

# **Estruturas de Concreto**

ISSN 1519-4086

**Número 4**

## **MODELOS DE PREVISÃO DA FLUÊNCIA E DA RETRAÇÃO DO CONCRETO**

**JOSÉ MILTON DE ARAÚJO**



**Editora DUNAS**

**Estruturas de Concreto** é uma publicação seriada com o objetivo de abordar diversos temas relativos ao projeto e à construção das estruturas de concreto simples, concreto armado e concreto protendido. Em cada número da série, são analisados aspectos específicos, visando manter atualizada a bibliografia nessa área da Engenharia Civil.

A publicação não se destina a servir como texto básico para um curso completo sobre estruturas de concreto. Por isso, não há nenhuma preocupação com a seqüência e com a profundidade com que os diversos assuntos são abordados. Porém, a publicação é sugerida como material didático complementar aos estudantes e aos profissionais interessados nessa área.

**Estruturas de Concreto**

**ISSN 1519-4086**

**Número 4**

**MODELOS DE PREVISÃO DA FLUÊNCIA E  
DA RETRAÇÃO DO CONCRETO**

**JOSÉ MILTON DE ARAÚJO**

Professor titular da FURG

Doutor em Engenharia

**Editora DUNAS**

# ESTUTURAS DE CONCRETO

© Copyright Editora DUNAS

A663c Araújo, José Milton de

Estruturas de concreto : modelos de previsão da fluência e da retração do concreto /  
José Milton de Araújo. - Rio Grande: Dunas, 2002, Número 4

## Bibliografia

1. Concreto. I. Título

CDU 624.012.45

CDD 624.1834

ISSN 1519-4086

Editora DUNAS

Rua Tiradentes, 105 - Cidade Nova

96211-080 RIO GRANDE - RS - Brasil

e-mail: [ed.dunas@mikrus.com.br](mailto:ed.dunas@mikrus.com.br)

---

Número 4, Abril de 2002

---

## SUMÁRIO

1. O comportamento reológico do concreto .....	1
2. Fluência do concreto.....	2
3. Modelo do CEB/90 para a fluência do concreto.....	4
4. Modelo do CEB/78 para a fluência do concreto.....	12
5. Comparação entre os modelos de fluência do CEB/90 e do CEB/78.....	16
6. Modelos para fluência básica .....	19
7. Modelo do CEB/90 para a retração do concreto.....	20
8. Modelo do CEB/78 para a retração do concreto.....	22
Referências Bibliográficas.....	26

## 1 - O comportamento reológico do concreto

O comportamento reológico do concreto, isto é, sua deformabilidade dependente do tempo, tem uma considerável importância na análise estrutural. As deformações diferidas do concreto, ou seja, as deformações dependentes do tempo, são convencionalmente separadas em duas: a fluência e a retração. A fluência é o acréscimo contínuo das deformações que ocorre mesmo para uma tensão constante. A retração é a redução de volume do material na ausência de uma carga externa. Tanto a fluência, quanto a retração, diminuem com a redução do fator água-cimento e do consumo de cimento.

Em virtude dos efeitos do envelhecimento, a fluência do concreto depende, além da duração do carregamento, da idade de aplicação das cargas. O comportamento do material também é influenciado pela troca de água com o meio ambiente. Quanto mais seco for o meio externo, maiores serão a fluência e a retração. Uma vez que a troca de água é facilitada em um elemento estrutural esbelto, a fluência e a retração serão tanto maiores, quanto menores forem as dimensões do elemento.

A temperatura ambiente é outro fator que afeta as deformações do material. A elevação da temperatura acelera o processo de envelhecimento e também o fenômeno da fluência. Para temperaturas abaixo de 5°C, a fluência praticamente cessa. Dentre os outros fatores que afetam o comportamento reológico do concreto incluem-se o tipo de cimento, os aditivos e as propriedades elásticas dos agregados<sup>(5)</sup>.

A fluência e a retração apresentam uma série de efeitos indesejáveis, como: aumento das flechas de lajes e vigas; perdas de protensão em estruturas de concreto protendido; aumento da curvatura de pilares devido à fluência, o que introduz momentos fletores adicionais; fissuração das superfícies externas devido à retração; introdução de esforços indesejáveis em estruturas aporticadas devidos à retração (e, também, à dilatação térmica) o que exige a adoção de juntas, etc.

Por outro lado, a fluência do concreto contribui favoravelmente para a eliminação de concentrações de tensões (em nós de pórticos, por exemplo) e de tensões impostas por recalques de apoios em estruturas hiperestáticas<sup>(6)</sup>.

Diversas formulações têm sido propostas para representar esse complexo fenômeno. Algumas dessas formulações são apresentadas neste trabalho.

A deformação total em um instante  $t$ ,  $\varepsilon_c(t)$ , de um elemento de concreto carregado no instante  $t_o$  com uma tensão constante  $\sigma_c(t_o)$ , pode ser escrita na forma

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t_o) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad (1.1)$$

onde

$\varepsilon_{ci}(t_o)$  = deformação inicial no instante de aplicação da carga;

$\varepsilon_{cc}(t)$  = deformação de fluência no instante  $t > t_o$ ;

$\varepsilon_{cs}(t)$  = deformação de retração;

$\varepsilon_{cT}(t)$  = deformação térmica (dilatação).

Da equação (1.1), observa-se que uma parcela da deformação total depende da tensão aplicada,  $\varepsilon_{c\sigma}(t)$ , e outra parcela é independente da tensão,  $\varepsilon_{cn}(t)$ . Essas parcelas são dadas por

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \varepsilon_{ci}(t_o) + \varepsilon_{cc}(t) \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{cn}(t) = \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t) \quad (1.3)$$

A deformação  $\varepsilon_{cn}(t)$  é volumétrica, ou seja, só causa expansão ou contração do elemento estrutural. A deformação  $\varepsilon_{c\sigma}(t)$  pode introduzir distorções no elemento e depende das tensões aplicadas.

A deformação térmica,  $\varepsilon_{cT}$ , é dada por

$$\varepsilon_{cT} = \alpha \Delta T \quad (1.4)$$

onde  $\alpha = 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  é o coeficiente de dilatação térmica do concreto e  $\Delta T$  é a variação de temperatura.

## 2 - Fluência do concreto

A fluência do concreto pode ser classificada em fluência básica e fluência por secagem. A fluência básica é a que se desenvolve sem transferência de água entre o concreto e o meio ambiente. Nos ensaios de laboratório, a fluência básica é determinada em corpos de prova

selados. Para isto, o corpo de prova é envolvido por uma tira de borracha que é colada com resina epóxi. Dessa forma, evita-se a perda de umidade para o meio exterior.

Em estruturas de grandes dimensões, como por exemplo as barragens de concreto massa, a fluência básica é predominante. Em estruturas esbeltas, como as estruturas usuais dos edifícios, a fluência por secagem torna-se importante.

Além disso, verifica-se experimentalmente que uma parcela da deformação de fluência é recuperável (a deformação elástica diferida) e outra parcela é irrecuperável (a deformação plástica diferida).

Na fig. 2.1, indicam-se as variações da deformação de um corpo de prova de concreto carregado no instante  $t_o$ . A tensão aplicada é mantida constante até o instante  $t_1$ , quando o corpo de prova é descarregado. Conforme está indicado na figura, a deformação inicial (imediate ao carregamento) é  $\varepsilon_{ci}$ . As deformações aumentam com o passar do tempo devido ao fenômeno da fluência.

Quando o corpo de prova é descarregado, ocorre a recuperação imediata de uma parcela da deformação. Esta parcela será aproximadamente igual a  $\varepsilon_{ci}$  se a tensão aplicada for pequena em relação à resistência à compressão do concreto. Com o passar do tempo, haverá a recuperação da parcela  $\varepsilon_{ed}$  da fluência. Entretanto, a parcela  $\varepsilon_{pd}$  será residual.

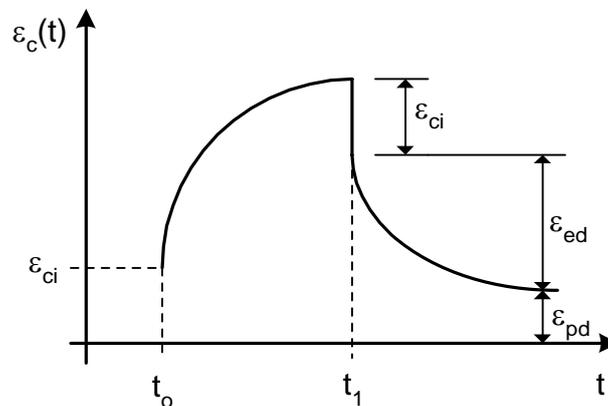


Fig. 2.1 - Parcelas da deformação de fluência

De acordo com os modelos de previsão do CEB<sup>(2,3)</sup>, a deformação de fluência é dada por

$$\varepsilon_{cc}(t) = \frac{\sigma_c(t_o)}{E_c} \phi(t, t_o) \quad (2.1)$$

onde  $E_c$  é o módulo tangente de deformação longitudinal do concreto aos 28 dias de idade e  $\phi(t, t_o)$  é o coeficiente de fluência.

A linearidade entre a deformação de fluência e a tensão, representada na equação (2.1), é válida para as tensões de serviço (com  $|\sigma_c(t_o)| < 0,4 f_{cm}(t_o)$ ). Para tensões mais elevadas a relação é não-linear.

A deformação dependente da tensão,  $\varepsilon_{c\sigma}(t)$ , é dada por

$$\varepsilon_{c\sigma}(t) = \sigma_c(t_o) \left[ \frac{1}{E_c(t_o)} + \frac{\phi(t, t_o)}{E_c} \right] = \sigma_c(t_o) J(t, t_o) \quad (2.2)$$

onde  $E_c(t_o)$  é o módulo tangente de deformação longitudinal na idade  $t_o$  e  $J(t, t_o)$  é a função de fluência.

A função  $J(t, t_o)$  representa a deformação total dependente da tensão, para uma tensão unitária aplicada em  $t_o$ .

### 3 - Modelo do CEB/90 para a fluência do concreto

De acordo com o CEB/90<sup>(3)</sup>, o módulo de deformação tangente  $E_c$  aos 28 dias de idade pode ser obtido através da expressão

$$E_c = 21500 \left( \frac{f_{cm}}{10} \right)^{1/3}, \text{ MPa} \quad (3.1)$$

onde  $f_{cm} = f_{ck} + 8$  MPa é a resistência média à compressão, estimada a partir da resistência característica  $f_{ck}$ , ambas aos 28 dias de idade.

O módulo  $E_c(t_o)$  em uma idade genérica  $t_o$  dias pode ser estimado através da equação

$$E_c(t_o) = [\beta_{cc}(t_o)]^{1/2} E_c \quad (3.2)$$

onde

$$\beta_{cc}(t_o) = \exp \left\{ s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t_o} \right)^{1/2} \right] \right\} \quad (3.3)$$

sendo  $s = 0,20$  para cimentos de alta resistência inicial,  $s = 0,25$  para cimentos de endurecimento normal e  $s = 0,38$  para cimentos de endurecimento lento.

O coeficiente de fluência do modelo do CEB/90 é dado por

$$\phi(t, t_o) = \phi_o \beta_c(t - t_o) \quad (3.4)$$

com  $t$  e  $t_o$  em dias.

O coeficiente  $\phi_o$  é escrito na forma

$$\phi_o = \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_o) \quad (3.5)$$

onde

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/100}{0,46(h_o/100)^{1/3}} \quad (3.6)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{(f_{cm}/10)^{0,5}} \quad (3.7)$$

$$\beta(t_o) = \frac{1}{0,1 + t_o^{0,2}} \quad (3.8)$$

Nessas expressões,  $RH$  é a umidade relativa do ambiente (%),  $f_{cm}$  é a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias de idade (em MPa) e  $h_o$  é uma espessura equivalente do elemento estrutural (em mm).

A espessura  $h_o$  é definida por

$$h_o = \frac{2A_c}{u} \quad (3.9)$$

onde  $A_c$  é a área da seção transversal do elemento e  $u$  é o perímetro em contato com a atmosfera.

A função  $\beta_c(t - t_o)$ , que representa o desenvolvimento da fluência com o tempo, é dada por

$$\beta_c(t - t_o) = \left( \frac{t - t_o}{\beta_H + t - t_o} \right)^{0,3} \quad (3.10)$$

onde

$$\beta_H = 150 \left\{ 1 + \left( 1,2 \frac{RH}{100} \right)^{18} \right\} \frac{h_o}{100} + 250 \leq 1500 \quad (3.11)$$

Para levar em conta os diferentes tipos de cimento, a equação (3.8) deve ser avaliada com uma idade modificada,  $t_{o,c}$  dada por

$$t_{o,c} = t_o \left( \frac{9}{2 + t_o^{1,2}} + 1 \right)^\alpha \geq 0,5 \text{ dias} \quad (3.12)$$

onde  $t_o$  é a idade de aplicação da carga, corrigida de acordo com a equação (3.13) para levar em conta os efeitos da temperatura de cura na maturidade do concreto.

O coeficiente  $\alpha$  vale -1 para cimentos de endurecimento lento, 0 para cimentos de endurecimento normal e 1 para cimentos de alta resistência inicial.

O efeito da temperatura na maturidade do concreto, quando ela é diferente de 20°C, é levado em conta substituindo-se a idade real  $t_o$  por uma idade equivalente  $t_e$ , dada por

$$t_e = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp \left[ 13,65 - \frac{4000}{273 + T_i} \right] \quad (3.13)$$

onde  $\Delta t_i$  é o número de dias em que a temperatura foi igual a  $T_i$  °C.

A idade corrigida dada em (3.12) deve ser usada na equação (3.8). A duração do carregamento  $t - t_o$  a ser considerada na equação (3.10) é o tempo real sob carga.

Nas figuras 3.1 a 3.3, são apresentadas as variações do coeficiente de fluência com a idade para um concreto com  $f_{ck} = 20\text{MPa}$  aos 28 dias de idade. Nessas figuras, admite-se que a temperatura ambiente é igual a  $20^\circ\text{C}$  e o cimento é de endurecimento normal. Assim, não é necessário fazer nenhuma correção na idade  $t_o$ .

Na fig. 3.1, mostra-se o efeito da idade de aplicação da carga,  $t_o$ , no coeficiente de fluência. Nessa figura, foram fixados os valores  $RH = 70\%$  (umidade relativa) e  $h_o = 150\text{mm}$  (espessura da peça). Observa-se que, quanto mais jovem for o concreto quando da aplicação do carregamento, maior será o coeficiente final de fluência.

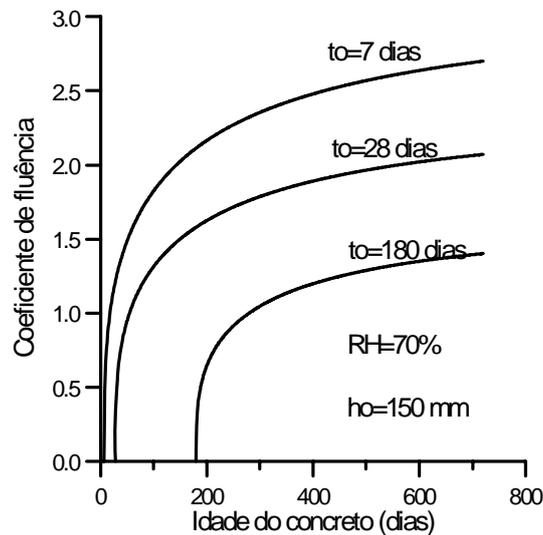


Fig. 3.1 - Efeito da idade de aplicação da carga no coeficiente de fluência

Na fig. 3.2, indica-se a variação do coeficiente de fluência com a espessura do elemento estrutural. Nessa figura, são fixados os valores  $RH = 70\%$  e  $t_o = 28$  dias. Observa-se que, quanto mais esbelto for o elemento estrutural, maior será o valor do coeficiente final de fluência. Admitindo uma peça de seção quadrada, os valores  $h_o = 50\text{mm}$  e  $h_o = 600\text{mm}$  corresponderiam a seções de lados iguais a  $10\text{cm}$  e  $120\text{cm}$ , respectivamente. O coeficiente de fluência para  $h_o = 50\text{mm}$  é cerca de  $60\%$  superior ao correspondente a  $h_o = 600\text{mm}$ , o que mostra a grande influência das dimensões dos elementos estruturais no valor desse coeficiente.

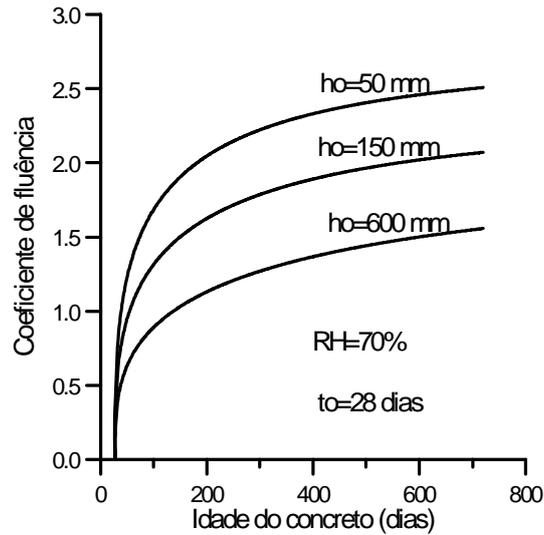


Fig. 3.2 - Efeito da espessura no coeficiente de fluência

Na fig. 3.3, são mostradas as variações do coeficiente de fluência com a umidade relativa do ambiente para  $h_o = 150$  mm e  $t_o = 28$  dias. Verifica-se que, quanto mais seco for o ambiente, maior será o coeficiente de fluência.

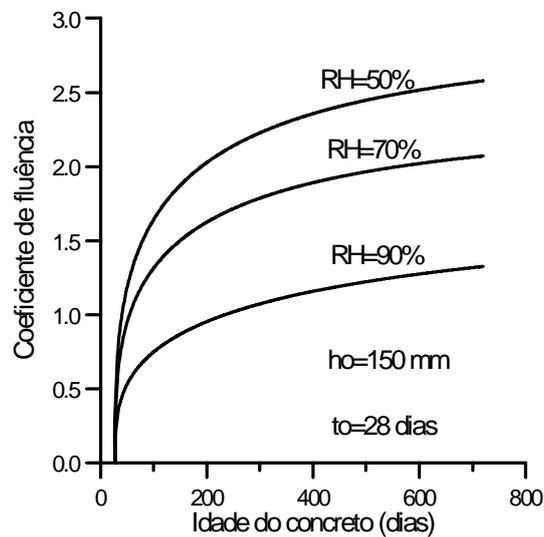


Fig. 3.3 - Efeito da umidade ambiente no coeficiente de fluência

Conforme se observa, a formulação do CEB/90 leva em conta os principais fatores que afetam a fluência do concreto: idade do carregamento, espessura do elemento estrutural, umidade e temperatura ambientes, tipo de cimento, resistência do concreto.

O coeficiente final de fluência,  $\phi_\infty$ , pode ser obtido da equação (3.4), tomando-se um valor muito alto para a idade  $t$ . Observa-se que, quando  $t$  cresce, o valor da função  $\beta_c(t - t_o)$  tende a 1. Logo, o coeficiente final de fluência,  $\phi_\infty = \phi(t_\infty, t_o)$ , é igual a  $\phi_o$ . É fácil verificar que, para o caso em que  $t_o = 28$  dias, resulta a seguinte expressão

$$\phi_\infty \cong 8,2 \frac{\phi_{RH}}{\sqrt{f_{ck} + 8}}, \text{ com } f_{ck} \text{ em MPa} \quad (3.14)$$

Na tabela 3.1, são apresentados alguns valores de  $\phi_\infty$  para um concreto com  $f_{ck} = 20$ MPa, de acordo com a equação (3.14).

Tabela 3.1 - Valores de  $\phi_\infty$  para  $f_{ck} = 20$ MPa

$h_o$ (mm)	$RH = 50\%$	$RH = 70\%$	$RH = 90\%$
50	3,7	2,8	2,0
100	3,2	2,6	1,9
150	3,0	2,4	1,8
200	2,9	2,4	1,8
250	2,8	2,3	1,8
300	2,7	2,3	1,8

De acordo com o modelo do CEB/90, o efeito de uma temperatura de cura diferente de 20°C na maturidade do concreto é levado em conta substituindo-se a idade real de aplicação da carga pela idade equivalente dada na equação (3.13). Essa idade equivalente é utilizada apenas na equação (3.8), devendo-se considerar a duração real do carregamento  $t - t_o$  na avaliação do coeficiente de fluência.

Para levar em conta o efeito de uma temperatura constante diferente de 20°C, enquanto o concreto está sob carga (isto é, durante o ensaio), deve-se modificar os coeficientes  $\beta_H$  e  $\phi_{RH}$  que aparecem na formulação.

O coeficiente  $\beta_H$  que aparece na equação (3.10) é substituído por  $\beta_{H,T}$ , onde

$$\beta_{H,T} = \beta_H \beta_T \quad (3.15)$$

sendo

$$\beta_T = \exp\left[\frac{1500}{273+T} - 5,12\right] \quad (3.16)$$

com a temperatura  $T$  em °C e  $\beta_H$  obtido da equação (3.11).

O coeficiente  $\phi_{RH}$  que aparece na equação (3.5) é substituído por

$$\phi_{RH,T} = \phi_T + (\phi_{RH} - 1)\phi_T^{1,2} \quad (3.17)$$

onde

$$\phi_T = \exp[0,015(T - 20)] \quad (3.18)$$

e  $\phi_{RH}$  é obtido da equação (3.6).

Na fig. 3.4, indicam-se três histórias de temperatura para efeito de análise. Na primeira, o concreto é curado a 20°C e essa temperatura é mantida durante todo o ensaio. Na segunda, a temperatura de cura é igual a 40°C e o ensaio é realizado a uma temperatura de 20°C. Na terceira situação, o concreto é curado a 20°C e o ensaio é realizado a uma temperatura de 40°C. Em todos os casos, a idade de aplicação da carga é  $t_o = 28$  dias e  $f_{ck} = 20$ MPa.

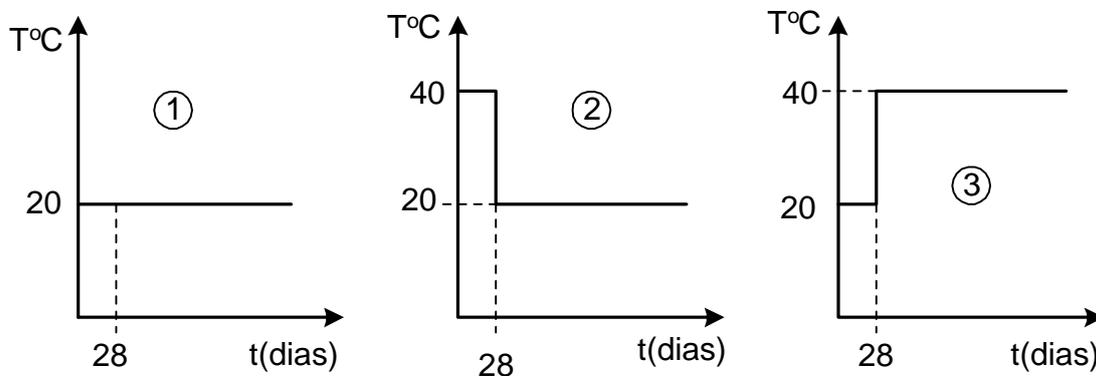


Fig. 3.4 - Diferentes histórias de temperatura de cura e de realização do ensaio de fluência

Na fig. 3.5, apresenta-se a variação do coeficiente de fluência com a idade para as três situações estudadas.

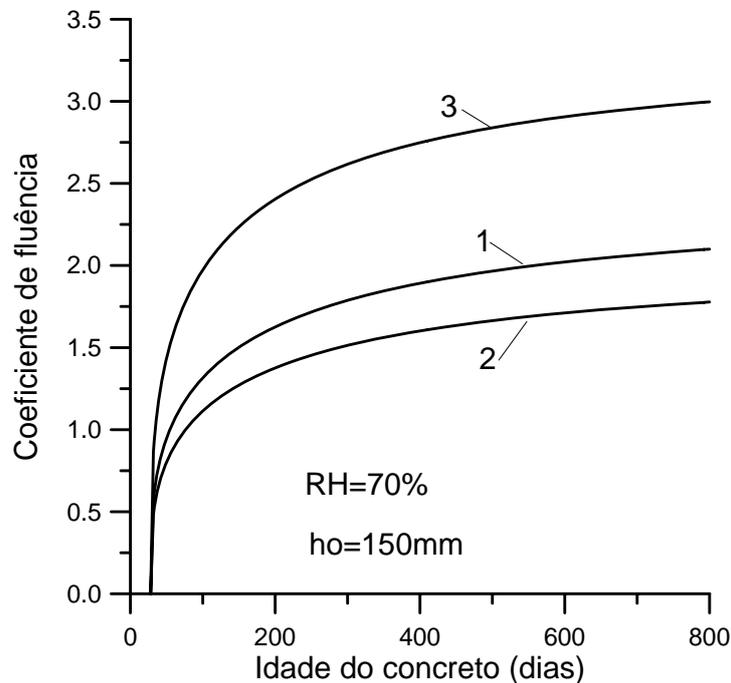


Fig. 3.5 - Coeficiente de fluência para as três situações da fig. 3.4

Da fig. 3.5, verifica-se que na situação 2 o coeficiente de fluência é menor do que na situação 1 porque a maturidade do concreto no início do ensaio é maior na situação 2. Na situação 3, a maturidade no início do ensaio é a mesma que na situação 1. Porém a temperatura mais elevada durante o ensaio aumenta o coeficiente de fluência.

O modelo de fluência linear apresentado até aqui é válido para tensões de serviço, isto é, para  $|\sigma_c(t_o)| \leq 0,4f_{cm}(t_o)$ . Para tensões mais elevadas, deve-se considerar a não-linearidade entre a tensão e o coeficiente de fluência.

De acordo com o CEB/90, para tensões de compressão situadas no intervalo  $0,4f_{cm}(t_o) < |\sigma_c(t_o)| \leq 0,6f_{cm}(t_o)$ , a não-linearidade pode ser levada em conta substituindo-se o coeficiente  $\phi_o$  que aparece na equação (3.4) pelo coeficiente  $\phi_{o,k}$  dado por

$$\phi_{o,k} = \phi_o \exp[\alpha_\sigma(k_\sigma - 0,4)], \quad \text{para } 0,4 < k_\sigma \leq 0,6 \quad (3.19)$$

$$\phi_{o,k} = \phi_o, \quad \text{para } k_\sigma \leq 0,4 \quad (3.20)$$

onde  $k_{\sigma} = |\sigma_c(t_o)|/f_{cm}(t_o)$  é a relação entre a tensão aplicada e a resistência à compressão,  $\alpha_{\sigma} = 1,5$  e  $\phi_o$  é o coeficiente obtido com o emprego da equação (3.5).

Para concreto massa ou quando a umidade relativa é muito alta, pode-se adotar  $\alpha_{\sigma} = 0,5$ .

#### 4 - Modelo do CEB/78 para a fluência do concreto

No modelo de fluência apresentado no Anexo e do CEB/78<sup>(2)</sup>, o módulo de deformação longitudinal tangente  $E_c(t_o)$  é dado por

$$E_c(t_o) = 1,25E_{cm}(t_o) \quad (4.1)$$

onde  $E_{cm}(t_o)$  é o módulo secante dado por

$$E_{cm}(t_o) = 9500[f_{cm}(t_o)]^{1/3}, \text{ MPa} \quad (4.2)$$

sendo  $f_{cm}(t_o)$  a resistência média à compressão do concreto na idade  $t_o$  dias.

A idade  $t_o$  é corrigida para levar em conta os efeitos da temperatura de cura, conforme a equação (4.9).

Definindo a função de envelhecimento

$$\beta_c(t_o) = \frac{f_{cm}(t_o)}{f_{cm\infty}} \quad (4.3)$$

verifica-se que a resistência média  $f_{cm}(t_o)$  na idade  $t_o$  dias é correlacionada com a resistência média  $f_{cm}$  aos 28 dias de idade na forma

$$f_{cm}(t_o) = \frac{\beta_c(t_o)}{\beta_c(28)} f_{cm} \quad (4.4)$$

A resistência média  $f_{cm}$  pode ser estimada a partir da resistência característica  $f_{ck}$  aos 28 dias usando a relação  $f_{cm} = f_{ck} + 8$  MPa.

A função  $\beta_c(t_o)$  é dada em forma de um gráfico.

O coeficiente de fluência  $\phi(t, t_o)$  é dado por

$$\phi(t, t_o) = \beta_a(t_o) + 0,4\beta_d(t - t_o) + \phi_f [\beta_f(t) - \beta_f(t_o)] \quad (4.5)$$

Observa-se que o CEB/78 adota uma formulação do tipo soma, enquanto o CEB/90 adota uma formulação do tipo produto.

O coeficiente  $\beta_a(t_o)$  considera a deformação de fluência rápida que se desenvolve nos primeiros instantes após a aplicação do carregamento. Esse coeficiente é dado por

$$\beta_a(t_o) = 0,8[1 - \beta_c(t_o)] \quad (4.6)$$

sendo  $\beta_c(t_o)$  a função de envelhecimento definida na equação (4.3).

O coeficiente  $\phi_f$  corresponde à deformação plástica diferida e é dado por

$$\phi_f = \phi_{f1}\phi_{f2} \quad (4.7)$$

onde,

$\phi_{f1}$ : depende do meio ambiente (coluna 3 da tabela 4.1);

$\phi_{f2}$ : depende da espessura fictícia da peça (dado em forma de um gráfico).

A espessura fictícia  $h_1$  é dada por

$$h_1 = \lambda \left( \frac{2A_c}{u} \right) \quad (4.8)$$

onde  $A_c$  é a área da seção transversal,  $u$  é o perímetro em contato com a atmosfera e  $\lambda$  é o coeficiente fornecido na tabela 4.1.

Observa-se que  $h_1 = \lambda h_o$ , onde  $h_o$  é a espessura fictícia do modelo do CEB/90, dada na equação (3.9).

Tabela 4.1 - Coeficientes do modelo de fluência do CEB/78

1	2	3	4
Meio ambiente	Umidade relativa	Coeficiente $\phi_{f1}$	Coeficiente $\lambda$
na água		0,8	30
atmosfera muito úmida	90%	1,0	5
exterior, em geral	70%	2,0	1,5
atmosfera muito seca	40%	3,0	1

A função  $\beta_d(t - t_o)$  representa o desenvolvimento da deformação elástica diferida ao longo do tempo. A função  $\beta_f(t)$  representa o desenvolvimento da deformação plástica diferida e depende da espessura fictícia  $h_1$ . Ambas as funções são dadas em forma de gráficos.

Na avaliação de  $\beta_f(t)$  e  $\beta_f(t_o)$ , ambas as idades  $t$  e  $t_o$  são corrigidas para levar em conta a influência da temperatura no envelhecimento do concreto. Entretanto, na avaliação da função  $\beta_d(t - t_o)$ , deve-se adotar a duração real do carregamento  $t - t_o$ .

Para levar em conta os efeitos do tipo de cimento e da temperatura ambiente ao longo do endurecimento do concreto, se ela é sensivelmente diferente de 20°C, adota-se a idade equivalente  $t_e$ , dada por

$$t_e = \frac{\alpha}{30} \sum_{i=1}^n (T_i + 10) \Delta t_i \quad (4.9)$$

onde  $\Delta t_i$  é o número de dias em que a temperatura foi igual a  $T_i$  °C e  $\alpha$  é um coeficiente que leva em conta o tipo de cimento, sendo:

- $\alpha = 1$ , para cimentos de endurecimento normal e lento;
- $\alpha = 2$ , para cimentos de endurecimento rápido;
- $\alpha = 3$ , para cimentos de endurecimento rápido e alta resistência.

Observa-se que o CEB/78 apresenta uma descrição gráfica para a determinação do coeficiente de fluência.

No Apêndice D da referência [4] são apresentadas expressões analíticas para as funções do modelo de fluência, as quais são indicadas a seguir.

A função  $\beta_c(t_o)$ , representando a variação da resistência à compressão com a idade, é dada por

$$\beta_c(t_o) = \left( \frac{t_o}{t_o + 47} \right)^{1/2,45} \quad (4.10)$$

com  $t_o$  em dias.

A função  $\beta_d(t - t_o)$  é dada por

$$\beta_d(t - t_o) = \left( \frac{t - t_o}{t - t_o + 328} \right)^{1/4,2} \quad (4.11)$$

com  $t$  e  $t_o$  em dias.

A função  $\beta_f(t)$  é dada por

$$\beta_f(t) = \left[ \frac{t}{t + k_1(h_1)} \right]^{k_2(h_1)} \quad (4.12)$$

onde

$$k_1(h_1) = \exp \left[ \frac{5,02}{h_1} + \ln(6,95h_1^{1,25}) \right] \quad (4.13)$$

$$k_2(h_1) = \exp \left[ 0,00144h_1 - \frac{1,1}{h_1} - \ln(1,005h_1^{0,2954}) \right] \quad (4.14)$$

sendo  $t$  a idade em dias e  $h_1$  a espessura fictícia em centímetros.

Os coeficientes  $\phi_{f1}$  e  $\phi_{f2}$  são dados por

$$\phi_{f1} = 4,45 - 0,035RH \quad (4.15)$$

$$\phi_{f2} = \exp \left[ 4,4 \times 10^{-5} h_1 - \frac{0,357}{h_1} - \ln \left( \frac{h_1^{0,1667}}{2,6} \right) \right] \quad (4.16)$$

onde  $h_1$  é a espessura fictícia em centímetros e  $RH\%$  é a umidade relativa do ambiente.

O coeficiente  $\lambda$  pode ser interpolado na forma

$$\lambda = 1 + \frac{RH - 40}{60}, \text{ se } 40\% \leq RH \leq 70\% \quad (4.17)$$

$$\lambda = 1,5 + 3,5 \left( \frac{RH - 70}{20} \right), \text{ se } 70\% < RH \leq 90\% \quad (4.18)$$

## 5 - Comparação entre os modelos de fluência do CEB/90 e do CEB/78

Conforme se observa, os modelos do CEB/90 e do CEB/78 diferem em vários aspectos. No modelo do CEB/90, adota-se uma formulação do tipo produto em que o coeficiente de fluência é obtido pelo produto de diversas parcelas que levam em conta os principais parâmetros envolvidos no problema. No modelo do CEB/78, esse coeficiente é obtido através de uma soma de diversas parcelas.

O modelo do CEB/90 leva em conta a não-linearidade da fluência para altas tensões, o que não é considerado no modelo do CEB/78.

Além disso, os módulos de deformação longitudinal para cálculo da função de fluência são diferentes nos dois modelos.

Nas figuras 5.1 a 5.3, comparam-se os coeficientes de fluência  $\phi(t, t_o)$  obtidos com os dois modelos. Em todos os casos, considera-se um concreto com  $f_{ck} = 20$  MPa e cimento de endurecimento normal. Admite-se, ainda, que a temperatura ambiente é igual a 20°C, não sendo feita nenhuma correção na idade do concreto. No modelo do CEB/90, considera-se apenas o caso linear. A espessura fictícia especificada é  $h_o$ , conforme definido no modelo do CEB/90. A espessura fictícia para o modelo do CEB/78 é  $h_1 = \lambda h_o$ .

Na fig. 5.1, admite-se uma umidade relativa  $RH = 70\%$  e uma espessura fictícia  $h_o = 150\text{mm}$ . Na fig. 5.2, considera-se  $RH = 70\%$  e a idade do carregamento  $t_o = 28$  dias. Na fig. 5.3, são fixados os valores  $h_o = 150\text{mm}$  e  $t_o = 28$  dias.

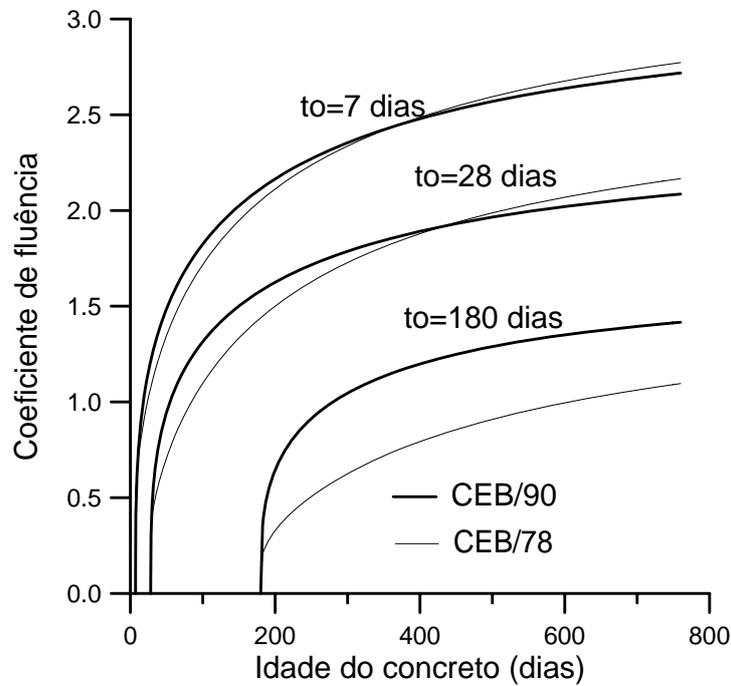


Fig. 5.1 - Efeito da idade de aplicação da carga no coeficiente de fluência

Analisando a fig. 5.1, verifica-se que os dois modelos fornecem praticamente os mesmos coeficientes de fluência quando o concreto é carregado ainda jovem. O modelo do CEB/78 fornece um menor coeficiente de fluência para idades de carregamento avançadas.

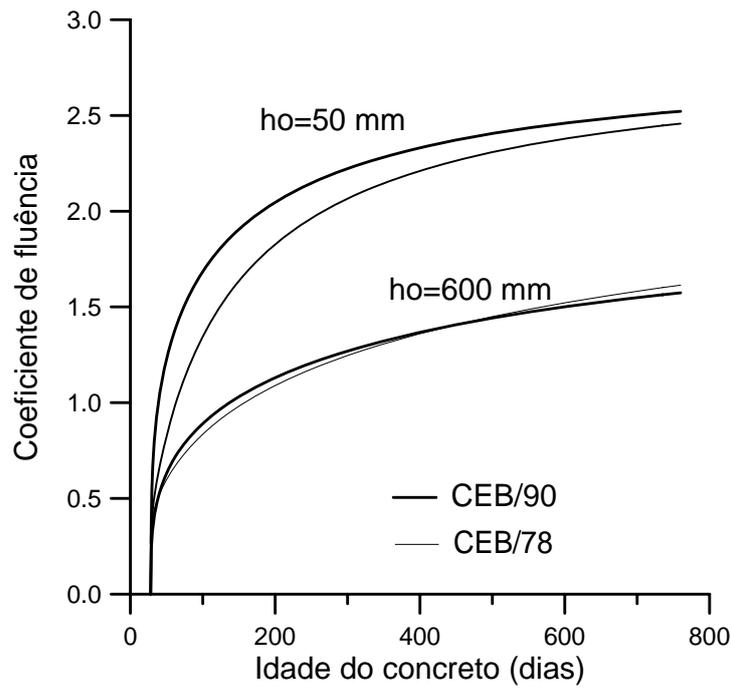


Fig. 5.2 - Efeito da espessura da peça no coeficiente de fluência

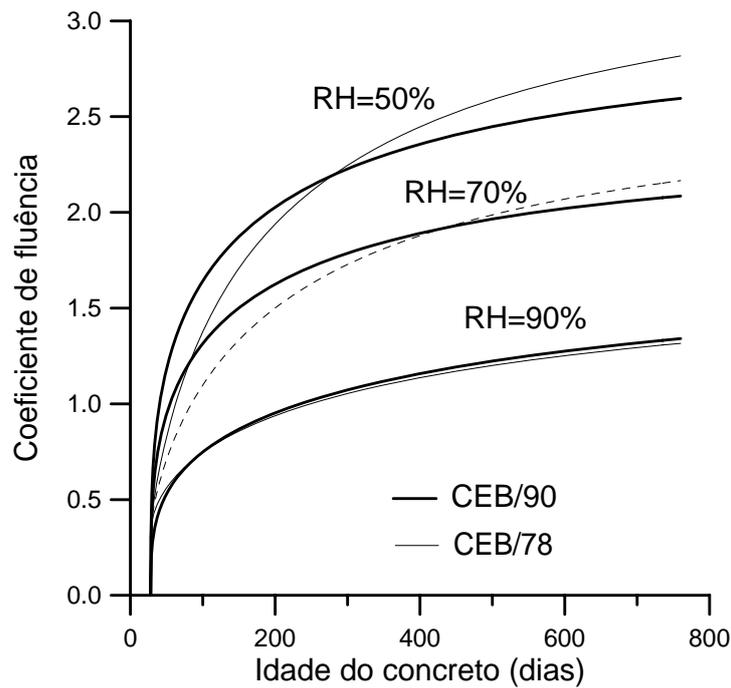


Fig. 5.3 - Efeito da umidade ambiente no coeficiente de fluência

Analisando a fig. 5.2, constata-se que os dois modelos fornecem praticamente os mesmos coeficientes de fluência para diferentes espessuras da peça. O mesmo ocorre em relação à umidade ambiente, como se verifica pela fig. 5.3.

## 6 - Modelos para fluência básica

Bazant e Panula<sup>(1)</sup> apresentam um modelo para fluência básica, ou seja, a fluência que ocorre sem perda de umidade. Esse modelo pode ser usado para a previsão da fluência em concreto massa.

A função de fluência do modelo de Bazant e Panula é tomada na forma

$$J(t, t_o) = \frac{1}{E_o} + \frac{\varphi_1}{E_o} (t_o^{-m} + \alpha) (t - t_o)^n \quad (6.1)$$

onde  $E_o$ ,  $\varphi_1$ ,  $\alpha$ ,  $m$  e  $n$  são parâmetros do modelo.

O módulo  $E_o$  é denominado módulo assintótico e não representa o módulo de deformação longitudinal do concreto. Os coeficientes  $\alpha$ ,  $m$  e  $n$  são dados em função da composição do concreto. Os seus valores médios são

$$\alpha = 0,05 \ ; \ m = 1/3 \ ; \ n = 1/8 \quad (6.2)$$

Os demais parâmetros do modelo são dados por

$$\varphi_1 = \frac{10^{3n}}{2(28^{-m} + \alpha)} \quad (6.3)$$

$$E_o = \frac{6895 f_{cm}^2}{0,09 f_{cm}^2 + 22,26} \ , \text{ MPa} \quad (6.4)$$

sendo  $f_{cm}$  (MPa) a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias de idade.

Uma expressão bastante usada para representar a função de fluência básica do concreto é dada por

$$J(t, t_o) = \frac{1}{E(t_o)} + F(t_o) \ln(t - t_o + 1) \quad (6.5)$$

onde  $E(t_o)$  e  $F(t_o)$  são obtidos por regressão a partir dos resultados experimentais.

A expressão (6.5) foi empregada para determinar a função de fluência dos concretos de diversas barragens brasileiras. Os valores de  $E(t_o)$  e  $F(t_o)$  para esses concretos podem ser encontrados na referência [5].

Todos os modelos de previsão apresentados fornecem apenas uma estimativa das deformações de fluência do concreto. Em muitos casos, o erro cometido com essas estimativas pode ser bastante elevado. Isto se deve à complexidade do fenômeno e aos diversos parâmetros que contribuem para o comportamento do material. Esses parâmetros estão relacionados com as condições ambientais e com as características da dosagem do concreto.

Em relação à dosagem do concreto, verifica-se que a fluência é muito dependente do teor de pasta, do fator água-cimento e das propriedades elásticas do agregado graúdo. Assim, torna-se muito difícil estabelecer um modelo preciso baseado em poucos parâmetros de composição, como os modelos apresentados anteriormente.

De qualquer modo, os modelos apresentados podem ser empregados para a estimativa das deformações de fluência para as estruturas de concreto usuais. No caso dos edifícios de concreto armado, por exemplo, pode-se empregar o modelo do CEB/90. Para estruturas de grande importância, como as barragens, deve-se realizar ensaios com o concreto a ser empregado na obra, para determinar as propriedades do material.

## **7 - Modelo do CEB/90 para a retração do concreto**

Retração é a redução de volume do concreto durante o processo de endurecimento, devido à diminuição do volume de água dos poros. Usualmente, a retração é dividida em retração autógena e retração por secagem (ou retração hidráulica). A retração autógena ocorre sem perda de água para o exterior e é consequência da remoção da água dos poros capilares pela hidratação do cimento<sup>(7)</sup>. A retração hidráulica é influenciada pelas condições ambientais (umidade relativa, temperatura, vento, etc.). Na prática, a retração hidráulica inclui, também, a variação autógena de volume.

Uma cura prolongada retarda o início da retração, permitindo que o concreto alcance uma resistência à tração satisfatória. Com isso, pode-se evitar uma fissuração prematura. As armaduras também são eficientes para a limitação das aberturas das fissuras decorrentes da retração.

Quando o concreto é colocado dentro d'água, ocorre um aumento de volume pela absorção de água. Entretanto, o valor absoluto da expansão dentro d'água é bem menor do que a retração ao ar (cerca de 6 vezes menor para umidade relativa do ar igual a 70%)<sup>(7)</sup>.

De acordo com o CEB/90<sup>(3)</sup>, a deformação de retração,  $\varepsilon_{cs}(t)$ , pode ser calculada por

$$\varepsilon_{cs}(t) = \varepsilon_{cso} \beta_s(t - t_s) \quad (7.1)$$

onde  $t$  é a idade do concreto e  $t_s$  é a idade ao final da cura ( $t > t_s$ ).

O coeficiente  $\varepsilon_{cso}$  é dado por

$$\varepsilon_{cso} = \varepsilon_s(f_{cm}) \beta_{RH} \quad (7.2)$$

onde  $f_{cm}$  (em MPa) é a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias de idade e

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = \left[ 160 + 10 \beta_{sc} \left( 9 - \frac{f_{cm}}{10} \right) \right] \times 10^{-6} \quad (7.3)$$

O coeficiente  $\beta_{sc}$  depende do tipo de cimento e vale  $\beta_{sc} = 4$  para cimentos de endurecimento lento,  $\beta_{sc} = 5$  para cimentos de endurecimento normal e  $\beta_{sc} = 8$  para cimentos de alta resistência inicial.

O coeficiente  $\beta_{RH}$  leva em conta a umidade ambiente e é dado por

$$\beta_{RH} = -1,55 \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right] \quad \text{se } 40\% \leq RH < 99\% \quad (7.4)$$

$$\beta_{RH} = +0,25 \quad \text{se } RH \geq 99\% \quad (7.5)$$

Conforme se observa na equação (7.4), até uma umidade relativa do ambiente próxima de 99%, ocorre retração ( $\beta_{RH} < 0$ ). Após esse valor, o que ocorre é um aumento de volume do concreto, como é indicado na equação (7.5).

A função  $\beta_s(t - t_s)$ , que define o desenvolvimento da retração com o tempo, é dada por

$$\beta_s(t - t_s) = \left[ \frac{t - t_s}{350(h_o/100)^2 + t - t_s} \right]^{0,5} \quad (7.6)$$

onde  $h_o$  é a espessura equivalente do elemento estrutural, definida na equação (3.9).

Quando o tempo  $t$  tende ao infinito, a deformação de retração  $\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{cs}(t_\infty)$  tende ao valor  $\varepsilon_{cs0}$ . Considerando um concreto com  $f_{ck} = 20\text{MPa}$  e  $\beta_{sc} = 5$  (cimento de endurecimento normal), resulta

$$\varepsilon_{cs\infty} = -63 \times 10^{-5} \quad \text{para } RH = 50\% ;$$

$$\varepsilon_{cs\infty} = -48 \times 10^{-5} \quad \text{para } RH = 70\% ;$$

$$\varepsilon_{cs\infty} = -20 \times 10^{-5} \quad \text{para } RH = 90\% .$$

## 8 - Modelo do CEB/78 para a retração do concreto

De acordo com o Anexo e do CEB/78<sup>(2)</sup>, a deformação específica de retração  $\varepsilon_{cs}(t, t_s)$ , que se desenvolve no intervalo  $(t - t_s)$ , é dada por

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{so} [\beta_s(t) - \beta_s(t_s)] \quad (8.1)$$

onde

$\varepsilon_{so}$  : coeficiente básico de retração;

$\beta_s$  : função que define o desenvolvimento da retração ao longo do tempo;

$t$  : idade do concreto no instante considerado, corrigida segundo a equação (4.9), com  $\alpha = 1$  em todos os casos;

$t_s$  : idade do concreto ao final da cura, corrigida segundo a equação (4.9), com  $\alpha = 1$  em todos os casos.

O coeficiente básico de retração é dado por  $\varepsilon_{so} = \varepsilon_{s1}\varepsilon_{s2}$ , onde  $\varepsilon_{s1}$  depende do meio ambiente e  $\varepsilon_{s2}$  depende da espessura fictícia  $h_1$ , definida na equação (4.8). O coeficiente  $\varepsilon_{s1}$  é dado na tabela 8.1.

Tabela 8.1 - Coeficiente  $\varepsilon_{s1}$  do modelo de retração do CEB/78

1	2	3
Meio ambiente	Umidade relativa	Coeficiente $\varepsilon_{s1} \times 10^{-5}$
na água		+10
atmosfera muito úmida	90%	-13
exterior, em geral	70%	-32
atmosfera muito seca	40%	-52

O coeficiente  $\varepsilon_{s2}$  e a função  $\beta_s$  são dados em forma de gráfico, em função da espessura fictícia  $h_1$ .

No Apêndice D da referência [4] são apresentadas expressões analíticas para as funções do modelo de fluência, as quais são indicadas a seguir.

O coeficiente  $\varepsilon_{s1}$  pode ser obtido por

$$\varepsilon_{s1} = (0,000775RH^3 - 0,1565RH^2 + 11,0325RH - 303,25) \times 10^{-5} \quad (8.2)$$

onde  $RH(\%)$  representa a umidade relativa do ambiente.

O coeficiente  $\varepsilon_{s2}$  é dado por

$$\varepsilon_{s2} = \exp \left[ 0,00174h_1 - \frac{0,32}{h_1} - \ln \left( \frac{h_1^{0,251}}{1,9} \right) \right] \quad (8.3)$$

com a espessura fictícia  $h_1$  em centímetros.

A função  $\beta_s(t)$  é dada por

$$\beta_s(t) = \left[ \frac{t}{t + K_3(h_1)} \right]^{K_4(h_1)} \quad (8.4)$$

$$K_3(h_1) = 11,8h_1 + 16 \quad (8.5)$$

$$K_4(h_1) = \exp \left[ -0,00257h_1 + \frac{0,32}{h_1} + \ln(0,22h_1^{0,4}) \right] \quad (8.6)$$

com  $t$  em dias e  $h_1$  em centímetros.

As seguintes diferenças são observadas entre os modelos do CEB/78 e do CEB/90 para cálculo da deformação de retração:

- o modelo do CEB/90 leva em conta a resistência do concreto e o tipo de cimento, ou seja, a influência da composição do concreto; no modelo do CEB/78, a deformação específica de retração independe das características do concreto;

- no modelo do CEB/90, o desenvolvimento da retração ao longo do tempo é dado pela  $\beta_s(t - t_s)$ , que depende da duração do processo de secagem ( $t - t_s$ ); no modelo do CEB/78, considera-se a diferença  $\beta_s(t) - \beta_s(t_s)$ ; as funções  $\beta_s$  não são as mesmas nos dois modelos.

Nas tabelas 8.2 a 8.4, comparam-se os valores da deformação específica de retração  $\varepsilon_{cs}$  obtidos com o modelo do CEB/78 e com o modelo do CEB/90. Em todos os casos, considera-se a idade final  $t = 10.000$  dias e a idade inicial  $t_s = 7$  dias. Para o uso do modelo do CEB/90, considera-se o cimento de endurecimento normal (coeficiente  $\beta_{sc} = 5$ ). As espessuras fictícias  $h_o$  indicadas nas tabelas correspondem à definição dada na expressão (3.9), conforme o CEB/90.

Analisando as tabelas, verifica-se que os dois modelos somente fornecem valores parecidos para a deformação de retração para concretos de elevada resistência à compressão,

com  $f_{ck} \cong 60\text{MPa}$ . Para concretos de menor resistência, o CEB/90 fornece os maiores valores para a deformação específica de retração.

Tabela 8.2 - Deformação de retração - concreto  $f_{ck} = 20\text{ MPa}$ 

$h_o$ (mm)	$RH = 50\%$		$RH = 70\%$		$RH = 90\%$	
	CEB/90	CEB/78	CEB/90	CEB/78	CEB/90	CEB/78
50	$-63 \times 10^{-5}$	$-37 \times 10^{-5}$	$-48 \times 10^{-5}$	$-27 \times 10^{-5}$	$-20 \times 10^{-5}$	$-10 \times 10^{-5}$
200	$-60 \times 10^{-5}$	$-37 \times 10^{-5}$	$-45 \times 10^{-5}$	$-25 \times 10^{-5}$	$-18 \times 10^{-5}$	$-8 \times 10^{-5}$
400	$-51 \times 10^{-5}$	$-33 \times 10^{-5}$	$-38 \times 10^{-5}$	$-22 \times 10^{-5}$	$-16 \times 10^{-5}$	$-7 \times 10^{-5}$

Tabela 8.3 - Deformação de retração - concreto  $f_{ck} = 40\text{ MPa}$ 

$h_o$ (mm)	$RH = 50\%$		$RH = 70\%$		$RH = 90\%$	
	CEB/90	CEB/78	CEB/90	CEB/78	CEB/90	CEB/78
50	$-50 \times 10^{-5}$	$-37 \times 10^{-5}$	$-38 \times 10^{-5}$	$-27 \times 10^{-5}$	$-15 \times 10^{-5}$	$-10 \times 10^{-5}$
200	$-47 \times 10^{-5}$	$-37 \times 10^{-5}$	$-35 \times 10^{-5}$	$-25 \times 10^{-5}$	$-15 \times 10^{-5}$	$-8 \times 10^{-5}$
400	$-40 \times 10^{-5}$	$-33 \times 10^{-5}$	$-30 \times 10^{-5}$	$-22 \times 10^{-5}$	$-12 \times 10^{-5}$	$-7 \times 10^{-5}$

Tabela 8.4 - Deformação de retração - concreto  $f_{ck} = 60\text{ MPa}$ 

$h_o$ (mm)	$RH = 50\%$		$RH = 70\%$		$RH = 90\%$	
	CEB/90	CEB/78	CEB/90	CEB/78	CEB/90	CEB/78
50	$-36 \times 10^{-5}$	$-37 \times 10^{-5}$	$-27 \times 10^{-5}$	$-27 \times 10^{-5}$	$-11 \times 10^{-5}$	$-10 \times 10^{-5}$
200	$-34 \times 10^{-5}$	$-37 \times 10^{-5}$	$-26 \times 10^{-5}$	$-25 \times 10^{-5}$	$-11 \times 10^{-5}$	$-8 \times 10^{-5}$
400	$-29 \times 10^{-5}$	$-33 \times 10^{-5}$	$-22 \times 10^{-5}$	$-22 \times 10^{-5}$	$-9 \times 10^{-5}$	$-7 \times 10^{-5}$

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

1. Bazant, Z. P.; Panula, L. - *Practical prediction of time-dependent deformations of concrete*. Matériaux et Constructions, V.11, No.65, p.307-328, 1978.
2. Comité Euro-International du Béton. *Code-modèle CEB/FIP pour les Structures en Béton*. Paris, 1978 (Bulletin d'Information 124/125).
3. Comité Euro-International du Béton. *CEB-FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.
4. Comité Euro-International du Béton. *CEB Design Manual on Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete*. Switzerland, 1984.
5. Equipe de FURNAS, Laboratório de Concreto. *Concretos - Ensaios e Propriedades*. Editor: Walton Pacelli de Andrade. São Paulo, PINI, 1997.
6. Leonhardt, F.; Mönnig, E. - *Construções de Concreto*. V.1, Interciência, Rio de Janeiro, 1977.
7. Neville, A. M. - *Propriedades do Concreto*. Tradução de Salvador E. Giammusso, PINI, São Paulo, 1997.