)$$

onde  $E_s = 200 \text{ GPa}$  é o módulo de elasticidade do aço.

Para o emprego da expressão (19), adota-se  $\nu_o = 0,425$ , sempre que  $\nu_o < 0,425$ .

### Método do CEB/90

De acordo com o CEB/90, a excentricidade de segunda ordem é dada na equação (9). Resolvendo essa equação, obtém-se a expressão

$$e_2 = C + \sqrt{C^2 + 0,125l_e^2 \chi_u e_1} \quad (20)$$

onde

$$C = 0,05l_e^2 \chi_u - 0,5e_1 \quad (21)$$

Para a curvatura máxima  $\chi_u$ , o CEB/90 adota a expressão

$$\chi_u = \frac{2K_2 f_{yd}/E_s}{(d - d')} \quad (22)$$

onde  $(d - d')$  é a distância entre as armaduras, conforme indicado na fig. 2.

O coeficiente  $K_2$ , levando em conta a redução da curvatura com o aumento da força normal de compressão, é dado por

$$K_2 = \frac{N_{ud} - N_d}{N_{ud} - N_{bal}} \leq 1 \quad (23)$$

onde  $N_d$  é o esforço normal de cálculo,  $N_{ud}$  é o esforço normal resistido pela seção em compressão simples e  $N_{bal}$  é o esforço normal que, quando aplicado à seção, torna máximo o momento fletor resistente.

O esforço normal  $N_{ud}$  é dado por

$$N_{ud} = 0,85A_c f_{cd} + A_s \sigma_{sd,2} \quad (24)$$

onde  $\sigma_{sd,2} = 40 \text{ kN/cm}^2$  é a tensão no aço para uma deformação de compressão igual a  $2^\circ/1000$ .

Para seções retangulares com armadura simétrica, como indicado na fig. 2, o esforço normal  $N_{bal}$  pode ser obtido por

$$N_{bal} = 0,4A_c f_{cd} \quad (25)$$

Observa-se que o processo do CEB/90 é iterativo, pois é necessário conhecer a área de aço  $A_s$  para o cálculo de  $N_{ud}$ . Em geral, o método converge com poucas iterações.

### Métodos da norma espanhola

#### Método A: método geral

Neste método, a excentricidade total é dada por

$$e_{tot} = \psi \left( e_1 + \frac{l_e^2}{10} \chi_u \right) \quad (26)$$

A curvatura máxima tem a expressão

$$\chi_u = \left( \frac{2f_{yd}/E_s}{d - d'} \right) \frac{1 + \alpha\nu_o}{1 + \alpha\nu_o + 2|\nu_o - 0,3|} \quad (27)$$

onde

$$\alpha = 4\beta \frac{e_1(d - d') + 0,1l_e^2 f_{yd}/E_s}{(d - d')^2} \quad (28)$$

O coeficiente  $\beta$  depende da disposição das armaduras na seção transversal. Para seções com armaduras simétricas, dispostas em duas camadas como na fig. 2,  $\beta = 1$ .

O coeficiente  $\psi$  leva em conta a forma da seção e depende de  $\chi_u$ . Neste trabalho, adota-se, simplificada,  $\psi = 1$ . Desse modo, a excentricidade de segunda ordem toma a forma dada na expressão (10).

#### Método B: método aproximado

Neste método, a excentricidade de segunda ordem, para o caso de cargas de curta duração, é dada por

$$e_2 = (1 + 0,12\beta) \frac{f_{yd}}{E_s} \left( \frac{h + 20e_1}{h + 10e_1} \right) \frac{l_e^2}{50i_c} \quad (29)$$

onde  $i_c$  é o raio de giração da seção de concreto na direção considerada.

Para seções retangulares, tem-se  $i_c = h/\sqrt{12}$ .

### Método do ACI

Neste método, a excentricidade total é dada por

$$e_{tot} = \frac{e_1}{1 - \frac{N_d}{0,75P_e}} \quad (30)$$

onde  $P_e$  é a carga de Euler, dada por

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l_e^2} \quad (31)$$

Para a rigidez à flexão, o ACI recomenda o uso da fórmula

$$EI = 0,4E_{cs}I_c \quad (32)$$

onde  $I_c$  é o momento de inércia da seção de concreto simples e  $E_{cs}$  é o módulo de deformação longitudinal secante do concreto, dado por

$$E_{cs} = 4730\sqrt{f_{ck}}, \text{ MPa} \quad (33)$$

Observando a equação (30), verifica-se que esse método só pode ser aplicado para  $N_d < 0,75P_e$ .

## RESULTADOS

Nas tabelas apresentadas a seguir, comparam-se as áreas das armaduras obtidas empregando-se os processos simplificados com aquelas obtidas através do dimensionamento rigoroso, descrito anteriormente. As tabelas fornecem a relação  $E = A_{s,a}/A_{s,e}$ , onde  $A_{s,a}$  é a área de aço obtida com os métodos simplificados e  $A_{s,e}$  é

a área obtida com o processo rigoroso. As partes sombreadas das tabelas representam as combinações de esforços para as quais o erro dos métodos aproximados é maior ou igual a 10%.

Dependendo da combinação de esforços, tanto o processo rigoroso, quanto os métodos simplificados, podem fornecer uma área de aço muito pequena (até mesmo igual a zero). Nesses casos, a área de aço considerada é igual à armadura mínima  $A_{s,min} = (0,8/100)bh$ .

Em todos os exemplos, considera-se que  $\delta = d'/d = 0,10$  e  $\beta = l_e/d = 20$ . Este valor de  $\beta$  corresponde a um índice de esbeltez  $\lambda \cong 63$ , que é um valor típico para os pilares de edifícios.

### A) Métodos da NBR-6118

Na tabela 1, indicam-se os resultados obtidos com o método A da nova NBR-6118.

Tabela 1 - Erro do método A da NBR-6118

$\beta = l_e/d = 20 ; \lambda \cong 63 ; \delta = d'/d = 0,10$							
$\mu_1$	$\nu \downarrow$						
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
1,0	0,99	0,99	0,98	0,99	0,97	0,96	0,96
0,9	1,00	0,99	0,99	0,98	0,97	0,97	0,95
0,8	1,00	0,99	0,99	0,98	0,98	0,96	0,96
0,7	1,00	0,98	0,99	0,99	0,99	0,96	0,96
0,6	1,00	0,96	0,98	1,00	0,99	0,98	0,97
0,5	0,98	0,98	1,00	0,98	1,00	0,99	0,98
0,4	1,00	0,97	1,00	1,02	1,00	1,00	1,00
0,3	1,00	0,96	1,04	1,06	1,05	1,04	1,04
0,2	1,00	1,00	1,13	1,20	1,19	1,14	1,12
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,62	1,38	1,27

Observando a tabela 1, verifica-se que o método A da nova NBR-6118 se aproxima muito bem do método rigoroso, exceto para a pequena região sombreada da tabela. Para as combinações de esforços desta região, o método simplificado superestima a armadura. Quando o momento de primeira ordem  $\mu_1$  é grande, o método simplificado fica contra a segurança. Porém, o erro é menor que 5%.

Na tabela 2, indicam-se os resultados obtidos com o método B da nova NBR-6118.

Analisando a tabela 2, verifica-se que o método B da nova NBR-6118 fornece, quase

sempre, uma solução a favor da segurança. Isto ocorre mesmo quando o momento de primeira ordem  $\mu_1$  é grande. Dessa forma, corrige-se o defeito apresentado pelo método A para esses casos. Entretanto, permanece existindo a região sombreada, na qual o método B também superestima a armadura.

Tabela 2 - Erro do método B da NBR-6118

$\beta = l_e/d = 20 ; \lambda \cong 63 ; \delta = d'/d = 0,10$							
$\mu_1$	$\nu \downarrow$						
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
1,0	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02
0,9	1,01	1,00	1,00	1,00	1,02	1,03	1,02
0,8	1,00	1,00	1,00	1,01	1,02	1,02	1,04
0,7	1,02	1,00	1,00	1,01	1,04	1,02	1,04
0,6	1,00	0,98	1,00	1,03	1,03	1,04	1,04
0,5	1,00	0,98	1,00	1,00	1,05	1,06	1,05
0,4	1,00	1,00	1,00	1,05	1,04	1,05	1,07
0,3	1,04	0,96	1,00	1,06	1,08	1,10	1,11
0,2	1,00	1,00	1,07	1,15	1,15	1,14	1,14
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,31	1,24	1,17

B) Métodos do CEB

Na tabela 3, indicam-se os resultados obtidos com o método do CEB/78. Os resultados são equivalentes aos obtidos com o método A da NBR-6118.

Tabela 3 - Erro do método do CEB/78

$\beta = l_e/d = 20 ; \lambda \cong 63 ; \delta = d'/d = 0,10$							
$\mu_1$	$\nu \downarrow$						
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
1,0	1,00	1,00	0,99	0,97	0,94	0,93	0,92
0,9	1,00	1,00	0,99	0,96	0,95	0,94	0,91
0,8	1,00	1,00	1,00	0,97	0,95	0,92	0,92
0,7	1,02	1,00	0,99	0,96	0,95	0,92	0,92
0,6	1,00	0,98	1,00	0,97	0,95	0,93	0,91
0,5	1,00	1,00	1,00	0,95	0,95	0,93	0,91
0,4	1,00	1,00	1,00	0,98	0,94	0,93	0,93
0,3	1,04	1,00	1,08	1,00	0,97	0,96	0,95
0,2	1,00	1,00	1,20	1,10	1,07	1,00	1,00
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,31	1,19	1,10

Na tabela 4, apresentam-se os resultados obtidos com o método do CEB/90. Esse método é equivalente ao método B da NBR-6118, tendo o inconveniente de ser um método iterativo.

Tabela 4 - Erro do método do CEB/90

$\beta = l_e/d = 20 ; \lambda \cong 63 ; \delta = d'/d = 0,10$							
$\mu_1$	$\nu \downarrow$						
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
1,0	1,01	1,01	1,01	1,02	1,01	1,01	1,01
0,9	1,01	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03	1,02
0,8	1,01	1,01	1,03	1,02	1,02	1,02	1,03
0,7	1,02	1,02	1,01	1,03	1,04	1,01	1,02
0,6	1,02	1,00	1,04	1,05	1,04	1,04	1,02
0,5	1,00	1,02	1,04	1,04	1,05	1,04	1,02
0,4	1,03	1,03	1,05	1,07	1,04	1,03	1,03
0,3	1,04	1,04	1,12	1,09	1,10	1,06	1,05
0,2	1,07	1,08	1,27	1,25	1,15	1,09	1,05
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,23	1,10	1,00

C) Métodos da norma espanhola

Na tabela 5, apresentam-se os resultados obtidos com o método A da norma espanhola. A precisão desse método é equivalente à precisão dos métodos da NBR-6118 e do CEB.

Tabela 5 - Erro do método A da norma espanhola

$\beta = l_e/d = 20 ; \lambda \cong 63 ; \delta = d'/d = 0,10$							
$\mu_1$	$\nu \downarrow$						
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
1,0	0,99	0,99	0,98	0,99	0,98	0,98	0,99
0,9	1,00	0,99	0,99	0,98	0,99	1,00	0,98
0,8	1,00	1,00	0,99	0,99	0,99	0,98	1,00
0,7	1,00	0,98	0,99	0,99	1,00	0,98	0,99
0,6	1,00	0,98	0,98	1,00	1,00	1,00	1,00
0,5	0,98	0,98	0,98	0,98	1,00	1,00	1,00
0,4	1,00	1,00	0,97	1,00	1,00	1,00	1,01
0,3	1,00	0,96	1,00	1,03	1,05	1,04	1,05
0,2	1,00	1,00	1,07	1,15	1,15	1,11	1,09
0,1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,46	1,29	1,20

Os resultados correspondentes ao método B da norma espanhola são indicados na tabela 6. Observa-se que, em geral, a armadura do pilar é subdimensionada por esse método. Em alguns casos, o erro pode ser superior a 10% contra a segurança.

Tabela 6 - Erro do método B da norma espanhola

$\beta = l_e/d = 20 ; \lambda \cong 63 ; \delta = d'/d = 0,10$							
$\mu_1$	$\nu \downarrow$						
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
1,0	0,98	0,97	0,95	0,95	0,95	0,94	0,96
0,9	0,99	0,95	0,94	0,94	0,95	0,96	0,95

<b>0,8</b>	0,97	0,96	0,95	0,94	0,95	0,94	0,96
<b>0,7</b>	0,98	0,93	0,93	0,93	0,95	0,94	0,96
<b>0,6</b>	0,98	0,92	0,91	0,94	0,95	0,95	0,97
<b>0,5</b>	0,95	0,90	0,91	0,91	0,95	0,96	0,96
<b>0,4</b>	0,97	0,91	0,89	0,93	0,92	0,95	0,97
<b>0,3</b>	0,96	0,83	0,88	0,91	0,97	0,98	1,02
<b>0,2</b>	0,93	1,00	0,87	0,95	1,00	1,03	1,05
<b>0,1</b>	1,00	1,00	1,00	1,00	1,15	1,14	1,10

#### D) Método do ACI

Os resultados obtidos com o método do ACI são apresentados na tabela 7.

Tabela 7 - Erro do método do ACI

$\beta = l_e/d = 20 ; \lambda \cong 63 ; \delta = d'/d = 0,10$							
$\mu_1$	$\nu \downarrow$						
	<b>0,2</b>	<b>0,4</b>	<b>0,6</b>	<b>0,8</b>	<b>1,0</b>	<b>1,2</b>	<b>1,4</b>
<b>1,0</b>	1,12	1,33	1,59	2,02	2,76	4,78	>33
<b>0,9</b>	1,13	1,31	1,58	1,99	2,75	4,76	>32
<b>0,8</b>	1,11	1,31	1,58	1,97	2,71	4,61	>31
<b>0,7</b>	1,11	1,30	1,55	1,93	2,69	4,47	>30
<b>0,6</b>	1,10	1,25	1,53	1,94	2,62	4,41	>29
<b>0,5</b>	1,07	1,24	1,51	1,86	2,57	4,26	>27
<b>0,4</b>	1,06	1,22	1,46	1,86	2,45	4,07	>26
<b>0,3</b>	1,09	1,13	1,46	1,82	2,45	3,94	>24
<b>0,2</b>	1,00	1,00	1,40	1,85	2,41	3,69	>21
<b>0,1</b>	1,00	1,00	1,00	1,00	2,38	3,24	>15

O método do ACI depende da carga de Euler  $P_e$ , que por sua vez é função do módulo secante  $E_{cs}$ . Os demais métodos não dependem do módulo de deformação longitudinal do concreto. Uma vez que o módulo secante não cresce na mesma proporção que a resistência característica  $f_{ck}$ , pode-se verificar que o erro do método do ACI aumenta com o crescimento de  $f_{ck}$ . Para os demais métodos, o erro independe da resistência à compressão do concreto.

Desse modo, na elaboração da tabela 7 foi adotado  $f_{ck} = 20$  MPa e o módulo secante  $E_{cs}$  dado na equação (33).

Analisando a tabela 7, verifica-se que o método do ACI tende a superdimensionar a armadura. O erro cresce muito rapidamente com o aumento do esforço normal e o método torna-se inviável já para um esforço normal reduzido  $\nu = 0,6$ .

Quando  $\nu = 1,43$ , a excentricidade total  $e_{tot}$ , dada na equação (30), tende ao infinito

porque  $N_d = 0,75P_e$ . Por isso, o erro indicado na tabela 7 para  $\nu = 1,4$  é exagerado.

A precisão desse método depende basicamente do valor escolhido para a rigidez à flexão  $EI$ . Para melhorar a precisão, pode-se empregar um processo iterativo no qual as armaduras são incluídas no cálculo de  $EI$  em cada iteração.

## CONCLUSÕES

Dos resultados apresentados, pode-se concluir que o método A da nova NBR-6118, o método B da norma espanhola e o método do CEB/78 possuem o mesmo nível de precisão. Em alguns casos, esses métodos ficam contra a segurança, porém o erro é inferior a 10%. Para algumas combinações de esforços, quando o momento de primeira ordem  $\mu_1$  é pequeno, ambos os métodos superestimam a armadura.

O método B da nova NBR-6118 e o método do CEB/90 possuem a mesma precisão e fornecem uma solução a favor da segurança. O método do CEB/90 tem o inconveniente de ser um método iterativo. Ambos os métodos superestimam a armadura quando  $\mu_1$  é pequeno.

O método do ACI é o mais impreciso, devido à dificuldade de se avaliar corretamente a rigidez à flexão. Com a rigidez recomendada pelo ACI, o erro desse método torna-se inaceitável. O método B da nova NBR-6118 é derivado do método do ACI. Porém, com a rigidez  $\kappa$  recomendada, o método fica bastante preciso.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. American Concrete Institute - *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95)*. Detroit, 1995.

2. Araújo, J. M. - *Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado*. (Dissertação de Mestrado), UFRGS, Porto Alegre, 1984.

<http://www.mikrus.com.br/ed.dunas/>

3. Araújo, J. M. - *Pilares Esbeltos de Concreto Armado - Algoritmos para análise e dimensionamento*. Editora da FURG, Rio Grande, 1993.

4. Araújo, J. M. - *Curso de Concreto Armado, V.3*. Editora Dunas, Rio Grande, 1999.

5. Associação Brasileira de Normas Técnicas - *Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado: NBR-6118*. Rio de Janeiro, 1980.

6. Associação Brasileira de Normas Técnicas - *Projeto de Estruturas de Concreto*. Projeto de revisão da NBR-6118. Agosto, 2001.

7. Chen, Wai-Fah ; Atsuta, T. - *Theory of Beam-Columns, V.1*. McGraw-Hill, New York, 1976.

8. Comisión Permanente del Hormigón - *Instrucción de Hormigón Estructural*. Madrid, 1999.

9. Comité Euro-International du Béton - *CEB/FIP Manual of Buckling and Instability*, 1978.

10. Comité Euro-International du Béton - *CEB/FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.

## **DADOS BIBLIOGRÁFICOS DO AUTOR**

### **José Milton de Araújo**

Engenheiro Civil, UFES, 1981.

Mestre em Engenharia Civil, UFRGS, 1984.

Doutor em Engenharia, UFRGS, 1995.

Professor titular, DMC, FURG.

Autor de seis livros sobre concreto armado.