

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE LAJES MACIÇAS E LAJES NERVURADAS DE CONCRETO ARMADO

Nonlinear analysis of solid and ribbed reinforced concrete slabs

JOSÉ MILTON DE ARAÚJO

Professor Titular da Fundação Universidade Federal do Rio Grande – Rio Grande, RS, Brasil

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se um modelo não-linear para a análise de lajes de concreto armado. O modelo considera a não-linearidade física do concreto em compressão, bem como a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. A formulação é baseada na teoria de placas de Mindlin, incluindo as deformações no plano médio da laje. A análise estrutural é realizada com o emprego do método dos elementos finitos, adotando-se um algoritmo iterativo para a solução do sistema de equações não-lineares. Para as integrações ao longo da espessura da laje, adota-se uma discretização em camadas. Através da definição de propriedades equivalentes, pode-se analisar lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado.

Palavras-chave: Lajes de concreto armado, lajes nervuradas, análise não-linear.

ABSTRACT

In this work is presented a model to nonlinear analysis of reinforced concrete slabs. The model takes into account the material nonlinearity for concrete in compression, as well as the tension-stiffening effects. The formulation is based on the Mindlin's plate theory and includes membrane deformations. The finite element method and an iterative algorithm are used to nonlinear structural analysis. A layered procedure is employed to the integrations on the thickness of the slab. Defining effective properties is possible to analyze solid and ribbed reinforced concrete slabs.

Keywords: Reinforced concrete slabs, ribbed slabs, nonlinear analysis.

1 - INTRODUÇÃO

O conhecimento do comportamento das lajes de concreto armado, principalmente após a fissuração do concreto, é de grande interesse para a engenharia estrutural. Nesse sentido, são desenvolvidos estudos experimentais e numéricos, com o objetivo de analisar a resposta da estrutura frente a um carregamento dado. Apesar das dificuldades inerentes à experimentação em laboratório, alguns resultados experimentais podem ser encontrados na bibliografia [1,9,11,15].

Por outro lado, o desenvolvimento do método dos elementos finitos e dos modelos para análise não-linear de estruturas, tornou a análise numérica uma alternativa barata, e

relativamente confiável, para o estudo das lajes de concreto armado [4,7,8,10,13,14].

Quando se trata da análise de lajes maciças, emprega-se o denominado método laminar, em que a laje maciça é dividida em diversas lâminas ou camadas de pequena espessura. A matriz de rigidez e as ações nodais não-lineares são obtidas, considerando-se que as tensões não variam ao longo da espessura de uma mesma lâmina. Esse procedimento já é tradicional, tanto para a análise de placas, quanto para a análise de vigas e cascas de concreto armado.

O modelo laminar também pode ser empregado para a análise de lajes nervuradas de concreto armado. Para isto, deve-se trabalhar com propriedades equivalentes do concreto, para que o modelo seja capaz de

representar os vazios deixados na estrutura pela eliminação de parte do concreto da zona tracionada. Quando os vazios forem permanentemente preenchidos com blocos de um material estrutural secundário, esse efeito favorável pode ser considerado, adotando-se propriedades equivalentes para esse material.

Neste trabalho, apresenta-se um modelo não-linear para a análise de lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado. O modelo considera a não-linearidade física do concreto em compressão, bem como a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. A formulação é baseada na teoria de placas de Mindlin e inclui as deformações normais no plano médio da laje. A análise estrutural é realizada com o emprego do método dos elementos finitos, utilizando-se o elemento isoparamétrico quadrático de oito nós. Para cada nó, consideram-se cinco graus de liberdade, sendo três deslocamentos e duas rotações independentes do deslocamento transversal do plano da laje. Um algoritmo iterativo é empregado para a solução do sistema de equações não-lineares.

Na próxima seção, descreve-se o procedimento para análise de lajes maciças e de lajes nervuradas de concreto armado, empregando-se o modelo laminar. Os modelos constitutivos para o concreto e para o aço são apresentados na seção seguinte. Ao final do trabalho, comparam-se os resultados obtidos numericamente com respostas experimentais de lajes disponíveis na bibliografia.

2 - MODELO LAMINAR PARA ANÁLISE DE LAJES DE CONCRETO ARMADO

Na fig. 1, apresenta-se uma laje maciça de concreto armado situada no plano x-y, onde a espessura h foi dividida em n camadas de concreto de espessura constante $\Delta h = h/n$. A laje pode ter diversas camadas de armadura, orientadas arbitrariamente em relação ao sistema de eixos x-y.

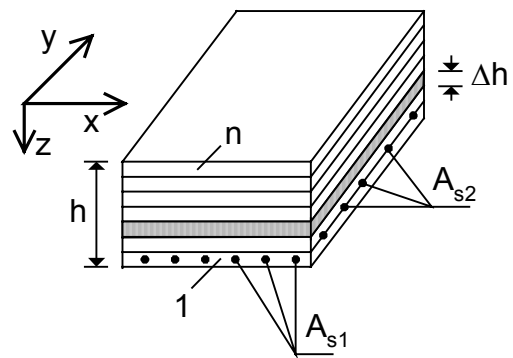


Fig. 1 – Laje maciça de concreto armado

As seguintes propriedades do concreto são empregadas no modelo constitutivo, descrito na próxima seção:

f_c = resistência à compressão simples;

f_{ct} = resistência à tração simples;

E_c = módulo de deformação longitudinal, tangente à origem do diagrama tensão-deformação;

ν = coeficiente de Poisson.

No caso da laje maciça indicada na fig. 1, essas propriedades são consideradas constantes e iguais para todas as n camadas de concreto.

Uma armadura genérica, de área A_{si} por unidade de comprimento, fazendo um ângulo ϕ_{si} com o eixo x, é substituída por uma lâmina contínua de espessura $t_i = A_{si}$, com as seguintes propriedades:

E_s = módulo de elasticidade do aço;

f_y = tensão de escoamento do aço.

Na fig. 2, indica-se uma seção transversal de uma laje nervurada, obtida através de um corte paralelo ao eixo x. Neste caso, admite-se que o sistema de eixos x-y é orientado segundo as direções das nervuras.

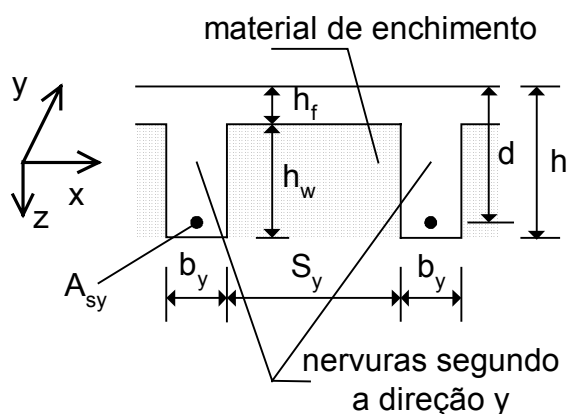


Fig. 2 – Seção transversal de laje nervurada

As nervuras da direção y , representadas na fig. 2, possuem uma largura b_y e uma altura h_w , abaixo da mesa de espessura h_f . O espaçamento entre essas nervuras é S_y . A armadura de flexão em cada nervura possui uma área total igual a A_{sy} . As armaduras existentes na mesa não estão representadas na fig. 2.

Um corte paralelo ao eixo y indicaria as nervuras da direção x , as quais têm largura b_x , altura h_w , espaçamento S_x e uma área de aço A_{sx} .

Assim como foi feito para a laje maciça, a laje nervurada é dividida em n camadas ao longo da espessura h . As camadas podem ter uma espessura constante $\Delta h = h/n$, ou pode-se adotar espessuras diferentes, sendo $\Delta h_f = h_f/n_1$, para a região da mesa, e $\Delta h_w = h_w/n_2$, para a região das nervuras, com $n = n_1 + n_2$.

Para as camadas de concreto situadas na mesa de espessura h_f , consideram-se as propriedades mecânicas originais f_c , f_{ct} , E_c e ν .

Para as camadas de concreto situadas na região das nervuras, adotam-se as propriedades equivalentes f_{ce} , f_{cte} e E_{ce} , dadas por

$$f_{ce} = \beta_c f_c; f_{cte} = \beta_c f_{ct}; E_{ce} = \beta_c E_c \quad (1)$$

onde

$$\beta_c = \sqrt{\beta_{cx} \beta_{cy}} \quad (2)$$

Os coeficientes redutores das propriedades do concreto, para a região das nervuras, são dados por

$$\beta_{cx} = \frac{b_x}{b_x + S_x}; \quad \beta_{cy} = \frac{b_y}{b_y + S_y} \quad (3)$$

Considera-se que o coeficiente de Poisson ν permanece com o seu valor original em toda a espessura da laje.

As armaduras contidas nas nervuras são representadas por lâminas de espessura t_x e t_y , dadas por

$$t_x = \frac{A_{sx}}{b_x + S_x}; \quad t_y = \frac{A_{sy}}{b_y + S_y} \quad (4)$$

Com esse procedimento, pode-se empregar o modelo laminar para a análise de lajes nervuradas, de modo idêntico ao que é feito para as lajes maciças.

Se houver material de enchimento com resistência mecânica satisfatória que justifique a sua consideração, pode-se definir propriedades equivalentes para o mesmo. Por exemplo, se E_b representa o módulo de elasticidade do material de enchimento, o módulo de elasticidade equivalente E_{be} é dado por

$$E_{be} = E_b \sqrt{\left(\frac{S_x}{b_x + S_x} \right) \left(\frac{S_y}{b_y + S_y} \right)} \quad (5)$$

Das equações (1) e (5), verifica-se que o modelo laminar equivalente considera a isotropia para a parte inferior da laje (na região das nervuras), mesmo no caso em que as nervuras possuem larguras e espaçamentos diferentes segundo as duas direções. Essa aproximação é justificável porque, no caso das lajes nervuradas de concreto armado, os efeitos da ortotropia, decorrentes do uso de nervuras diferentes segundo as duas direções, são pequenos, principalmente após a fissuração do concreto.

Observa-se que o modelo empregado para as lajes nervuradas é capaz de reproduzir o comportamento das lajes maciças. Para isto,

basta adotar $S_x = S_y = 0$ e desconsiderar o material de enchimento.

3 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A TEORIA DE PLACAS DE MINDLIN

Na teoria de placas de Mindlin[12], as rotações $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ são independentes da flecha $w(x, y)$ da superfície média da placa. Com isso, são consideradas as deformações por corte da placa. No caso das lajes de concreto armado, deve-se considerar, ainda, os deslocamentos $u_o(x, y)$ e $v_o(x, y)$ no plano da laje pois, de um modo geral, a superfície média não coincide com a superfície neutra.

Assim, ao empregar o método dos elementos finitos, consideram-se cinco graus de liberdade para cada nó do elemento: um deslocamento transversal, duas rotações e dois deslocamentos no plano do elemento [14].

A matriz de rigidez do elemento finito, \mathbf{K}_e , é dada por

$$\mathbf{K}_e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (6)$$

onde a integração é feita ao longo da área A_e do elemento.

Na equação (6), \mathbf{B} é a matriz que relaciona as deformações generalizadas com os deslocamentos nodais e \mathbf{D} é a matriz de constantes elásticas do material, integrada na espessura da laje.

Na montagem de \mathbf{K}_e , pode-se desconsiderar a contribuição das armaduras pois, como o equilíbrio é garantido através de um processo iterativo, a matriz de rigidez só é empregada para inicializar o processo. As armaduras são incluídas no cálculo das ações nodais não-lineares, durante os ciclos iterativos. Desse modo, a matriz \mathbf{D} inclui as propriedades do concreto e do material de enchimento, quando houver.

Considerando um material isotrópico e elástico linear sob um estado plano de tensões, tem-se a matriz de constantes elásticas

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson.

Para a obtenção da matriz \mathbf{D} para a laje nervurada, considera-se a laje equivalente composta pelos três materiais, indicada na fig. 3.

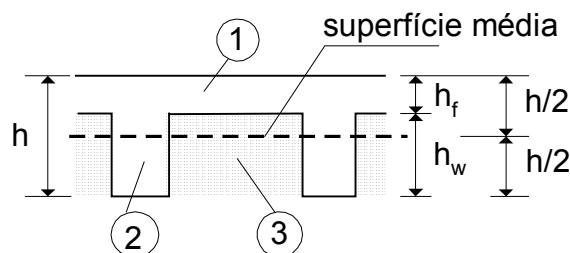


Fig. 3 – Laje equivalente composta por três materiais

O material 1, correspondendo ao concreto da mesa, possui as propriedades f_c , f_{ct} , E_c e ν . O material 2, representando o concreto das nervuras, possui as propriedades equivalentes f_{ce} , f_{cte} e E_{ce} , dadas na equação (1), e um coeficiente de Poisson igual a ν . O material 3, correspondendo ao enchimento, possui um módulo de elasticidade equivalente E_{be} , dado na equação (5), e um coeficiente de Poisson ν_b .

A matriz \mathbf{D} é dada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

A submatrizes \mathbf{D}_{11} e \mathbf{D}_{22} incluem os termos de estado plano de tensões e de flexão.

A submatriz de acoplamento $\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{21}^T$ não é nula porque, mesmo para o caso elástico linear, a superfície média da laje não coincide com a superfície neutra, como se deduz da fig. 3.

A submatriz \mathbf{D}_{33} inclui os termos correspondentes às deformações por corte.

Considerando os 3 materiais representados na fig. 3, tem-se que

$$\mathbf{D}_{11} = \sum_{j=1}^3 A_j \mathbf{E}_j \quad (9)$$

$$\mathbf{D}_{12} = \sum_{j=1}^3 S_j \mathbf{E}_j \quad (10)$$

$$\mathbf{D}_{22} = \sum_{j=1}^3 I_j \mathbf{E}_j \quad (11)$$

onde a matriz \mathbf{E}_j é obtida da equação (7), considerando o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material j .

Para o emprego das equações (9) a (11), utilizam-se as seguintes expressões para A_j , S_j e I_j :

a) Se $j = 1$:

$$A_j = h_f \quad (12)$$

$$S_j = h_f \left(\frac{h_f - h}{2} \right) \quad (13)$$

$$I_j = \frac{h_f^3}{12} + h_f \left(\frac{h_f - h}{2} \right)^2 \quad (14)$$

b) Se $j = 2, 3$:

$$A_j = h_w \quad (15)$$

$$S_j = h_w \left(\frac{h - h_w}{2} \right) \quad (16)$$

$$I_j = \frac{h_w^3}{12} + h_w \left(\frac{h - h_w}{2} \right)^2 \quad (17)$$

A submatriz \mathbf{D}_{33} é dada por

$$\mathbf{D}_{33} = \frac{5}{6} \sum_{j=1}^3 A_j \begin{bmatrix} G_j & 0 \\ 0 & G_j \end{bmatrix} \quad (18)$$

A constante $5/6$ leva em conta que as tensões de cisalhamento não são uniformes ao longo da espessura da laje. O módulo de elasticidade transversal $G_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}$ é

obtido com as propriedades do material $j = 1, 2, 3$.

Observa-se que a matriz \mathbf{D} é obtida através de integração exata, ao longo da espessura da laje.

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento finito, indicada na equação (6), adota-se um processo de integração seletiva. Para os termos correspondentes à submatriz \mathbf{D}_{33} , adota-se integração numérica com 2x2 pontos de Gauss. Os demais termos são integrados com integração completa, adotando-se 3x3 pontos de Gauss ao longo da superfície do elemento finito.

Após a montagem da matriz de rigidez global da estrutura e a introdução das condições de contorno, resolve-se o sistema de equações linearizadas para a obtenção da primeira aproximação para os deslocamentos nodais. O vetor de deformações generalizadas \mathcal{E} , em um ponto de integração situado na superfície de um elemento finito, é igual a $\mathcal{E} = \mathbf{B}\mathbf{U}_e$, onde \mathbf{U}_e representa o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Conhecido \mathcal{E} , pode-se obter as deformações normais ε_x , ε_y e a distorção γ_{xy} no centro de uma camada genérica, situada ao longo da espessura da laje. As distorções γ_{xz} e γ_{yz} não variam na espessura da laje.

As tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz} são dadas por

$$\tau_{xz} = \frac{5}{6} G_j \gamma_{xz} ; \quad \tau_{yz} = \frac{5}{6} G_j \gamma_{yz} \quad (19)$$

onde G_j é o módulo de elasticidade transversal do material considerado.

Na seção seguinte, apresentam-se os modelos constitutivos para o cálculo das tensões no concreto e nas armaduras, no plano x-y.

4 - MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS MATERIAIS

Na fig. 4, representa-se o diagrama tensão-deformação do concreto, obtido em um ensaio de compressão simples.

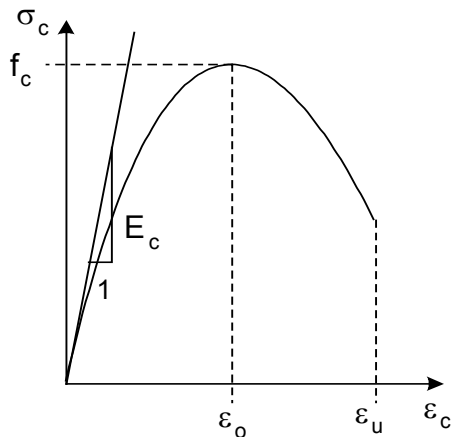


Fig. 4 – Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido

De acordo com o CEB/90 [5], a relação tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial pode ser representada por

$$\sigma_c = -f_c \left[\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right] \quad (20)$$

onde $k = -E_c \epsilon_o / f_c$ e $\eta = \epsilon_c / \epsilon_o$.

Para a deformação ϵ_o , correspondente à máxima tensão, adota-se o valor -0,22%.

A deformação de ruptura é $\epsilon_u = \eta_u \epsilon_o$, onde

$$\eta_u = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{2} + 1 \right) + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{k}{2} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{1/2} \quad (21)$$

Segundo o CEB/90, o módulo de deformação longitudinal inicial, E_c , pode ser estimado a partir da resistência média à compressão, f_c , através da expressão

$$E_c = 21500(f_c/10)^{1/3} \quad (22)$$

com f_c e E_c em MPa.

Para o concreto tracionado, adota-se o diagrama tensão-deformação indicado na fig. 5.

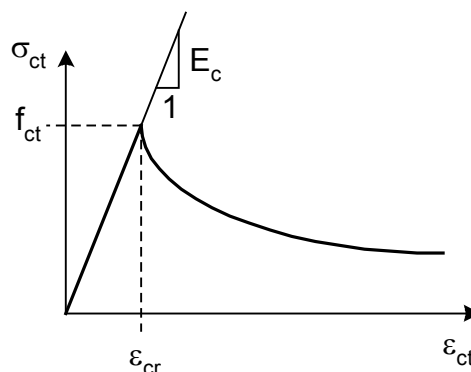


Fig. 5 – Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado

A tensão de tração no concreto, σ_{ct} , é dada por

$$\sigma_{ct} = E_c \epsilon_{ct}, \text{ se } \epsilon_{ct} \leq \epsilon_{cr} = f_{ct} / E_c \quad (23)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ct} \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ct}} \right)^\alpha, \text{ se } \epsilon_{ct} > \epsilon_{cr} \quad (24)$$

onde $\alpha = 0,15 f_{ct}$, com f_{ct} em MPa.

De acordo com o CEB/90, a resistência à tração do concreto, f_{ct} , pode ser estimada a partir da resistência média à compressão, f_c , através da expressão

$$f_{ct} = 1,40 \left(\frac{f_c - 8}{10} \right)^{2/3} \quad (25)$$

com f_c e f_{ct} em MPa.

A equação (24) leva em conta a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. Expressões semelhantes a essa têm sido empregadas por outros autores [3,17], porém, com um valor constante para o coeficiente α . Entretanto, a comparação dos resultados obtidos numericamente com a resposta experimental de diversas lajes de concreto armado indica que o coeficiente α não deve ser constante.

Na fig. 6, apresentam-se alguns diagramas tensão-deformação para diferentes valores do coeficiente α . Observa-se que o

comportamento pós-fissuração é tanto mais frágil, quanto maior for a resistência à tração do concreto.

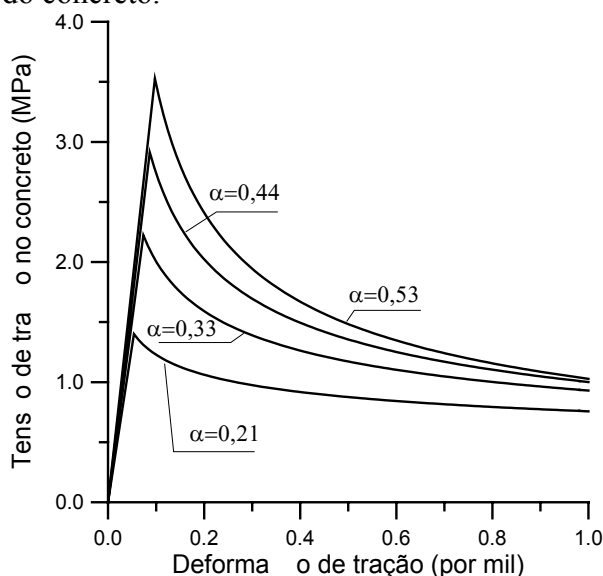


Fig. 6 – Diagramas tensão-deformação para diferentes valores de α

Após a obtenção das deformações normais ε_x , ε_y e da distorção γ_{xy} em uma camada genérica, localizada em um ponto de integração na superfície da laje, calculam-se as deformações principais no concreto ε_1 e ε_2 , com $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$. Para levar em conta o efeito de Poisson, empregam-se as deformações uniaxiais equivalentes, ε_{1e} e ε_{2e} , dadas por

$$\varepsilon_{1e} = \frac{\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2}{1 - \nu^2} \quad ; \quad \varepsilon_{2e} = \frac{\nu \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 - \nu^2} \quad (26)$$

onde $\nu = 0,2$ é o coeficiente de Poisson do concreto.

Entrando com as deformações uniaxiais equivalentes nos diagramas tensão-deformação do concreto, obtém-se as tensões principais σ_1 e σ_2 . Retornando ao sistema de eixos x-y, resultam as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} no concreto.

Esse procedimento é empregado enquanto o concreto não estiver fissurado, ou seja, enquanto $\varepsilon_{1e} < \varepsilon_{cr}$.

Quando surge uma fissura na camada considerada, sua orientação é fixada. Considera-se que a fissura é perpendicular à

direção da deformação principal máxima ε_1 . O ângulo ϕ , entre a direção de ε_1 e o eixo x é fixado. Consideram-se, desse modo, dois sistemas de eixos: o sistema global x-y e o sistema local 1-2, com a direção 1, perpendicular à fissura, fazendo um ângulo ϕ com o eixo x.

A partir do surgimento da fissura, despreza-se o coeficiente de Poisson do concreto. As deformações no sistema local 1-2 são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

onde $c = \cos \phi$ e $s = \sin \phi$.

Entrando com as deformações ε_1 e ε_2 nos diagramas tensão-deformação do concreto, obtém-se as tensões normais σ_1 e σ_2 . A tensão tangencial é dada por $\tau_{12} = G_{12} \gamma_{12}$, onde G_{12} é o módulo de corte do concreto fissurado [6,16,17].

Nesse trabalho, emprega-se a expressão

$$G_{12} = (E_1 + E_2)/4 \quad (28)$$

onde $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_1$ e $E_2 = \sigma_2/\varepsilon_2$ são os módulos de deformação secantes nas direções 1 e 2, respectivamente.

Obtidas as tensões $\sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}\}^T$ no sistema local 1-2, retorna-se ao sistema global x-y através da relação $\sigma = R^T \sigma^*$, onde R é a matriz de rotação que aparece na equação (27) e $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$ é o vetor de tensões no concreto no sistema x-y.

Ao empregar o modelo constitutivo, adotam-se as propriedades f_c , f_{ct} , E_c e ν para o concreto da mesa da laje (material 1 indicado na fig. 3). Para o concreto das nervuras (material 2 representado na fig. 3), deve-se adotar as propriedades equivalentes f_{ce} , f_{cte} e E_{ce} no lugar de f_c , f_{ct} e E_c , respectivamente.

Para os aços, adota-se um comportamento elasto-plástico perfeito em tração e em

compressão. Assim, se ε_s é a deformação normal na direção das armaduras, a tensão σ_s correspondente é dada por

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s, \text{ se } |\varepsilon_s| < f_y / E_s \quad (29)$$

$$\sigma_s = f_y \left(\varepsilon_s / |\varepsilon_s| \right), \text{ se } |\varepsilon_s| \geq f_y / E_s \quad (30)$$

onde f_y é a tensão de escoamento e E_s é o módulo de elasticidade do aço.

Neste trabalho, adota-se $E_s = 200$ GPa.

Definindo o vetor de deformações $\mathcal{E} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$, obtém-se a deformação normal nas armaduras através da relação $\varepsilon_s = \mathbf{R}_s \mathcal{E}$, onde a matriz de rotação \mathbf{R}_s é dada por

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi_s & \sin^2 \phi_s & \sin \phi_s \cos \phi_s \end{bmatrix} \quad (31)$$

sendo ϕ_s o ângulo entre a direção da armadura e o eixo x.

Após o cálculo da tensão σ_s na armadura, retorna-se ao sistema x-y, obtendo-se as tensões $\{\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \tau_{sxy}\} = \sigma_s \mathbf{R}_s$.

A consideração do material de enchimento exige a definição de modelos constitutivos para o mesmo. Isto pode ser feito de maneira análoga ao que foi apresentado para o concreto. Entretanto, o material de enchimento não é considerado nos exemplos apresentados a seguir. Por isso, a modelagem desse material será omitida.

Após o cálculo das tensões no concreto e nas armaduras, efetuam-se as integrações na espessura da laje para a obtenção dos esforços solicitantes. Finalmente, esses esforços são integrados na área do elemento finito, para a obtenção do vetor de ações nodais não-lineares. Nesse processo, emprega-se a integração seletiva, adotando-se 2x2 pontos de Gauss, para os termos relativos aos esforços cortantes, e 3x3 pontos de Gauss, para os termos de flexão e estado plano[14].

Em virtude da não-linearidade física, resulta um desequilíbrio entre o vetor de cargas nodais e o vetor de ações nodais não-lineares, o que exige o emprego de um processo iterativo. Diversos algoritmos

iterativos têm sido desenvolvidos para a solução desse sistema de equações não-lineares. Neste trabalho, emprega-se o denominado método secante-Newton, como descrito em [2].

Incrementando a carga, pode-se obter uma resposta completa até a ruína da laje. Considera-se a ocorrência da ruína quando a deformação de compressão no concreto, ε_c , for menor que a deformação limite $\varepsilon_u = \eta_u \varepsilon_o$, com η_u dado na equação (21).

5 - RESULTADOS

O modelo desenvolvido neste trabalho foi implementado em um programa de elementos finitos para a análise de lajes de concreto armado[14]. Nesse programa, emprega-se o elemento finito isoparamétrico quadrático de 8 nós. Cada nó apresenta os 5 graus de liberdade, descritos anteriormente.

A seguir, apresentam-se as respostas obtidas para 6 lajes maciças e 6 lajes nervuradas, em comparação com resultados experimentais disponíveis na bibliografia.

5.1 - Lajes maciças

Na fig. 7, indicam-se as características geométricas das lajes maciças analisadas. Todas as lajes são quadradas, com lados iguais a L , sendo armadas com uma malha ortogonal. A armadura de área A_{s1} faz um ângulo ϕ_s com o eixo x. As distâncias das armaduras até o topo da laje são d_1 e d_2 , para as armaduras de áreas A_{s1} e A_{s2} , respectivamente.

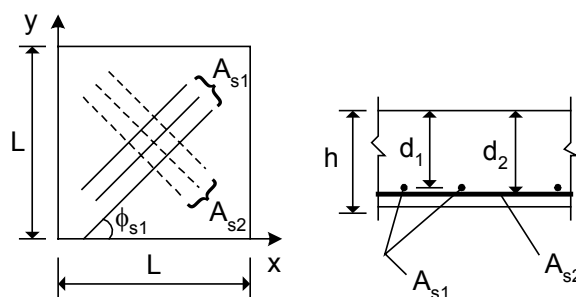


Fig. 7 – Geometria das lajes maciças

Na tabela 1, indicam-se as dimensões e as propriedades dos materiais das lajes.

Tabela 1 – Dimensões e propriedades dos materiais

Autor [ref.]	Laje	L cm	h cm	f_c MPa	f_y MPa
McNeice [11]		91,4	4,5	38,0	345
Taylor [15]	S1	183	5,1	35,0	376
	S6	183	5,1	35,3	420
	S7	183	4,4	38,2	376
Abdul-Wahab [1]	S7	150	7,5	36,0	398
	S8	150	9,5	28,5	398

Na tabela 2, indicam-se as armaduras existentes nas 6 lajes maciças analisadas. Observa-se que, na análise numérica, adotou-se $d_1 = d_2$, exceto para as lajes de Taylor. A laje S6, ensaiada por Taylor et al.[15], possui uma armadura em malha, inclinada de 45° em relação ao sistema de eixos x-y.

Tabela 2 – Armaduras das lajes maciças

Laje [ref.]	A_{s1} cm ² /m	A_{s2} cm ² /m	d_1 cm	d_2 cm	ϕ_{s1}
[11]	2,83	2,83	3,33	3,33	0
S1 [15]	2,34	2,80	4,38	3,91	0
S6 [15]	2,00	2,34	4,38	3,91	45°
S7 [15]	2,80	3,18	3,69	3,21	0
S7 [1]	3,00	3,00	6,30	6,30	0
S8 [1]	3,00	3,00	8,30	8,30	0

No ensaio realizado por McNeice[11], a laje foi apoiada apenas nos quatro cantos e foi submetida a uma carga concentrada P , aplicada no seu centro. A flecha foi medida no

ponto 1, situado a 7,62cm do centro da laje, medido na direção do eixo y.

Na fig. 8, apresentam-se as relações entre a carga aplicada e a flecha. Os pontos indicados nessa figura representam os resultados experimentais e a linha cheia corresponde à resposta teórica obtida com o modelo computacional. Para a análise numérica, a laje foi discretizada em 6x6 elementos finitos. Conforme se observa, há uma boa concordância entre a resposta teórica e os resultados experimentais para todos os estágios do carregamento.

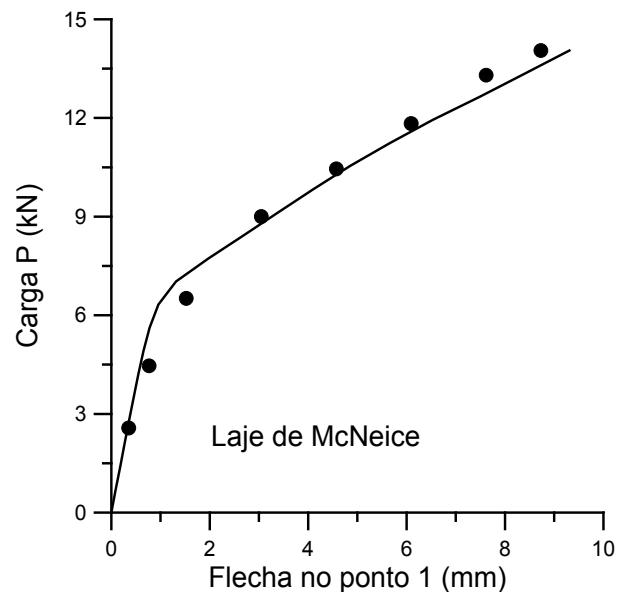


Fig. 8 - Laje maciça ensaiada por McNeice[11]

As lajes ensaiadas por Taylor et al.[15], foram simplesmente apoiadas nos quatro lados do contorno e foram submetidas a uma carga uniformemente distribuída. Nas figuras 9 a 11, apresentam-se as relações entre a carga total aplicada e a flecha no centro das lajes. Os pontos indicados nessas figuras representam os resultados experimentais e as linhas cheias são as respostas obtidas, discretizando-se as lajes em 10x10 elementos finitos.

Como se observa, o modelo numérico reproduz muito bem o comportamento experimental, exceto para a laje S7, nos estágios finais do carregamento.

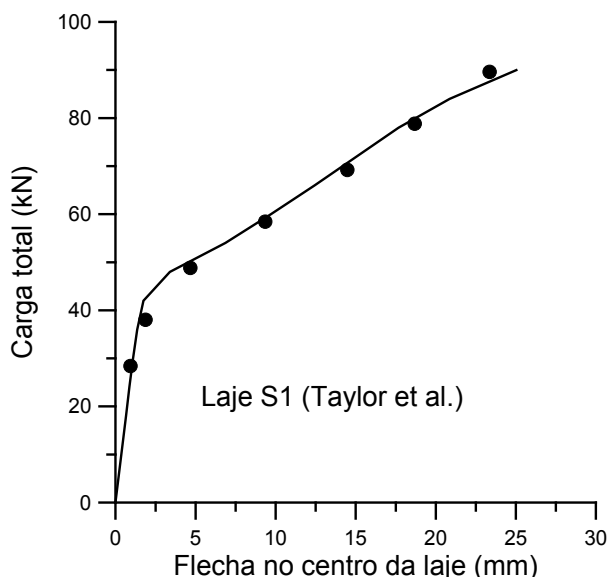


Fig. 9 - Laje maciça S1 - Taylor et al.[15]

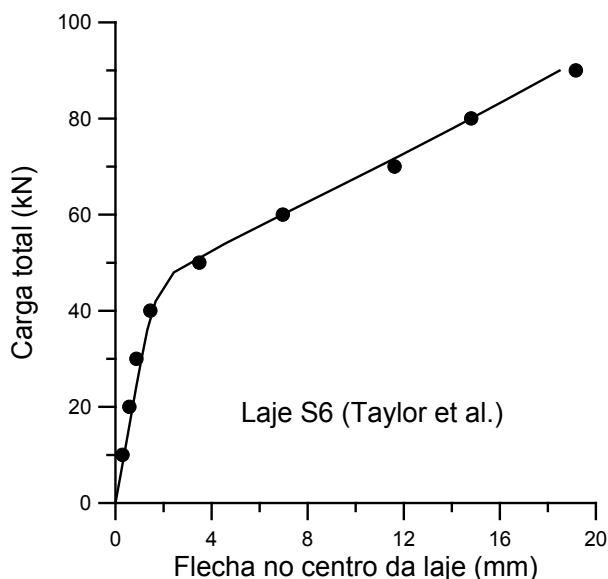


Fig. 10 - Laje maciça S6 - Taylor et al.[15]

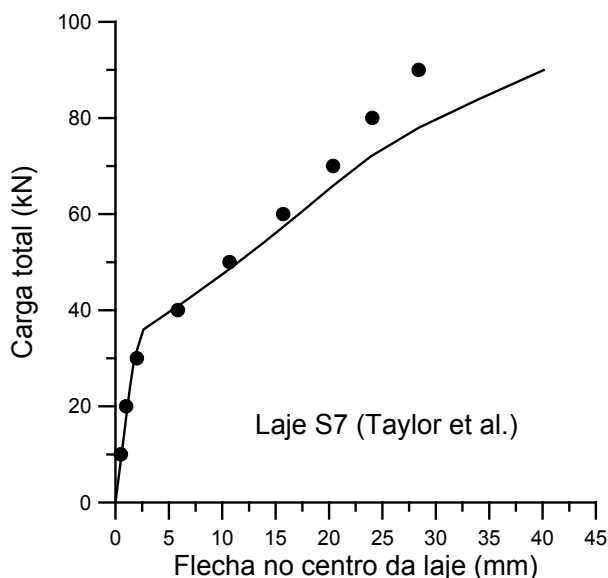


Fig. 11 - Laje maciça S7 - Taylor et al.[15]

As lajes maciças S7 e S8, ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil[1], foram simplesmente apoiadas nos quatro lados do contorno. A carga aplicada foi distribuída uniformemente sobre um quadrado de 30cm de lado, cujo centro coincide com o centro da laje. Na fig.12, apresentam-se as curvas obtidas, discretizando-se as lajes em 10x10 elementos finitos, juntamente com os pontos experimentais. Novamente, verifica-se uma boa concordância entre as respostas teóricas e os resultados experimentais.

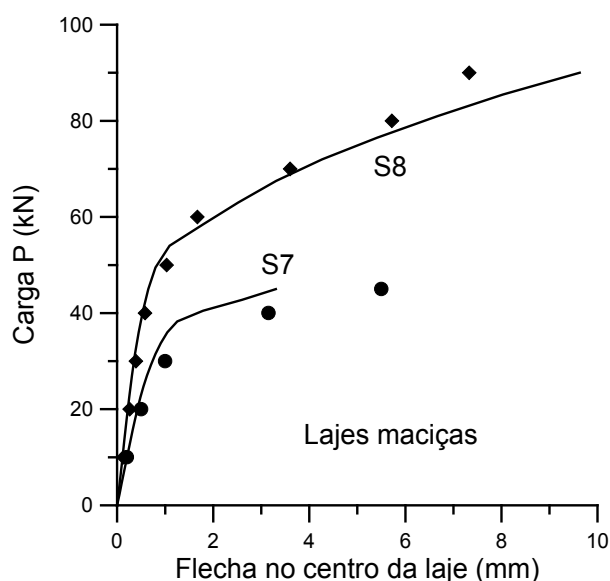


Fig. 12 - Lajes maciças ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil [1]

5.2 - Lajes nervuradas

Na tabela 3, indicam-se as características geométricas de seis lajes nervuradas ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil[1]. As lajes possuem nervuras iguais nas duas direções, isto é, $b = b_x = b_y$ e $S = S_x = S_y$. Todas as lajes são quadradas com lado $L = 150$ cm.

Tabela 3 –Dimensões das lajes nervuradas (cm)

Laje	b	h_f	h_w	h	S
S1	5,2	2,0	7,5	9,5	8,4
S2	5,2	2,0	7,5	9,5	11,5
S3	5,2	2,0	7,5	9,5	16,2
S4	5,2	2,0	7,5	9,5	24,8
S5	5,7	2,0	10,5	12,5	11,0
S6	4,7	2,0	4,5	6,5	12,0

Todas as seis lajes foram armadas, colocando-se uma barra de 8mm de diâmetro em cada nervura. A tensão de escoamento do aço é $f_y = 398 \text{ MPa}$.

Na tabela 4, indica-se a área de aço, A_s , a altura útil média, d , e a resistência à compressão do concreto, f_c , para as lajes nervuradas.

Tabela 4 – Armaduras e resistências do concreto

Laje	A_s (cm ² /m)	d (cm)	f_c (MPa)
S1	3,70	8,30	31,3
S2	3,00	8,30	32,0
S3	2,30	8,30	31,4
S4	1,70	8,30	28,9
S5	3,00	11,30	29,9
S6	3,00	5,30	29,1

As lajes nervuradas foram simplesmente apoiadas nos quatro lados do contorno e submetidas a uma carga distribuída sobre um quadrado de 30cm de lado, cujo centro coincide com o centro da laje. Para a análise numérica, empregou-se uma discretização em 10x10 elementos finitos.

Na fig.13, apresentam-se as curvas teóricas e os pontos experimentais para as lajes S1 a S4.

Essas quatro lajes possuem mesma espessura h e nervuras com a mesma largura b , sendo variado o espaçamento S entre as nervuras. Com isto, resultaram áreas de armadura, por unidade de comprimento, diferentes para as quatro lajes.

Conforme se observa, a laje S1, que possui o menor espaçamento entre nervuras e a maior área de aço, é a que apresenta a maior rigidez.

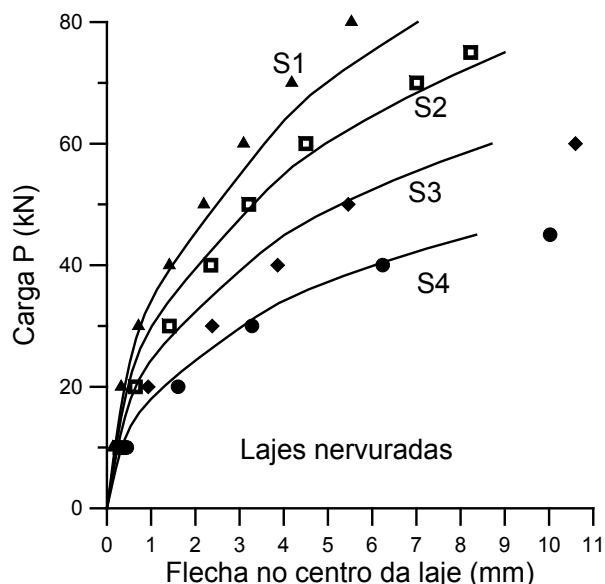


Fig. 13 - Lajes nervuradas ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil [1]

Na fig. 14, apresentam-se os resultados para as lajes S5 e S6. A laje S5 é mais rígida porque possui uma espessura maior. Neste caso, as lajes foram projetadas com largura e espaçamentos entre nervuras praticamente idênticos. A área da armadura, por unidade de comprimento, é a mesma para as duas lajes.

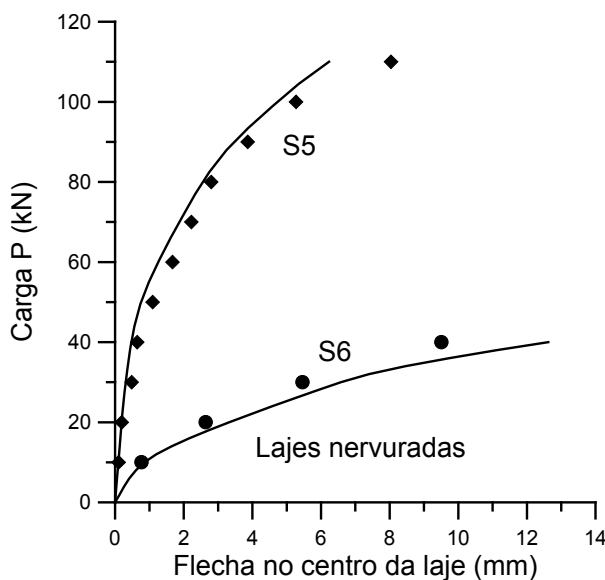


Fig. 14 - Lajes nervuradas ensaiadas por Abdul-Wahab e Khalil [1]

Observando as figuras 13 e 14, verifica-se que o modelo teórico consegue reproduzir satisfatoriamente o comportamento das lajes nervuradas de concreto armado.

6 - CONCLUSÕES

O modelo desenvolvido neste trabalho permite analisar lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado. Para isto, é necessário definir propriedades equivalentes para o concreto e para o material de enchimento.

O modelo foi testado, comparando-se as respostas teóricas com resultados experimentais de lajes maciças e de lajes nervuradas. Em todos os exemplos, obteve-se uma boa concordância entre a resposta teórica e os resultados experimentais.

Da análise de diversos resultados, verificou-se que um fator determinante para o comportamento das lajes de concreto armado é a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. Os modelos usualmente empregados para o concreto tracionado consideram um comportamento pós-fissuração independente da resistência à tração do concreto. Entretanto, os resultados experimentais indicam a existência dessa dependência, o que inviabiliza a utilização desses modelos para a análise de lajes nervuradas. Nestes casos, a resistência à tração equivalente do concreto pode sofrer grandes variações, dependendo das características geométricas das lajes nervuradas. O modelo proposto leva em conta o valor da resistência à tração no comportamento pós-fissuração do concreto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Abdul-Wahab, H. M. S., Khalil, M. H. - *Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs*. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, No. 2, p.219-227, 2000.
2. Araújo, J. M.; Bignon, P. G. - *Métodos de minimização para análise não-linear de estruturas*. Relatório de Pesquisa RP-110/93, CPGEC, UFRGS, Porto Alegre, 1993.
3. Araújo, J. M.; Campos Filho, A. - *Modelo bidimensional para análise de vigas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, No. 34, p.9-12, Lisboa, 1992.

4. Bashur, F. K., Darwin, D. - *Nonlinear model for reinforced concrete slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST1, p. 157-170, 1978.
5. Comité Euro-International du Béton - *CEB-FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.
6. Darwin, D., Pecknold, D. A. - *Analysis of RC shear panels under cyclic loading*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 102, No. ST2, p.355-369, 1976.
7. Gilbert, R. I., Warner, R. F. - *Tension stiffening in reinforced concrete slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST12, p.1885-1900, 1978.
8. Huang, Z., Burgess, I. W., Plank, R. J. - *Effective stiffness modelling of composite concrete slabs in fire*. Engineering Structures, Vol. 22, p.1133-1144, 2000.
9. Jain, S. C., Kennedy, J. B. - *Yield criterion for reinforced concrete slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST3, p.631-644, 1974.
10. Jiang, J., Mirza, F. A. - *Nonlinear analysis of reinforced concrete slabs by a discrete finite element approach*. Computers & Structures, Vol. 65, No. 4, p.585-592, 1997.
11. Jofriet, J. C.; McNeice, G. M. - *Finite element analysis of reinforced concrete slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST3, p.785-806, 1971.
12. Mindlin, R. D. - *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. Journal of Applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 18, No. 1, p.31-38, 1951.
13. Owen, D. R. J.; Figueiras, J. A.; Damjanic, F. - *Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 41, No. 3, p.323-366, 1983.

14. Real, M. V. - *Análise estática de lajes de concreto armado incluindo não-linearidade física e geométrica*. Dissertação de mestrado, CPGEC, UFRGS, Porto Alegre, 1990.

15. Taylor, R., Maher, D. R. H., Hayes, B. - *Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs*. Magazine of Concrete Research, Vol.18, No.55, p.85-94, 1966.

16. Vecchio, F. J., Collins, M. P. - *Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes*. Structural Journal, American Concrete Institute, Vol. 86, No.1, p.26-35, 1989.

17. Wang, T.; Hsu, T. T. C. - *Nonlinear finite element analysis of concrete structures using new constitutive models*. Computers & Structures, Vol. 79, pp.2781-2791, 2001.