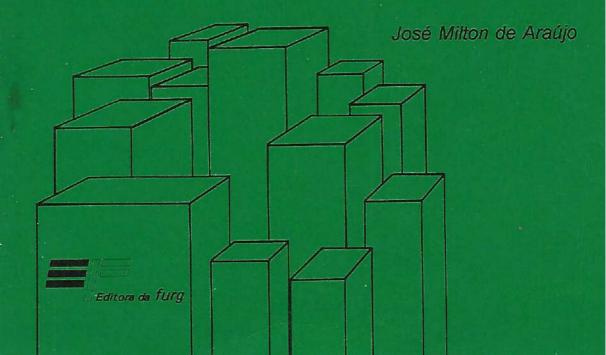
PILARES ESBELTOS

DE CONCRETO ARMADO

Algoritmos para Análise e Dimensionamento



PILARES ESBELTOS

Algoritmos para Análise e Dimensionamento

DE CONCRETO ARMADO





Reitor CARLOS RODOLFO HARTMANN

Vice-Reitor VICENTE MARIANO PIAS

Sub-Reitor Administrativo CARLOS KALIKOWSKI WESKA

Sub-Reitor de Ensino e Pesquisa FERNANDO D'INCAO

Sub-Reitor de Planejamento e Desenvolvimento JOSÉ LUIZ DA S. VALENTE



EDITORA DA FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DO RIO GRANDE

CONSELHO EDITORIAL

Presidente

CARLOS ALEXANDRE BAUMGARTEN

Vice-Presidente

WALTER AUGUSTO-RUIZ

Titulares

CLAUDIO PAZ DE LIMA DAOIZ MENDOZA AMARAL EDUARDO AQUILE ANSELMO ERNESTO BRINCKMANN LOBO JOÃO PAES VIEIRA SOBRINHO JUSSEMAR WEISS GONÇALVES VICTOR HUGO G. RODRIGUES

Correspondências deverão ser enviadas para:

CONSELHO EDITORIAL EDITORA DA FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE DO RIO GRANDE LUIZ LORÉA, 261

96201 - 900 - RIO GRANDE - RS

Editora Associada à





JOSÉ MILTON DE ARAÚJO Professor Titular — Universidade do Rio Grande

PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO

Algoritmos para Análise e Dimensionamento



Rio Grande 1993 Direitos reservados desta edição: Editora da Fundação Universidade do Rio Grande

1993

1ª edição

Capa: Sandra Morales Composição: João Balansin Desenhos: Luiz Roberto Ferro Jorge Diagramação e montagem: Sandra Morales

Revisão: Ana Winter João Reguffe

ISBN 85 - 85042 - 33 - 8

Araújo, José Milton de

Pilares esbeltos de concreto armado : algoritmos para análise e dimensionamento / José Milton de Araújo — Río Grande: FURG, 1993.

1. Concreto armado. I. Título

CDU 693.5

FICHA CATALOGRÁFICA: Maria Solange Maidana CRB 10/597

PREFÁCIO

De um modo geral, um pilar esbelto de concreto armado apresenta uma relação carga-deslocamento não-linear. Essa não-linearidade é comumente dividida em duas categorias distintas: a não-linearidade física, decorrente do comportamento mecânico dos materiais, aço e concreto, e a não-linearidade geométrica, oriunda da influência que têm os deslocamentos nas solicitações da estrutura.

Em vista disso, a análise desse elemento estrutural pode se tornar exaustiva, exigindo técnicas numéricas apropriadas.

Neste trabalho apresentamos algumas técnicas para análise e dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado. O trabalho se encontra organizado na mesma ordem em que os algoritmos foram sendo desenvolvidos.

No primeiro capítulo discutimos os principais aspectos relativos à estabilidade de barras esbeltas. As propriedades dos materiais, bem como as hipóteses admitidas em todo o trabalho, também se encontram nesse capítulo.

Uma técnica para a análise de pilares esbeltos de concreto armado, baseada na analogia de Mohr, é apresentada no capítulo 2, onde os efeitos da fluência e da retração são considerados. Esse esquema de solução é posteriormente implementado em um algoritmo de dimensionamento, dando origem ao capítulo 3. Com esse algoritmo foi possível elaborar as tabelas para dimensionamento constantes do Anexo.

Nos capítulos 4 e 5 são apresentadas as técnicas de diferenças finitas e de elementos fínitos, respectivamente, para a análise de pilares sob cargas de curta duração. A solução é encontrada através do processo iterativo denominado Método de Newton-Raphson Modificado. Esse método, tradicionalmente utilizado em análise não-linear de estruturas de concreto armado, pode levar a um alto custo computacional, devido ao elevado número de iterações necessárias à convergência. Com o objetivo de acelerar a convergência do método, associamos ao mesmo as fórmulas de extrapolação apresentadas no capítulo 6. Apesar da existência de esquemas mais eficientes, as fórmulas desenvolvidas mostraram-se satisfatórias para o problema em questão.

No último capítulo, é apresentado um algoritmo para análise de pilares esbeltos de concreto armado sob flexão composta oblíqua. A solução é encontrada através do método dos elementos finitos. A formulação é desenvolvida para uma seção transversal poligonal arbitrária, com o emprego do teorema de Green.

Este trabalho é a continuação da obra Cálculo de Pilares de Concreto Armado, de nossa autoria, publicada em 1988 pela Editora da Fundação Universidade do Rio Grande. Naquela oportunidade, apresentamos os critérios de projeto de pilares curtos e moderadamente esbeltos, adotados pelas principais normas internacionais sobre cálculo de estruturas de concreto armado.

Escrevemos o presente trabalho imediatamente após a publicação de Cálculo de Pilares de Concreto Armado. Infelizmente só agora foi possível a edição deste livro.

Por se tratar de uma área de conhecimento que sofre continuamente, e de maneira acelerada, um grande aperfeiçoamento, o trabalho poderá ter perdido parte de sua originalidade. Entretanto, o mesmo tem o mérito de aglutinar os principais métodos numéricos para análise de pilares esbeltos de concreto armado. Além disso, os algoritmos apresentados aqui deverão ser incluídos, de uma maneira ou de outra, em qualquer análise não-linear de estruturas de concreto armado.

Rio Grande, setembro de 1993.

José Milton de Araújo

SUMÁRIO

MATERIAIS	
1.1 Generalidades	11
1.2 — Estabilidade de pilares esbeltos	11
1.3 — Características do concreto armado	15
1.4 — Hipóteses simplificadoras	20
1.5 — Deformações diferidas do concreto	26
1.5.1 — Fluência segundo o CEB	28
1.5.1,1 — Hipóteses	26
1.5.1.2 – Coeficiente de fluência	27
1.5.1.3 — Idade corrigida	27
1.5.2 - Retração segundo o CEB	30
1.5.3 — Expressões analíticas	31
1.6 — Técnicas numéricas para análise	32
2 - UM ALGORITMO PARA ANÁLISE	
2.1 — Considerações gerais	35
2.2 — Relações momento fletor-esforço normal-curvatura	35
2.2.1 — Solicitações internas e externas	35
2.2.2 – Algoritmos para resolver o sistema de equações não-lineares	39
2.2.3 — Ruptura da seção	48
2.3 — Cálculo de deslocamentos em pilares de concreto armado	49
2.4 — Implementação computacional das deformações diferidas do concreto .	52
2.4.1 — Inclusão da fluência	52
2.4.2 – Inclusão da retração	54
2.4.3 — História de carga	54
2.4.4 – Integração no tempo	55
2.5 — Exemplos	EC

3 - DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO

3.1 – O problema do dimensionamento	61
3.2 — Considerações para o dimensionamento	62
3.3 – Sistematização computacional para o dimensionamento	63
3.3.1 — Relação carregamento de ruína-armadura	63
3.3.2 - Dimensionamento baseado no desequilíbrio	66
3.3.3 - Processo alternativo de dimensionamento	68
3.3.4 — Exemplos experimentais	70
3.3.4.1 — Pilares sob cargas de curta duração	70
3.3.4.2 — Pilares sob cargas de longa duração	72
3.3.5 — Coeficiente de segurança	75
3.4 – Processos simplificados de dimensionamento de pilares	76
3.4.1 - Processo da NBR-6118	76
3.4.2 - Processo do CEB	78
3.4.3 - Processo do ACI	78
3.4.4 — Processo da DIN	80
3.4.5 – Exemplos	81
3.5 — Dimensionamento para cargas de longa duração	83
3.5.1 — Coeficiente de fluência do concreto	83
3.5.2 — Retração do concreto	84
3.5.3 — História de carga	85
3.5.4 — Inclusão simplificada da fluência do concreto	86
3.5.5 – Exemplos	87
3.5.6 — Importância das deformações diferidas	87
3.6 — Comentários sobre a norma brasileira	88
4 O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
4.1 — Introdução	91
4.2 – Equações de equilíbrio	91
4.3 — Diferenças finitas centrais	94
4.4 — Relações momento fletor-curvatura	96
4.5 — Algoritmo de análise	98
4.6 — Exemplos	100
	100
5 — ANÂLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	
5.1 – Teoria não-linear de flexão de barras	103
5.1.1 — Generalidades	
5.1.2 — Deslocamentos em barras esbeltas	
	100

5.1.3 — Relação deformação-deslocamentos 5.1.4 — Princípio dos trabalhos virtuais 5.2 — Modelo de elementos finitos 5.2.1 — Considerações gerais 5.2.2 — Funções de interpolação	105 106 108 108 108 110 111 113 114
5.3 — Exemplos	118 118
5.3.2 — Pilar moderadamente esbelto	119
6 – ACELERAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS DE NEWTON-RAPHSON	
6.1 — Introdução	121
6.2 — Os métodos de Newton-Raphson	121
6.3 — A matriz de rigidez tangente	126 128
6.5 — Exemplos	131
	101
7 - FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA	
7.1 — Introdução	135
7.2 – Análise em nível de seção	135
7.2.1 — Equações de equilíbrio	135
7.2.2 — Teorema de Green	138
7.2.3 — Obtenção das sub-regiões da seção transversal	140 141
7.3 – Teoria não-linear de flexão	143
7.3.1 — Relação deformação-deslocamentos	143
7.3.2 — Princípio dos trabalhos virtuais	145
7.4 – Modelo de elementos finitos	147
7.5 — Exemplos	149
APÊNDICE: RELAÇÕES MOMENTO FLETOR - ESFORÇO NORMAL - CURVATURA PARA SEÇÕES RETANGULARES	151
ANEXO: TABELAS PARA DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE	
CONCRETO ARMADO	162

•

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		183	
----------------------------	--	-----	--

CAPÍTULO 1 FUNDAMENTOS DE ESTABILIDADE E PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

1.1 - Generalidades

O primeiro estudo da estabilidade de barras esbeltas carregadas axialmente foi realizado por Leonard Euler em meados do século dezoito (ref. 30). Analisando uma barra de eixo reto, constituída por um material elástico linear e submetida a uma força normal de compressão, Euler concluiu que, para valores da força abaixo de um certo limite, o equilíbrio da barra na configuração indeformada era estável e além desse limite o equilíbrio era instável.

Admitindo a hipótese das seções planas e de pequenos deslocamentos, o equilíbrio de uma barra elástica linear submetida a uma força normal constante e carregamento transversal genérico fica garantido através de uma equação diferencial não-homogênea de quarta ordem. Se a rigidez à flexão da barra é constante, a solução da equação diferencial, para uma dada distribuição da carga transversal, pode ser facilmente encontrada.

Para o concreto armado, entretanto, a rigidez à flexão varia ao longo do eixo da barra e depende, além de outros fatores, dos valores do momento fletor e do esforço normal que solicitam a seção transversal. Assim, torna-se impraticável encontrar uma solução analítica para a equação diferencial. Dessa forma, em se tratando de pilares de concreto armado, deve-se partir para técnicas numéricas de solução.

Neste capítulo apresentam-se os principais conceitos relativos à estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado. Entretanto, nenhuma atenção especial é dada à solução do problema. As técnicas numéricas para análise e dimensionamento desse elemento estrutural ficam, assim, para os capítulos seguintes.

1.2 — Estabilidade de pilares esbeltos

Nesta seção discutem-se alguns aspectos relativos à estabilidade de barras esbeltas. O problema é apresentado sem a preocupação com a formulação matemática do mesmo. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto, pode-se recorrer às refs. 1.10.

Na figura 1.1 apresenta-se um pilar submetido a uma força normal P e a uma carga transversal q. Admite-se que a força P se mantém constante ao longo do eixo da barra e que a flexão se dá segundo o plano de simetria x-z.

Admitindo a hipótese das seções planas e considerando pequenas rotações do eixo da barra, pode-se mostrar que o equilíbrio fica garantido através da equação diferencial

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2W}{dx^2} \right) + P \frac{d^2W}{dx^2} = q, \qquad (1.1)$$

onde EI é a rigidez à flexão das seções transversais da barra (refs. 1,10).

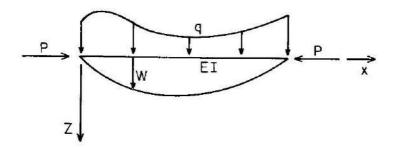


Figura 1.1 - Carregamento no pilar

Se a rigidez EI é constante, a equação é da forma

$$\frac{d^4W}{dx^4} + \mu^2 \frac{d^2W}{dx^2} = \frac{q}{EI} , \qquad (1.2)$$

onde

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}}. ag{1.3}$$

A solução da equação (1.2) é

$$W(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x + Cx + D + W_p(x), \qquad (1.4)$$

onde Wp(x) é uma solução particular.

As constantes de integração que aparecem em (1.4) são obtidas pela introdução das condições de contorno e $W_p(x)$ é encontrada para uma dada distribuição da carga transversal.

Por exemplo, para uma barra birrotulada com carga transversal q uniformemente distribuída ao longo do eixo, a solução W(x) é

$$W(x) = q \left[\frac{1}{\mu^2 P} \left(\cos \mu x + tg \frac{\mu \ell}{2} \sin \mu x - 1 \right) + \frac{1}{2P} \left(x^2 - \ell x \right) \right] , (1.5)$$

onde l é o comprimento da barra.

Observa-se por (1.5) que a solução é linear com relação à carga transversal q, porém é não-linear com a força normal P. Essa não-linearidade, de uma forma geral, é denominada não-linearidade geométrica. Para o caso específico de pilares, esse efeito não-linear é também denominado efeito de segunda ordem.

Na figura 1.2 apresenta-se a relação P-W de acordo com a equação (1.5).

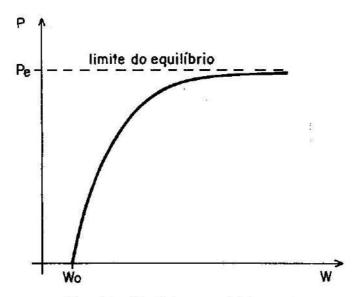


Figura 1.2 - Relação força normal-deslocamento

Observa-se que para P=0 o deslocamento transversal é W_O devido à carga transversal. Neste caso, o problema reduz-se à análise de uma viga biapoiada com carga uniformemente distribuída.

 \tilde{A} medida que cresce a força P, crescem também os deslocamentos, até que, atingido o valor P_e para a força normal, o equilíbrio torna-se instável. Isto pode ser constatado pelo crescimento acentuado dos deslocamentos. A força P_e é denominada carga crítica e, para este caso, é dada por

$$P_{e} = \frac{\pi^{2} EI}{\varrho^{2}} . {1.6}$$

Para o caso particular em que a carga transversal é nula, a relação P-W é da forma apresentada na figura 1.3.

Observa-se pela figura que, neste caso, a configuração indeformada é estável até a carga P_e . A partir desse limite, o equilíbrio torna-se instável. O fenômeno é denominado flambagem, sendo um caso particular de instabilidade do equilíbrio para barras submetidas a compressão centrada.

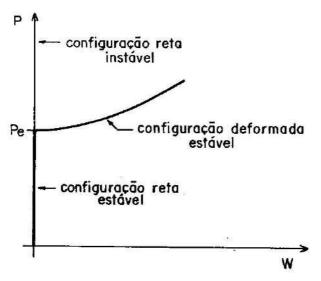


Figura 1.3 — Flambagem

Devido à forma não-linear da expressão (1.5) verifica-se não ser mais válido o princípio da superposição, ou seja, se W_1 e W_2 são os deslocamentos obtidos com as forças P_1 e P_2 , respectivamente, a solução W para a força $P=P_1+P_2$ não pode ser obtida simplesmente superpondo W_1 a W_2 .

Da teoria elementar de flexão de barras, tem-se que o momento fletor M em uma seção transversal é dado por

$$M = -EI \frac{d^2W}{dx^2} (1.7)$$

Introduzindo (1.5) em (1.7), pode-se encontrar o momento máximo ao longo do eixo da barra, como

$$M_{\text{máx}} = \frac{q\ell^2}{8} \beta, \qquad (1.8)$$

onde

$$\beta = \frac{2\left[\sec\frac{\mu\ell}{2} - 1\right]}{\left(\frac{\mu\ell}{2}\right)^2} . \tag{1.9}$$

O fator β é denominado fator de amplificação e é conseqüência da não-linearidade geométrica.

Observa-se por (1.8) que os momentos solicitantes ficam ampliados em relação aos obtidos com a teoria elementar. A teoria elementar, na qual se analisa a estrutura na configuração indeformada, é comumente denominada teoria de primeira ordem.

Em se tratando de pilares esbeltos, a análise deve ser feita na configuração deformada da barra, em virtude dos efeitos apresentados. Esta teoria é denominada teoria de segunda ordem.

1.3 — Características do concreto armado

Na seção anterior apresentou-se a equação diferencial de equilíbrio para um pilar esbelto, na hipótese de um comportamento elástico linear. Se a barra for constituída por um material não-linear, elástico ou não, a equação diferencial permanece válida, desde que a rigidez à flexão possa ser corretamente avaliada.

O concreto armado é um material nessas condições, isto é, não existe linearidade entre tensões e deformações, uma vez que o aço e o concreto apresentam comportamentos não-lineares. A esse tipo de não-linearidade denomina-se não-linearidade física.

A grande dificuldade em se resolver a equação diferencial para o concreto armado consiste na determinação da rigidez à flexão. Diversos parâmetros, como o comportamento mecânico dos materiais, as propriedades reológicas do concreto e o grau de solicitação, influenciam na rigidez e não se consegue correlacioná-la de forma analítica com os mesmos.

O diagrama tensão-deformação do concreto em compressão, obtido experimentalmente, depende de vários fatores, entre os principais a resistência do concreto, sua idade quando do carregamento, modo de colocação da carga, duração do carregamento, forma da seção transversal e posição da linha neutra (ref. 27). A forma desse diagrama é apresentada na figura 1.4.

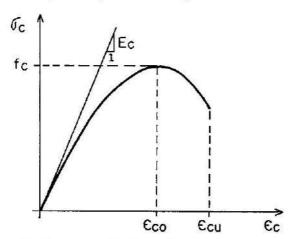


Figura 1.4 — Diagrama tensão-deformação para o concreto em compressão.

Na figura 1.4, f_c e E_c representam a resistência à compressão e o módulo de deformação longitudinal na origem, respectivamente. Observa-se pela figura que, após ultrapassada a deformação \in_{CO} correspondente à tensão f_c , ocorre um alívio de tensão até a ruptura na deformação \in_{CU} .

Experimentalmente verifica-se que os valores E_c , \in_{co} e \in_{cu} dependem da própria resistência f_c , de maneira que para cada concreto em particular existe um diagrama tensão-deformação correspondente.

A grande variabilidade na forma desse diagrama impõe a necessidade de adoção de curvas simplificadas capazes de representar, ao menos de forma aproximada, o comportamento do concreto. Diversos diagramas tensão-deformação para o concreto comprimido têm sido sugeridos em normas e em trabalhos de pesquisa. Assim é que a Norma Brasileira para Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado — NBR-6118 (ref. 6) adota o diagrama parábola-retângulo e a norma alemã DIN 1045 (ref. 20) admite, além desse, um diagrama bilinear. Desayi e Krishnan (ref. 24) propõem um diagrama com módulo de deformação na origem prefixado, enquanto a curva de Saenz (ref. 24) permite a livre escolha do valor desse módulo, ambos os diagramas incluindo o alívio de tensão no concreto após ter-se atingido a deformação ∈_{CO}. O CEB (ref. 12) apresenta também um diagrama que considera esse alívio de tensão e permite a livre escolha do valor do módulo de deformação longitudinal.

Observa-se pelo exposto que existe uma grande variedade de proposições, desde as mais simples, como a bilinear, até equações sofisticadas como a do CEB. Nesse ponto, cabe ao analista definir um diagrama a ser usado, de forma a não conflitar com resultados comprovados experimentalmente, mas que também seja suficientemente simples para não dificultar o esquema de solução.

Para o aço, ao contrário do concreto em compressão, em geral admite-se, para carregamento monótono crescente, um comportamento elastoplástico perfeito. Uma outra alternativa consiste em se considerar o endurecimento, não havendo maiores variações desses modelos.

Apesar de a resistência à tração do concreto ser pequena em relação a sua resistência à compressão, verifica-se experimentalmente que a mesma pode contribuir de forma significativa no aumento da rigidez de uma peça de concreto armado. Essa influência do concreto tracionado se mostra acentuada no estágio inicial do carregamento e na zona de formação de fissuras (ref. 21). Na ruptura, entretanto, tem-se verificado que a mesma não apresenta nenhum efeito significativo, sendo, em geral, desprezada.

Na figura 1.5 apresenta-se uma barra de concreto armado solicitada em flexão pura, onde se indicam duas seções fissuradas.

Observa-se pela figura que, nas seções fissuradas, a tensão na armadura atinge um valor máximo, o qual é reduzido à medida que se afasta das mesmas. Essa redução da tensão na armadura é devida à contribuição do concreto tracionado entre fissuras. Devido à aderência existente entre o concreto e as barras de aço, ocorre uma transferência de tensões entre os dois materiais, o que origina os diagramas da figura 1.5.

Observa-se também que ocorre uma perda local de aderência nas seções fissuradas, o que ocasiona um escorregamento das barras de aço em relação ao

concreto adjacente. O comportamento é bastante complexo e de difícil consideração.

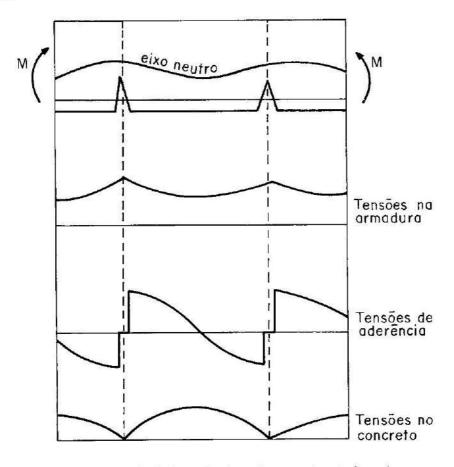


Figura 1.5 - Variação das tensões de tração em um elemento fissurado.

Diversos modelos têm sido propostos para se levar em conta a contribuição do concreto tracionado entre fissuras. Os modelos, em geral, são de dois tipos distintos.

Nos primeiros procura-se uma equação de equilíbrio nas vizinhanças da armadura. Considerando uma função empírica de distribuição das tensões de aderência, pode-se encontrar um valor médio para as deformações na armadura (refs. 13, 23, 25). Trabalha-se então como se todas as seções fossem fissuradas, mas adota-se a deformação média para as armaduras.

Numa segunda classe de modelos adota-se um diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado, o qual considera uma perda gradual de rigidez, como indicado na figura 1.6.

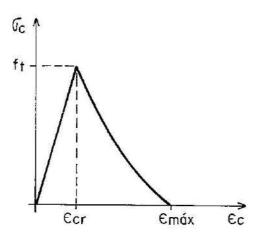


Figura 1.6 - Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado.

Observa-se pela figura 1.6 que, atingida a deformação \in_{CI} correspondente ao início da fissuração, as tensões no concreto decrescem até que se anulam na deformação $\in_{\mathrm{máx}}$.

Uma grande variedade de diagramas dessa natureza tem sido apresentada na literatura (refs. 7, 18, 19, 22). A diferença básica entre eles consiste nos valores adotados para \in_{CT} e $\in_{máx}$, bem como na forma das curvas da figura 1.6.

Tendo em vista o fenômeno descrito, observa-se também que a profundidade do eixo neutro é variável ao longo do elemento de concreto armado, como indicado na figura 1.5. Assim, para facilitar a implementação computacional de um esquema de solução, trabalha-se com um eixo neutro médio, já que a contribuição do concreto entre fissuras fica incluída em um modelo específico. Dessa forma, em se tratando de concreto armado, só faz sentido referir-se a uma curvatura média aproximada do elemento estrutural.

Outros fenômenos pertinentes ao concreto armado são a fluência e a retração do concreto. A fluência é caracterizada pelo acréscimo das deformações no concreto para uma tensão aplicada e mantida constante. Com isso ocorre um aumento dos deslocamentos transversais do eixo do pilar com o passar do tempo. Assim, surge uma nova variável na análise quando se estende o estudo a cargas de longa duração.

Na figura 1.7 apresenta-se a evolução das deformações em um elemento de concreto submetido a uma tensão constante σ_0 aplicada no instante t_0 .

Observa-se pela figura que, apesar de a tensão ser constante, as deformações crescem com o passar do tempo. Em um instante t a deformação total \in_{tot} é dada por

$$\epsilon_{\text{tot}} = \epsilon_{\text{ci}} + \epsilon_{\text{cc}}, \tag{1.10}$$

onde \in_{ci} é a deformação inicial e \in_{cc} é a deformação de fluência ocorrida entre t_0 e t.

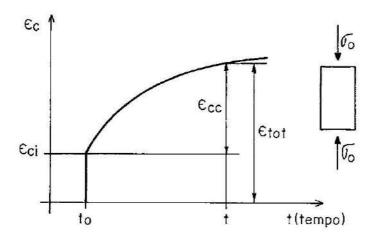


Figura 1.7 - Variação das deformações com o tempo.

De uma maneira geral pode-se escrever

$$\in_{\mathrm{CC}} = \varphi(t, t_0) \in_{\mathrm{Ci}}, \tag{1.11}$$

onde $\varphi(t,t_0)$ é o denominado coeficiente de fluência.

Esse coeficiente depende, além de outros fatores, da idade t_0 em que o concreto entra em carga. Quanto mais jovem for o concreto quando da aplicação da carga, maior será o valor de $\varphi(t,t_0)$ e, conseqüentemente, maior será a deformação de fluência. Isso, evidentemente, deve ser levado em consideração na análise de pilares de concreto armado sob cargas de longa duração.

A retração do concreto, deformação inelástica independente da tensão, é conseqüência da perda da água quimicamente inerte. Os seus efeitos no comportamento estrutural são semelhantes aos da fluência, porém em escala bem mais reduzida.

Outro fenômeno relativo ao concreto é o denominado Efeito Rüsch. Em seu estudo, Rüsch constatou que a resistência à compressão do concreto depende também da velocidade com que a ruptura é alcançada (ref. 26). Assim, um corpo de prova de concreto que é ensaiado da forma usual atinge a ruptura em poucos minutos após o início do carregamento e apresenta uma resistência superior à que seria obtida se o ensaio fosse de longa duração. Em uma estrutura real o carregamento é aplicado durante toda a sua vida útil, e assim torna-se necessário levar em conta esse efeito, reduzindo a resistência à compressão do concreto.

Diante do que se apresentou nesta seção, conclui-se que a análise de um pilar esbelto de concreto armado pode se tornar complexa e trabalhosa. A tentativa de resolver a equação diferencial (1.1), em geral, leva a um alto trabalho numérico que só se torna viável com a utilização de um computador. Assim, deve-se de imediato formular hipóteses sobre o comportamento mecânico dos materiais, bem como limitar a análise a certas situações específicas. Baseando-se nas hipóteses

admitidas, pode-se então escolher uma técnica numérica que permita resolver o problema.

1.4 - Hipóteses simplificadoras

Tendo em vista o anteriormente apresentado, em todo este trabalho admitem-se as seguintes hipóteses:

Hipótese das seções planas

Considera-se que as seções transversais ao eixo indeformado da barra, inicialmente planas, permanecem planas e normais ao eixo deformado, desprezando-se com isso as deformações por cisalhamento.

Essa hipótese, apesar de não ser rigorosamente válida, é amplamente utilizada em análise de estruturas de concreto armado, apresentando resultados compatíveis com dados experimentais disponíveis (ref. 16).

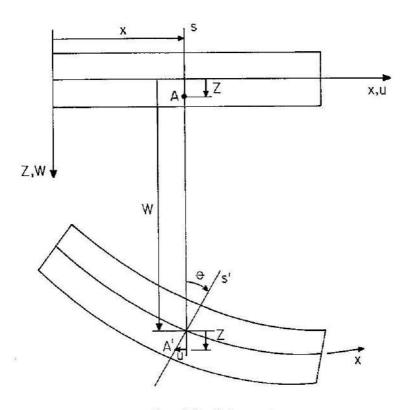


Figura 1.8 - Deslocamentos

De acordo com a figura 1.8, verifica-se que o deslocamento longitudinal $\mathfrak u$ de um ponto A situado a uma distância z do eixo neutro é dado por

$$u = -z \operatorname{tg}\theta \tag{1.12}$$

e lembrando que

$$tg\theta = \frac{dW}{dx} \tag{1.13}$$

resulta.

$$u = -z \frac{dW}{dx} (1.14)$$

Da teoria elementar, tem-se que a deformação longitudinal $\in_{\mathbf{X}}$ é

$$\epsilon_{\mathbf{X}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\mathbf{x}} \tag{1.15}$$

e substituindo (1.14) em (1.15), vem

$$\in_{\mathbf{X}} = -\mathbf{z} \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{W}}{\mathrm{d} \mathbf{x}^2} \quad . \tag{1.16}$$

Observando a equação (1.16), conclui-se que a distribuição de deformações, ao longo da altura de uma seção transversal, é linear. Em outras palavras, a deformação longitudinal em uma fibra da seção transversal é diretamente proporcional à sua distância ao eixo neutro.

Pequenos deslocamentos

Admite-se que os deslocamentos transversais W do eixo do pilar são pequenos em relação ao seu comprimento. Com isso as rotações do eixo da barra são pequenas em relação à unidade, ou seja

$$\theta \simeq \operatorname{tg} \theta << 1. \tag{1.17}$$

De acordo com a figura 1.8, tem-se que a curvatura χ do eixo deformado da barra é

$$X = \frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2W}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dW}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} , \qquad (1.18)$$

onde R é o raio de curvatura.

Substituindo (1.13) em (1.17), verifica-se que

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right)^2 \simeq 0, \tag{1.19}$$

de onde resulta a expressão aproximada para a curvatura, dada por

$$X = \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{W}}{\mathrm{d}x^2} \qquad (1.20)$$

Cargas conservativas

As cargas são consideradas conservativas e aplicadas monotonamente ao elemento estrutural.

Aderência entre o aço e o concreto

Considera-se a existência de aderência perfeita entre o aço e o concreto até a ruptura, de forma que as armaduras apresentam as mesmas deformações que o concreto que lhes é adjacente.

Concreto em tração

Admite-se que a resistência à tração do concreto é nula e despreza-se totalmente a contribuição do concreto tracionado entre fissuras. Dessa forma, todo o esforço de tração é absorvido pelas armaduras. Essa hipótese é considerada aqui apenas para haver concordância com os critérios de projeto apresentados no capítulo 3. Nenhuma dificuldade adicional surgiria se fosse empregado um diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado. Isso poderá ser facilmente visualizado nos capítulos seguintes.

Concreto em compressão

Adota-se para o concreto em compressão o diagrama parábola-retângulo apresentado na figura 1.9.

As deformações ∈co e ∈cu são tomadas com os valores

$$\in_{\text{co}} = 0,002$$
 (1.21)

$$\in_{\text{cu}} = 0,0035$$
 (1.22)

e a tensão f'c é dada por

$$f'_{c} = \alpha f_{c}, \qquad (1.23)$$

onde $f_{\mathcal{C}}$ é a resistência à compressão do concreto e α é um fator menor do que 1 e que leva em conta o Efeito Rüsch.

Salvo menção em contrário, adota-se para α o valor 0,85.

A curva da figura 1.9 tem as equações

$$\sigma_{c} = f'_{c} \left[10^{3} \in_{c} - \frac{10^{6}}{4} \in_{c^{2}} \right], \text{ se } \in_{c} \leqslant \in_{co};$$
 (1.24)

$$a_c = f'_c$$
, se $\in_{co} \leq \in_c \leq \in_{cu}$, (1.25)

que são as equações constitutivas para o concreto.

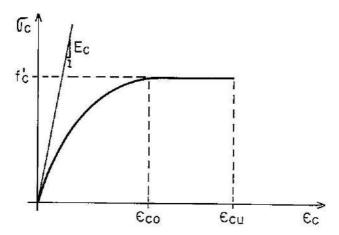


Figura 1.9 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido.

O módulo de deformação longitudinal na origem, E_{C} , é obtido por derivação de (1.24), na forma

$$E_{c} = \left(\frac{d\sigma_{c}}{d \in_{c}}\right) = 1000 \, f'_{c}. \tag{1.26}$$

Observa-se que essa expressão fornece valores baixos para $E_{\rm C}$. Em consequência disso, é de se esperar que as deformações obtidas sejam superiores às determinadas experimentalmente, especialmente no estágio inicial do carregamento.

Diagramas tensão-deformação para os aços

Para os aços, adotam-se dois diagramas distintos, dependendo da classe dos mesmos (ref. 6).

O diagrama tensão-deformação para os aços classe A é o diagrama típico de um material elastoplástico perfeito, como indicado na figura 1.10.

A deformação de escoamento €y é dada por

$$\leq_{\mathbf{y}} = \frac{f_{\mathbf{y}}}{E_{\mathbf{s}}} ,$$
(1.27)

onde f_y e E_8 são a tensão de escoamento e o módulo de elasticidade longitudinal, respectivamente.

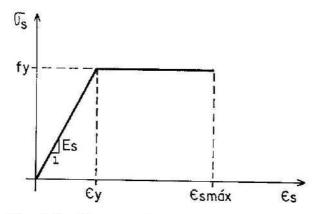


Figura 1.10 — Diagrama tensão-deformação para os aços classe A

As equações constitutivas para esses aços são

$$\sigma_{s} = E_{s} \in_{s}, \text{ se } \in_{s} \leq \in_{y};$$
 (1.28)

$$\sigma_{S} = f_{y}$$
, se $\in_{y} \leq \in_{S} \leq \in_{sm\acute{a}x}$. (1.29)

Para a deformação limite $\in_{\text{smáx}}$ adota-se o valor 0,010. Admite-se ainda um comportamento idêntico em tração e compressão.

O diagrama dos aços classe B é apresentado na figura 1.11.

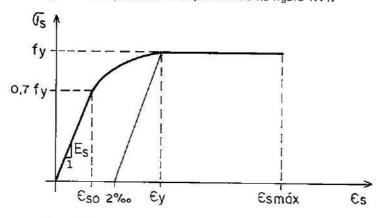


Figura 1.11 — Diagrama tensão-deformação para os aços classe B

A deformação ∈_{SO} é dada por

$$\epsilon_{so} = \frac{0.7 \, f_y}{E_s} \tag{1.30}$$

e a tensão de escoamento é definida como aquela que produz uma deformação residual igual a 0,002.

Assim, a deformação de escoamento €_V para esses aços é dada por

$$\leq_{\mathbf{y}} = \frac{f_{\mathbf{y}}}{E_{\mathbf{s}}} + 0,002 \cdot$$
(1.31)

As equações constitutivas são

$$\sigma_S = E_S \in_S$$
, se $\in_S \subseteq S_{SO}$; (1.32)

$$\in_{S} = \frac{\sigma_{S}}{E_{S}} + \frac{1}{45} \left[\frac{\sigma_{S}}{f_{y}} - 0.7 \right]^{2} , \text{ se } \in_{SO} \le \in_{S} \le \in_{Y}; \quad (1.33)$$

$$\sigma_S = f_Y$$
, se $\in_Y \leq \in_S \leq \in_{sm\acute{a}x}$. (1.34)

Aqui também admite-se o mesmo comportamento em tração e compressão.

Critério de ruptura

Considera-se haver ocorrido a ruptura de uma seção transversal de concreto armado quando a distribuição de deformações ao longo da altura da seção se enquadrar em um dos domínios da figura 1.12 (ref. 6).

Os domínios caracterizam três tipos de ruptura:

deformação excessiva da armadura tracionada
 : ∈_s ≥ 0,010

esmagamento do concreto em seções parcialmente

comprimidas : $\in_{\mathbf{C}} \geqslant 0{,}0035$

esmagamento do concreto em seções totalmente
 comprimidas
 ∈c ≥ 0,002

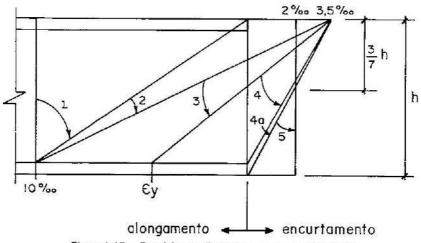


Figura 1.12 - Domínios de dimensionamento da NBR-6118

1.5 — Deformações diferidas do concreto

1.5.1 — Fluência segundo o CEB

1.5.1.1 - Hipóteses

Apresenta-se aqui a formulação para o cálculo da deformação específica de fluência do concreto, segundo o Anexo e do Boletim de Informação nº 124/125 do CEB/78 (ref. 12).

No domínio de utilização, as deformações de fluência devidas a incrementos de tensões aplicados em instantes diferentes são consideradas aditivas (hipótese da superposição). Assim, a deformação de fluência sob tensão constante é diretamente proporcional a essa tensão.

A deformação de fluência $\in_{CC}(t,t_O)$ é definida pela relação

$$\epsilon_{\rm cc}(t,t_{\rm O}) = \frac{\sigma_{\rm O}}{E_{\rm CO,S}} \quad \varphi(t,t_{\rm O}),$$
(1.35)

onde

 $\in_{cc}(t,t_0)$: deformação de fluência no instante t para tensão aplicada no instante t_0 ;

σ₀ : tensão constante aplicada no instante t₀;

E_{C28}: módulo de deformação inicial do concreto aos 28 dias de idade;

 $\varphi(t,t_0)$: coeficiente de fluência.

A deformação total no instante t é dada por

$$C_{\text{tot}}(t,t_0) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t,t_0)}{E_{c2.8}} \right],$$
 (1.36)

com $E_c(t_0)$, sendo o módulo de deformação inicial na idade t_0 . Segundo o CEB, $E_c(t_0)$ pode ser tomado igual a

$$E_c(t_0) = 1,25 E_{cm},$$
 (1.37)

onde E_{cm} é o módulo secante, determinado em função da resistência média $f_{cm}(t_0)$ do concreto na idade t_0 , corrigida conforme a seção 1.5.1.3.

A resistência média $f_{\rm cm}(t_0)$ pode ser estimada desde que seja conhecida numa idade qualquer, em geral aos 28 dias. Na figura 1.13 indica-se a variação da resistência do concreto com a idade. O módulo secante $E_{\rm cm}$ pode ser determinado em função da resistência média $f_{\rm cm}$ na forma

$$E_{cm} = 9500 \sqrt{f_{cm}}, MPa.$$
 (1.38)

A função

$$\phi(t,t_0) = \frac{1}{E_C(t_0)} + \frac{\varphi(t,t_0)}{E_{C28}}$$
(1.39)

é chamada função de fluência.

De (1.36) e (1.39) resulta que

$$\epsilon_{\text{tot}}(t,t_0) = \sigma_0 \,\phi(t,t_0) \,. \tag{1.40}$$

1.5.1.2 — Coeficiente de fluência

O coeficiente de fluência $\varphi(t,t_0)$ pode ser determinado com uma aproximação suficiente por

$$\varphi(t,t_0) = \beta_2(t_0) + \varphi_d \beta_d(t-t_0) + \varphi_f \left[\beta_f(t) - \beta_f(t_0)\right], \qquad (1.41)$$

com

$$\beta_{\rm a}(t_{\rm O}) = 0.8 \left[1 - \frac{f_{\rm c}(t_{\rm O})}{f_{\rm c}^{\infty}} \right] ,$$
 (1.42)

onde a relação $f_c(t_0)/f_{C_\infty}$, variação da resistência do concreto com a idade, é dada na figura 1.13, e

 $\varphi_{\rm d}$: coeficiente de elasticidade diferida, tomado igual a 0,4,

 $\varphi_f = \varphi_{f_1} \varphi_{f_2}$: coeficiente de plasticidade diferida;

 φ_{f_1} : dependente do meio ambiente (tabela 1.1, coluna 3);

 φ_{f_2} : dependente da espessura fictícia h_0 (figura 1.14).

A espessura fictícia é definida por

$$\mathbf{h_0} = \lambda \frac{2 \, \mathbf{A_c}}{n} \quad , \tag{1.43}$$

onde

λ : coeficiente dependente do meio ambiente (tabela 1.1, coluna 5);

A_c: área da seção de concreto;

u : perímetro em contato com a atmosfera.

Além disso.

β_d: função correspondente ao desenvolvimento ao longo do tempo da deformação elástica diferida (figura 1.15);

 β_f : função correspondente ao desenvolvimento ao longo do tempo da plasticidade diferida (figura 1.16), dependente da espessura fictícia h_0 ;

 t : idade do concreto no instante considerado, corrigida de acordo com a seção 1.5.1.3.

t₀ : idade do concreto no instante de aplicação da carga, corrigida de acordo com a seção 1.5.1.3.

1.5.1.3 - Idade corrigida

Para levar em conta os efeitos do tipo de cimento e da temperatura ambiente ao longo do endurecimento do concreto, se ela é sensivelmente diferente de 20 °C, a idade real do concreto deve ser corrigida.

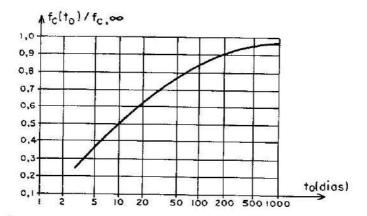


Figura 1.13 - Variação da resistência do concreto com a idade.

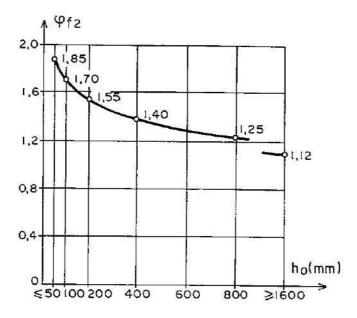


Figura 1.14 - Influência da espessura fictícia.

Considerando cada período de tempo real Δt_m , ao longo do qual a temperatura média diária se mantém constante e igual a T, a idade real t_m é substituída pela idade corrigida t dada por

$$t = \frac{\alpha}{30} \sum_{0}^{t_{m}} \left[(T + 10) \Delta t_{m} \right], \qquad (1.44)$$

onde

 $\alpha = \begin{cases} 1, \text{ para os cimentos de endurecimento normal e lento;} \\ 2, \text{ para os cimentos de endurecimento rápido;} \\ 3, \text{ para os cimentos de endurecimento rápido e de alta resistência.} \end{cases}$

T : temperatura diária do concreto em graus centígrados;

 Δt_{m} : número de dias em que a temperatura média diária se manteve igual a T.

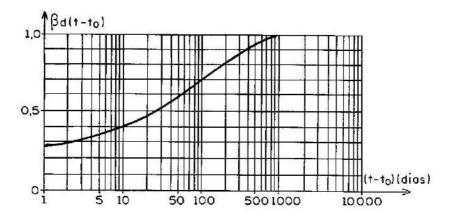


Figura 1.15 - Desenvolvimento ao longo do tempo da deformação elástica diferida.

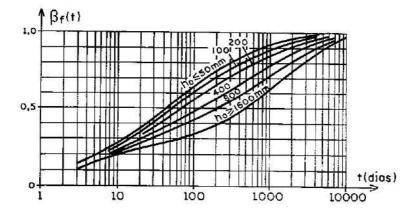


Figura 1.16 — Desenvolvimento ao longo do tempo da deformação plástica diferida.

Tabela 1.1 — Coeficientes básicos de fluência e retração

COEF	LOUENTER	date - constitution - Allian	
COEFICIENTES		COEFICIENTE	
$\varphi_{\mathbf{f}_1}$	€81	λ	
0,8 1,0 2,0	- 0,00010 + 0,00013 + 0,00032	30 5 1,5	
	0,8 1,0	0,8 - 0,00010 1,0 + 0,00013 2,0 + 0,00032	

- a) $\in_{\mathbb{S}^1}$ negativo inchamento no lugar de retração.
- b) Os valores indicados para φ_{f_1} e $\in_{\mathbb{S}^1}$ referem-se a concretos de consistência plástica. Eles devem ser reduzidos ou aumentados de 25%, caso se trate de concretos de consistência firme ou mole, respectivamente.

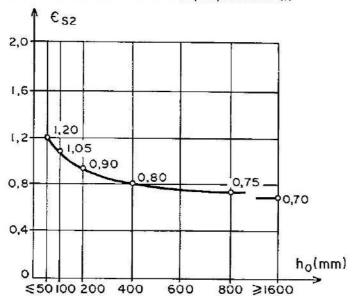


Figura 1.17 — Influência da espessura fictícia ho na retração.

1.5.2 — Retração segundo o CEB

O procedimento para o cálculo da deformação específica de retração apresentado aqui também é o sugerido pelo CEB.

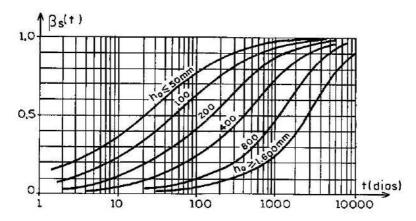


Figura 1.18 - Desenvolvimento da retração ao longo do tempo.

A deformação relativa de retração que se desenvolve num intervalo de tempo ($t-t_0$) é dada por

$$\in_{CS}(t,t_0) = \in_{SO} \left[\beta_S(t) - \beta_S(t_0) \right], \tag{1.45}$$

onde

 $\in_{\operatorname{CS}}(t,t_0)$: deformação específica de retração no intervalo de tempo $t-t_0$;

 $\in_{SO} = \in_{S1} \in_{S2}$: coeficiente básico de retração, sendo;

€_{S1} : dependente do meio ambiente (tabela 1.1, coluna 4);

 $\in_{\mathbb{S}^2}$: dependente da espessura fictícia h_0 (figura 1.17);

 β_S ; função correspondente ao desenvolvimento da retração ao longo do tempo (figura 1.18);

t : idade do concreto no instante considerado, corrigida segundo a secão 1.5.1.3, com α = 1 em todos os casos;

t_o: idade do concreto no instante a partir do qual a influência da retração se faz sentir, corrigida de acordo com a seção 1.5.1.3, com α = 1 em todos os casos.

1.5.3 - Expressões analíticas

Nas seções anteriores, apresentou-se o modelo proposto pelo CEB para a avaliação das deformações diferidas do concreto. Para a implementação computacional, entretanto, é necessário ajustar funções analíticas às curvas das figuras 1.13 a 1.18. O próprio CEB apresenta essas funções no Apêndice D da ref. 14. Aqui, por simplicidade, utilizam-se as expressões apresentadas na ref. 27, que são mostradas a seguir.

$$\frac{f_{c}(t_{0})}{f_{c\infty}} = \frac{9t_{0}(t_{0} + 42)}{(9t_{0} + 40)(t_{0} + 61)}, t_{0} \text{ em dias;}$$
(1.46)

$$\varphi f_2 = \frac{42 + h_0}{20 + h_0}$$
, $h_0 \text{ em cm}$; (1.47)

$$\beta_{\rm d}(t-t_0) = \frac{t-t_0+20}{t-t_0+70}$$
 , teto em dias; (1.48)

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D}$$
, t em dias e $t \ge 3$, (1.49)

sendo

A =
$$42h_0^3 - 350h_0^2 + 588h_0 + 113$$

B = $768h_0^3 - 3060h_0^2 + 3234h_0 - 23$
C = $-200h_0^3 + 13h_0^2 + 1090h_0 + 183$
D = $7579h_0^3 - 31916h_0^2 + 35343h_0 + 1931$

onde ho é a espessura fictícia em metros.

$$\epsilon_{s2} = \frac{33 + 2h_0}{20.8 + 3h_0}, h_0 \text{ em cm};$$
(1.50)

$$\beta s(t) = \begin{array}{c} \left(\frac{t}{100}\right)^3 \, + \, \, 40 \left(\frac{t}{100}\right)^2 \, + \, B \, \left(\frac{t}{100}\right) \\ \left(\frac{t}{100}\right)^3 \, + \, C \, \left(\frac{t}{100}\right)^2 \, + \, D \, \left(\frac{t}{100}\right) \, + \, E \end{array} \, , \, t \, \text{em dias e } t \geqslant 3, \end{array}$$

onde

B =
$$116h_0^3 - 282h_0^2 + 220h_0 - 4.8$$

C = $2.5h_0^3 - 8.8h_0 + 40.7$
D = $-75h_0^3 + 585h_0^2 + 496h_0 - 6.8$
E = $2030h_0^5 - 4940h_0^4 + 2880h_0^3 - 14.8h_0^2 + 10.7h_0 - 0.52$

sendo ho a espessura fictícia em metros.

1.6 - Técnicas numéricas para análise

Tendo em vista todos os fatores envolvidos no comportamento do concreto armado, uma solução direta da equação diferencial de equilíbrio torna-se inviável. Devido a taís dificuldades, durante muito tempo o problema da verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto armado foi resolvido através de fórmulas empíricas, sem uma análise teórica racional dos efeitos não-lineares.

Com o advento dos computadores, um grande avanço se deu na análise não-linear. Desde então, diversos algoritmos têm sido estudados, em geral, utilizando uma combinação de técnicas incrementais e iterativas para se encontrar uma resposta completa da estrutura até a ruína.

Diversas técnicas numéricas para a análise de pilares esbeltos de concreto armado têm sido apresentadas na literatura. A solução do problema pode ser encontrada, por exemplo, através de um esquema iterativo de aproximações sucessivas, fazendo uso da analogia de Mohr para o cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar (ref. 3). Devido à simplicidade do esquema computacional, essa técnica pode ser empregada, também, para o dimensionamento nas situações usuais de projeto.

O método das diferenças finitas tem sido usado com sucesso na análise (ref. 4). Apesar da dificuldade de generalização inerente à técnica de diferenças finitas, consegue-se resolver o problema para as condições usuais de contorno e carregamento do pilar.

O método dos elementos finitos, por outro lado, permite facilmente a generalização das situações de carga e condições de contorno (ref. 29). Isto justifica a grande utilização desse método em análise não-linear de estruturas de concreto armado.

Nos capítulos que se seguem, apresentam-se algumas técnicas numéricas para a análise e dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado. Uma técnica de aproximações sucessivas é empregada para a análise e dimensionamento de pilares sob flexão normal composta, considerando os efeitos das deformações diferidas do concreto. Os métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos também são utilizados para a análise de pilares esbeltos sob cargas de curta duração.



CAPÍTULO 2 UM ALGORITMO PARA ANÁLISE

2.1 — Considerações gerais

A análise de pilares esbeltos de concreto armado, com a inclusão das não-linearidades física e geométrica, requer um grande número de cálculos numéricos e só é viável através da utilização de computadores digitais. As propriedades particulares do concreto, como a fissuração, a fluência e a retração, bem como as equações constitutivas para o concreto e o aço, nem sempre tão simples, aumentam a complexidade da análise. O surgimento do tempo como uma nova variável, quando se estende o estudo a cargas de longa duração, e a própria característica dos métodos numéricos, iterativos e incrementais, ampliam cada vez mais o trabalho computacional requerido.

Neste capítulo restringe-se o estudo a pilares isostáticos, com seção transversal possuindo um eixo de simetria coincidente com o plano da flexão, ou seja, analisa-se apenas o caso de flexão normal. A seção transversal pode, de maneira geral, variar ao longo do eixo do pilar, e o carregamento pode ser qualquer, desde que seja mantida a condição de flexão normal. O carregamento pode variar ao longo do tempo, porém de forma monótona, a fim de se garantir a condição de carregamento estático. A não-linearidade física da estrutura é incluída através dos diagramas tensão-deformação não-lineares para o aço e o concreto, e a não-linearidade geométrica através de um processo iterativo de aproximações sucessivas, onde em cada iteração os deslocamentos transversais do eixo do pilar são atualizados.

2.2 - Relações momento fletor - esforço normal - curvatura

2.2.1 — Solicitações internas e externas

Para o cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar, necessita-se conhecer a curvatura X de uma seção transversal genérica do mesmo, associada a um esforço normal N e a um momento fletor M que solicitam a seção. Para isto necessitam-se conhecer as relações momento fletor — esforço normal — curvatura, abreviadamente relações M-N-X, para um dado tipo de seção. A geometria da seção, bem como a disposição e quantidade de armadura, são conhecidas "a priori".

Deduzem-se aqui essas relações para uma seção de forma qualquer, porém

apresentando um eixo de simetria coincidente com o plano de atuação do momento fletor, como na figura 2.1.

A seção em estudo possui n camadas de armadura dispostas simetricamente em relação ao plano de atuação do momento fletor. As camada são numeradas a partir da camada mais próxima da borda tracionada pela aplicação exclusiva do momento fletor. Na figura 2.1, n é a camada mais próxima da borda mais encurtada.

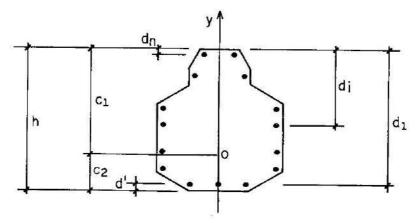


Figura 2.1 — Seção transversal de concreto armado

Com a aplicação do momento fletor M e do esforço normal N, a distribuição de deformações na seção é a linear mostrada na figura 2.2, onde x é a distância da borda mais comprida à linha neutra. Convenciona-se como sendo positivas as deformações de compressão.

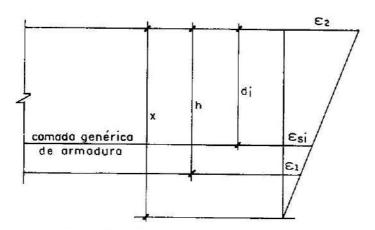


Figura 2,2 — Distribuição linear de deformações na seção transversal

A curvatura X da seção é dada por

$$X = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h}. \tag{2.1}$$

Conhecidas X e x, as deformações em toda a seção ficam perfeitamente determinadas. Na figura 2,3 mostra-se a deformação em uma fibra genérica situada a uma distância y da linha neutra.

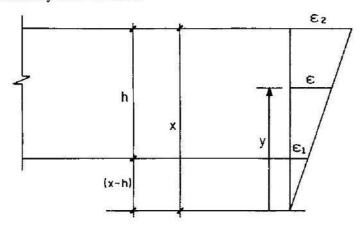


Figura 2.3 - Deformação em uma fibra genérica da seção

Pela figura, verifica-se que

$$\frac{\in}{\mathbf{y}} = \frac{\in_2}{\mathbf{x}} = \frac{\in_1}{\mathbf{x} - \mathbf{h}} , \qquad (2.2)$$

ou

$$\frac{\epsilon}{v} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{h} , \qquad (2.3)$$

e introduzindo a definição para a curvatura X dada em (2.1), resulta finalmente

$$\in = X y$$
. (2.4)

Observa-se que a deformação dada por (2.4) depende de X e X, pois necessita-se conhecer X para se medir Y a partir da linha neutra.

Para uma camada genérica de armadura (figura 2.2), a deformação ∈_{\$i} é

$$\in_{\mathbf{S}_{i}} = \chi \left(\mathbf{x} - \mathbf{d}_{i} \right). \tag{2.5}$$

Com as deformações e os diagramas tensão-deformação dos materiais, encontram-se as tensões nas diversas fibras de concreto e nas camadas de armadura da seção. Integrando-se as tensões nas áreas correspondentes, obtêm-se as resultantes de tensões no concreto, $R_{\rm CC}$, e as resultantes de tensões nas armaduras, genericamente $R_{\rm Si}$ para a camada i. Uma vez que as deformações dependem de x e χ , essas resultantes também são funções de χ e χ , ou seja

$$R_{cc} = R_{cc}(x, X); \tag{2.6}$$

$$R_{si} = A_{si} \sigma_{si} (x, X), \qquad (2.7)$$

onde

 A_{Si} — área de aço na camada genérica i, σ_{Si} — tensão na armadura da camada i,

Na figura 2.4 apresentam-se as resultantes de tensões, bern como o momento fletor **M** e o esforço normal N que atua no centro de gravidade da seção de concreto.

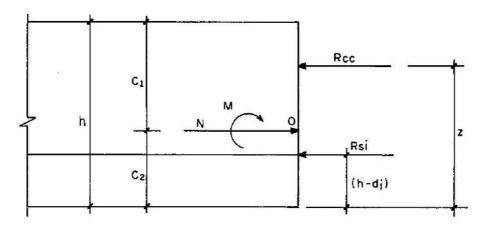


Figura 2.4 — Resultante de tensões e solicitações externas

A distância z da resultante de compressão no concreto à borda menos comprimida da seção também é função de x e X, ou seja

$$z = z(x, X). (2.8)$$

As deformações da seção, caracterizadas pelas incógnitas x e X, devem ser tais que haja equilíbrio entre as solicitações e os esforços resistentes.

Aplicando as duas equações de equilíbrio da estática, vem:

a - soma de forças igual a zero

$$N - R_{CC}(x, X) - \sum_{i=1}^{n} A_{Si} \sigma_{Si}(x, X) = 0$$
 (2.9)

b - soma de momentos igual a zero

$$M = R_{CC}(x, X) z(x, X) + \sum_{i=1}^{n} A_{Si}(h - d_i) o_{Si}(x, X) - N C_2$$
 (2.10)

As equações (2.9) e (2.10) constituem um sistema de duas equações algébricas não-lineares a duas incógnitas, $x \in X$. A solução do sistema é encontrada iterativamente, uma vez que não se consegue uma expressão analítica para as incógnitas, devido à complexidade das funções não-lineares.

Para seções usuais, como a retangular e a circular, as equações (2.9) e (2.10) podem ser colocadas em forma adimensional através da definição de momento fletor e esforço normal reduzidos. No apêndice apresenta-se esse desenvolvimento para seções retangulares.

Diversos algoritmos podem ser utilizados para resolver o sistema não-linear. Apresentam-se a seguir três algoritmos capazes de resolver o problema (ref. 3).

2.2.2 - Algoritmos para resolver o sistema de equações não-lineares

I) Algoritmo com rigidez constante

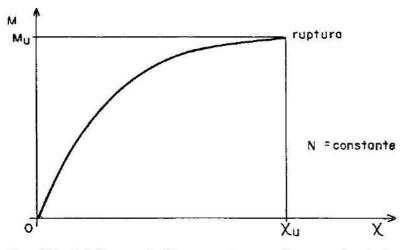


Figura 2,5 - Relação momento fletor - curvatura para esforço normal constante

Para um valor fixado de x, a equação (2.10) relaciona diretamente o momento fletor M com a curvatura X da seção, na presença de um esforço normal constante N. Essa relação entre momento fletor e curvatura tem a forma apresentada na figura 2.5. A relação é não-linear e a ruptura ocorre no ponto $(X_{\mathbf{u}},M_{\mathbf{u}})$.

Os três algoritmos aqui apresentados consistem basicamente no mesmo procedimento de solução, variando apenas o número de iterações necessárias à convergência. Neles, necessita-se conhecer um valor preestabelecido da curvatura, com o qual a equação (2.9) fornece a incógnita x e a equação (2.10) dá uma primeira aproximação do momento fletor. Incrementa-se a curvatura e repete-se o processo até ajustar a equação (2.10) dentro de uma ordem de precisão fixada. Com isso, impõe-se a condição de esforço normal solicitante igual ao esforço normal resistente por (2.9) e, analogamente, para o momento fletor por (2.10). A condição de ruptura será verificada na seção seguinte.

Na figura 2.6 apresenta-se a relação momento fletor — curvatura, onde M é o momento fletor solicitante na seção.

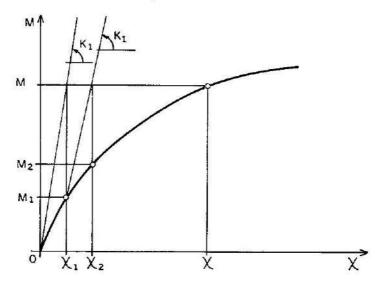


Figura 2.6 - Algoritmo com rigidez constante

Inicializa-se o processo com a rigidez à flexão K_1 da seção não-fissurada de concreto armado,

$$K_1 = E_C I_C + E_S \sum_{i=1}^{n} I_{Si}$$
, (2.11)

onde

 E_c — módulo de deformação longitudinal do concreto, na origem do diagrama tensão-deformação;

 I_C — momento de inércia da seção de concreto em relação ao baricentro da seção homogeneizada;

E_s — módulo de elasticidade do aço;

Isi — momento de inércia da camada genérica i de armadura, em relação ao baricentro da seção homogeneizada.

Com a rigidez \mathbf{K}_1 determina-se a primeira aproximação para a curvatura χ dada por,

$$\chi_1 = \frac{M}{K_1} . \tag{2.12}$$

Conhecida X_1 , a equação (2.9) é uma função f(x) de uma única variável x, para a qual deseja-se encontrar a raiz. Pode-se resolver esse problema pelo algoritmo da bissecante, desde que se conheça um intervalo $[x_i, x_s]$ no qual se encontra a raiz. Na figura 2.7 apresenta-se o processo da bissecante, onde f_i e f_s são os valores da função f(x), equação (2.9), nos extremos do intervalo.

Determina-se a primeira aproximação x_1 a partir da intersecção da reta que une os pontos (x_i, f_i) e (x_s, f_s) com o eixo das abcissas e calcula-se $f_1 = f(x_1)$. Repete-se o processo com o novo intervalo $[x_1, x_s]$ para determinar a segunda aproximação x_2 e assim sucessivamente, até que em uma iteração genérica j, o valor absoluto de f_j seja menor que uma tolerância estipulada. Adota-se o valor de x obtido nesta iteração como um valor aproximado da raiz.

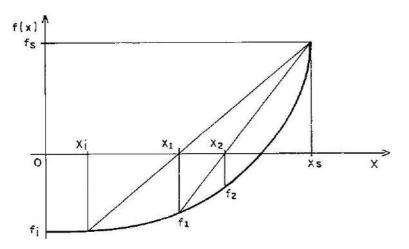


Figura 2.7 - Algoritmo da bissecante

Os limites x_i e x_s do intervalo são obtidos da seguinte maneira:

Limite Xi

Na determinação de x_i , deve-se limitar a deformação na armadura mais tracionada em 0,01.

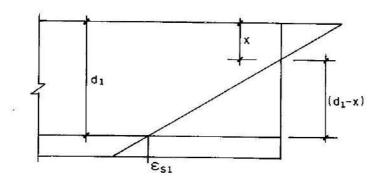


Figura 2.8 — Determinação de xi

Observando a figura 2.8 e a equação (2.4), verifica-se que

$$\in_{S1} = X_1 \ (\mathbf{d}_1 - \mathbf{x}).$$
(2.13)

Impondo a condição $\in_{S1} \le 0.01$, resulta

$$x \ge d_1 - \frac{0.01}{X_1}$$
 (2.14)

Dependendo do valor de X_1 , o segundo termo da desigualdade (2.14) pode ser negativo. Assim, o limite x_i deve ser o maior dos valores

$$x_i \ge \begin{cases} d_1 - \frac{0.01}{x_1} & , \end{cases}$$
 (2.15)

Limite xs

Para a determinação de x_S , a deformação no concreto deve ser limitada. Podem ocorrer dois casos distintos dependendo do valor da curvatura X_1 . No limite entre esses dois casos, a deformação na borda menos comprimida da seção é nula, isto é, limite entre os domínios 4a e 5. A situação é apresentada na figura 2.9.

De acordo com a figura 2.9 e a equação (2.1), a curvatura correspondente pode ser determinada por

$$x_{\text{lim}} = \frac{0.0035}{h}$$
 (2.16)

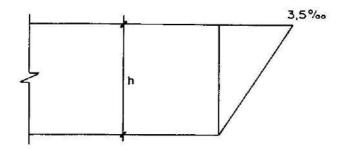


Figura 2.9 - Limite entre os domínios 4a e 5

Então, se $\chi_1 \geqslant \chi_{\lim}$, deve-se limitar a deformação na borda mais comprimida em 0,0035 e, se $\chi_1 < \chi_{\lim}$, a deformação na fibra situada a 3/7 da altura da seção, medida a partir da borda mais comprimida da mesma, deve ser limitada em 0,002.

Caso a) $X_i \ge X_{\lim}$

Como é mostrado na figura 2.3 e na equação (2.4), a deformação $\ensuremath{\in_2}$ na borda mais comprimida é dada por

$$\in_2 = X_1 \times . \tag{2.17}$$

Impondo a condição $\in_2 \le 0,0035$, resulta

$$\chi \leqslant \frac{0,0035}{\chi_1} \qquad , \tag{2.18}$$

Caso b) $\chi_1 < \chi_{\lim}$

Neste caso, a deformação \in_{O} na fibra a 3/7 da altura da seção, medida a partir da borda mais comprimida, deve ser limitada em 0,002.

Pela figura 2.10, verifica-se que

$$y_0 = x - \frac{3}{7} h$$
 (2.19)

e substituindo y $_0$ em (2.4), a deformação \in_0 é dada por

$$\in_{\mathbf{0}} = \chi_1 \left[\mathbf{x} - \frac{3}{7} \mathbf{h} \right]. \tag{2.20}$$

Fazendo ∈0 ≤ 0,002 resulta

$$x \le \frac{0,002}{\chi_1} + \frac{3}{7} h$$
 (2.21)

Finalmente o limite x_S será, conforme o caso:

$$x_{S} = \frac{0,0035}{\chi_{1}}$$
, se $\chi_{1} \geqslant \chi_{\lim}$;
$$x_{S} = \frac{0,002}{\chi_{1}} + \frac{3}{7} \text{ h. se } \chi_{1} < \chi_{\lim}$$

$$(2.22)$$

Figura 2.10 - Deformação €o na fibra a 3h/7 da borda mais comprimida

Encontrada a incógnita x correspondente à primeira aproximação X_1 da curvatura, calcula-se diretamente por (2.10) o momento M_1 e fica determinado o primeiro ponto na curva momento fletor — curvatura da figura 2.6.

Em seguida determina-se nova aproximação χ_2 para a curvatura (figura 2.6) como

$$X_2 = X_1 + \frac{M - M_1}{K_1} \qquad (2.23)$$

Com X_2 repete-se o processo para se determinar M_2 e o segundo ponto da curva. A convergência final será satisfeita quando em uma iteração j ficarem atendidas as condições

$$\left| \frac{M - Mj}{M} \right| < \text{tolerância};$$
 (2.24)

$$\left| \frac{\lambda_{\hat{j}} - \chi_{\hat{j}-1}}{\chi_{\hat{j}}} \right| < \text{tolerância.}$$
 (2.25)

Esse algoritmo, em geral, requer um grande número de iterações, principalmente se o momento fletor solicitante é próximo do momento de ruptura da seção. Com isto, o tempo de processamento computacional pode ser muito alto. Dos três algoritmos apresentados nesta seção, esse é o menos eficiente sob tal ponto de vista, porém a convergência é razoavelmente segura, sem problemas de instabilidade numérica.

II) Algoritmo com rigidez secante

O fundamento do processo é o mesmo do algoritmo anterior. Incrementase a curvatura da seção, encontra-se a raiz da equação $\{2.9\}$ e calcula-se por $\{2.10\}$ o momento fletor correspondente. A diferença consiste no grau de avanço no iterativo correspondente à curvatura X da seção. A rigidez é alterada em cada iteração através da secante à curva momento fletor — curvatura, como é mostrado na figura 2.11.

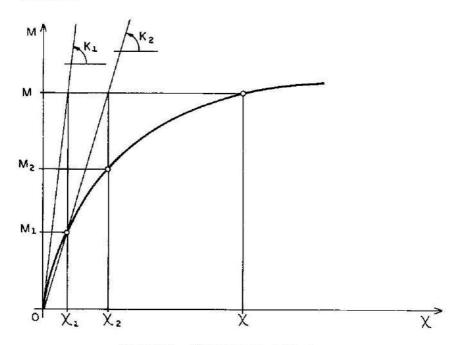


Figura 2.11 — Algoritmo com rigidez secante

Inicializa-se o processo com a mesma rigidez K_1 da seção não-fissurada, dada por (2.11),e determina-se o primeiro ponto $(\lambda_1:M_1)$ na curva. A rigidez K_2 para a próxima iteração será determinada pela secante à curva ligando a origem ao ponto $(\lambda_1:M_1)$, como

$$K_2 = \frac{M_1}{\chi_1} . \tag{2.26}$$

A curvatura χ_2 nessa iteração será dada por (2.27) e no restante o processo é idêntico ao anterior.

$$\chi_2 = \frac{M}{K_2} . \tag{2.27}$$

Esse algoritmo requer um menor número de iterações que o anterior, reduzindo com isto o tempo de processamento computacional, e não apresenta problemas de instabilidade numérica. Se o momento fletor é próximo do momento de ruptura da seção, esse algoritmo, como o anterior, mostra-se ineficiente por exigir um número significativo de iterações até a convergência.

III) Algoritmo com rigidez tangente

A diferença deste para o algoritmo de rigidez secante é que aqui se procura acompanhar a curva momento fletor — curvatura, determinando-se valores aproximados da tangente à mesma nos diversos pontos. Na figura 2.12 encontra-se indicada a determinação da rigidez tangente.

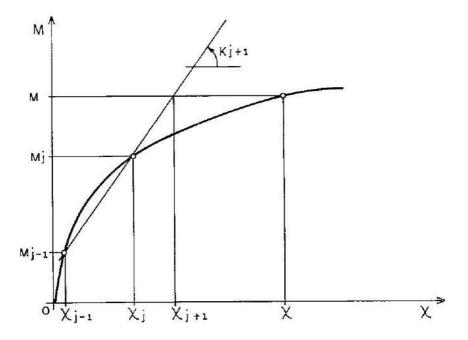


Figura 2.12 - Algoritmo com rigidez tangente

Em duas iterações sucessivas têm-se determinados os pontos (X_{j-1}, M_{j-1}) e (X_j, M_j) . A rigidez K_{j+1} para a iteração seguinte é determinada pela reta que liga esses pontos, a qual corresponde a uma paralela à tangente à curva em um ponto intermediário, como

$$K_{j+1} = \frac{M_j - M_{j-1}}{X_{j-1} - X_{j-1}}$$
 (2.28)

A aproximação seguinte para a curvatura X_{j+1}, será

$$\chi_{j+1} = \chi_j + \frac{M - M_j}{K_{j+1}}$$
 (2.29)

No restante o processo é idêntico aos anteriores, apresentando, porém, uma redução sensível no número de iterações requeridas para a convergência. Esse algoritmo, no entanto, apresenta problemas de instabilidade numérica quando o momento fletor solicitante é próximo do momento de ruptura. Pode ocorrer que, nas proximidades da ruptura, a curva momento fletor — curvatura tenda a ficar paralela ao eixo das curvaturas e, com isto, a rigidez tangente $K_j + 1$ calculada em (2.28), muito próxima de zero. Resulta então, em (2.29), um problema numérico que antes inexistia. Na figura 2.13 apresenta-se o caso em questão.

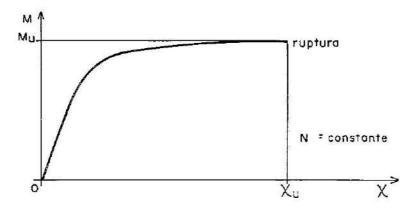


Figura 2.13 — Curva momento fletor — curvatura, com rigidez tangente aproximadamente nula nas proximidades da ruptura

Para evitar o problema numérico mencionado, basta limitar a rigidez $K_{\tilde{i}}+_1$ a um valor mínimo de segurança.

2.2.3 - Ruptura da seção

Para a completa obtenção da relação momento fletor — curvatura da seção transversal de concreto armado, é necessário analisá-la também na ruptura. Interessa saber se, para um dado par de esforços solicitantes, a seção entra ou não em ruptura. Mais precisamente, necessita-se conhecer o maior momento fletor que se pode aplicar à seção, na presença de um esforço normál constante, sem violar as condições de equilíbrio interno.

A seção da figura 2.1 entrará em ruptura com infinitos pares de esforço normal e momento fletor. Isto pode ser visualizado através de um diagrama de interação, como na figura 2.14.

Pontos situados na região A do diagrama caracterizam uma situação equilibrada entre os esforços solicitantes e os esforços resistentes. Pontos na região B representam solicitações às quais a seção não é capaz de suportar. A curva limite entre essas duas regiões corresponde aos infinitos pares de esforços solicitantes que levam a secão à ruína.

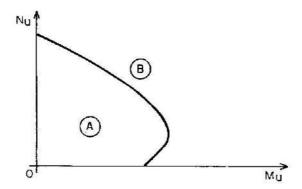


Figura 2,14 — Diagrama de interação momento fletor — esforço normal últimos

A determinação do momento fletor de ruína para um valor fixado do esforço normal também é feita através das equações (2.9) e (2.10), com o procedimento que se segue.

Com a equação (2.9), deseja-se encontrar a incógnita x tal que o esforço normal solicitante N esteja equilibrado pelo esforço normal resistente, porém na ruptura. A ruptura se dá quando as deformações da seção se enquadrarem em um dos domínios de dimensionamento da figura 1. 12. Como se trata de flexocompressão, o domínio 1 deve ser eliminado. Então deseja-se encontrar a incógnita x em um dos domínios, do 2 ao 5, de forma que haja equilibrio do esforço normal. Para isto, pode-se utilizar o processo da bissecante, admitindo que o intervalo no qual encontra-se a solução x é $[o, \infty)$. Utiliza-se o algoritmo mostrado na figura 2.7. A curvatura da seção para um dado valor de x é conhecida, pois em cada domínio existe sempre um valor de deformação prefixado. A curvatura x da seção na ruptura

depende, portanto, apenas de x. Caso a solução x não seja encontrada no processo da bissecante, significa que a seção não é capaz de absorver o esforço normal N, o que caracteriza a ruptura.

Encontrada a raiz x da equação (2.9), a equação (2.10) fornece diretamente o momento fletor de ruptura $M_{\rm B}$ da seção.

2.3 - Cálculo de deslocamentos em pilares de concreto armado

A análise de um pilar de concreto armado requer o cálculo dos deslocamentos transversais do seu eixo, uma vez que esses deslocamentos alteram os momentos fletores solicitantes nas diversas seções do pilar e, consequentemente, sua capacidade de carga. Essa alteração dos esforços solicitantes em função dos deslocamentos é consequência da não-linearidade geométrica da estrutura. A não-linearidade física relativa ao material concreto armado foi considerada anteriormente quando da adoção de diagramas tensão-deformação não-lineares para o concreto e para o aço. Uma vez que esses diagramas são utilizados na obtenção das relações momento fletor-esforço normal-curvatura, a não-linearidade física fica incluída, finalmente, nessas relações. Elas serão utilizadas para o cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar, através de um procedimento iterativo de aproximações sucessivas. O aumento dos momentos fletores devido aos deslocamentos transversais exige a comparação dos momentos solicitantes com o momento de ruptura da seção. Com isso, ficam respeitadas as deformações limites para o aço e para o concreto e o critério de ruptura, através dos domínios de dimensionamento. O estado limite último por ruptura é caracterizado quando, em uma seção transversal do pilar, o momento fletor solicitante atinge o momento de ruptura.

Na figura 2.15 mostra-se um pilar isostático sob flexão normal, submetido a um carregamento genérico.

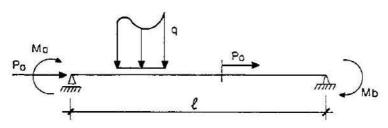


Figura 2.15 - Pilar com carregamento genérico

Para se proceder ao cálculo dos deslocamentos, divide-se o comprimento ℓ do pilar em um número n de segmentos, de comprimentos iguais ou não, através das n \pm 1 seções transversais mostradas na figura 2.16-a. Uma vez que o pilar é isostático, os momentos fletores e esforços normais nas diversas seções podem ser obtidos diretamente, por simples aplicação das equações de equilíbrio da estática.

Esses são esforços solicitantes de primeira ordem, uma vez que são obtidos na configuração indeformada da estrutura. Os esforços cortantes nas diversas seções não influenciam na análise, já que estão sendo desprezadas as deformações por cisalhamento. Na figura 2.16-b apresenta-se o diagrama de momentos fletores de primeira ordem, de uma forma simbólica, para um caso geral.

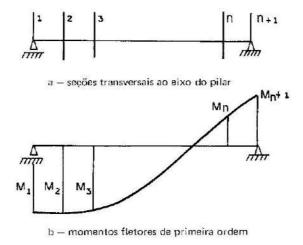


Figura 2.16 - Seções transversais ao eixo do pilar e momentos fletores de primeira ordem

A partir dos momentos fletores de primeira ordem e esforços normais nas diversas seções transversais, obtêm-se as curvaturas destas seções através das relações momento fletor — esforço normal — curvatura. Com a hipótese de pequenos deslocamentos e a expressão aproximada para a curvatura, equação (1.20), verifica-se que os deslocamentos transversais W do eixo do pilar podem ser calculados por uma dupla integração das curvaturas ao longo deste eixo.

Na figura 2.17, encontra-se indicado o diagrama de curvaturas devido aos esforços de primeira ordem e os deslocamentos correspondentes.

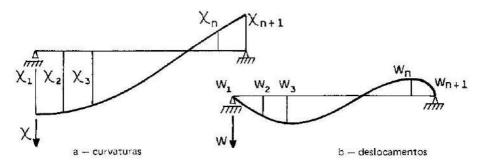


Figura 2.17 — Curvaturas e deslocamentos devidos aos esforços de primeira ordem

A integração das curvaturas pode ser feita com o emprego da analogia de Mohr. Inicialmente inverte-se o diagrama de curvaturas e adota-se o mesmo como um carregamento fictício. Carrega-se o pilar como indicado na figura 2.18 e os momentos fletores calculados para este sistema serão os deslocamentos transversais procurados.

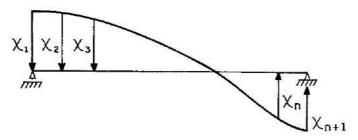


Figura 2.18 - Carregamento fictício da analogia de Mohr

Devido aos deslocamentos transversais nas diversas seções do pilar, resulta um aumento dos momentos fletores. Recalculam-se os novos momentos para esta configuração deformada, os quais são a soma dos momentos de primeira e de segunda ordens. Determinam-se as curvaturas para os novos momentos e procede-se a outra integração para encontrar os deslocamentos, e assim sucessivamente, até a convergência. A convergência dos deslocamentos é admitida quando em duas iterações sucessivas j = 1 e j, é satisfeita a desigualdade (2.30) para todas as seções.

$$\left| \frac{W_j^i - W_j^i}{W_j^i} \right| < \text{tolerância} (i = 1 \text{ a } n + 1)$$
 (2.30)

A instabilidade estrutural é detectada quando, em uma seção de referência, três iterações sucessivas mostram a divergência dos deslocamentos, ou seja, quando é atendida a desigualdade

$$|W_{j-1}| > |W_{j-1} - W_{j-2}|$$
 (2.31)

A ruína por ruptura é alcançada quando o momento solicitante em uma secão transversal atinge o momento último, como apresentado na secão 2.2.3.

Com esta análise pode-se verificar se um pilar é estável ou não, sob a ação de um dado carregamento. A convergência dos deslocamentos indica a estabilidade, ou, em outras palavras, o pilar resiste às cargas aplicadas. A instabilidade estrutural ou a ruptura significam que o pilar não resiste ao carregamento dado. Entretanto, não fica caracterizado o carregamento de ruína do pilar. Um procedimento incremental pode ser empregado, juntamente com essa análise iterativa, para se obter a curva carga-deslocamento e o carregamento de

ruína do pilar. Divide-se o carregamento da figura 2.15 por um fator inteiro m, de forma que todas as cargas guardem entre si a mesma relação de proporcionalidade.

O carregamento fracionado, mostrando o perfil do carregamento real, é apresentado na figura 2.19.

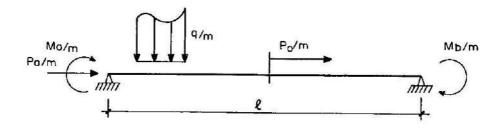


Figura 2.19 - Perfil do carregamento

Numa primeira etapa de carga, aplica-se ao pilar, na configuração indeformada, o carregamento da figura 2.19, e procede-se à análise iterativa até a convergência dos desfocamentos. Numa segunda etapa de carga, aplica-se sobre o pilar já deformado um incremento de carga igual ao carregamento da figura 2.19. Assim, nesta etapa, o pilar estará com duas vezes o carregamento da figura 2.19. Repete-se a análise iterativa até a convergência dos deslocamentos e assim sucessivamente, até que, em determinado nível de carga, ocorra a ruína do pilar.

2.4 - Implementação computacional das deformações diferidas do concreto

2.4.1 - Inclusão da fluência

A fluência do concreto pode ser introduzida no algoritmo de análise descrito anteriormente, através de procedimentos diversos. Nesta seção apresenta-se uma solução relativamente simples sugerida no Manual de Flambagem do CEB (ref. 11) e utilizada pelo autor (ref. 3). A consideração da fluência consiste simplesmente em se proceder a uma alteração no diagrama tensão-deformação do concreto, através de uma transformação de razão $\varphi(t,t_0)$, paralelamente ao eixo das deformações. O novo diagrama tensão-deformação é mostrado na figura 2.20.

A equação do trecho parabólico, entre a origem e a deformação 0,002 (1+ φ), é dada por

$$\sigma_{\rm C} = f'_{\rm C} \left[\frac{10^3 \in_{\rm C}}{(1+\varphi)} - \frac{10^6 \in_{\rm C}^2}{4(1+\varphi)^2} \right] ,$$
 (2.32)

onde φ é o valor do coeficiente de fluência $\varphi(t,t_0)$ em um determinado instante t.

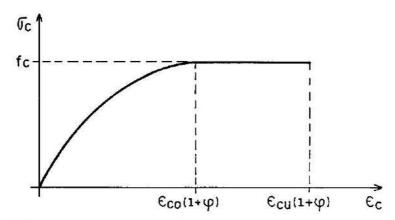


Figura 2.20 — Diagrama tensão-deformação do concreto no tempo. Consideração da fluência

Devido à alteração procedida no diagrama tensão-deformação do concreto, há a necessidade de se alterar os domínios de dimensionamento, uma vez que as deformações últimas para o concreto foram modificadas pela introdução do fator $(1+\varphi)$. Os domínios modificados para a inclusão da fluência do concreto são apresentados na figura 2.21.

Com o novo diagrama tensão-deformação para o concreto, função do tempo, pode-se obter, em cada instante t, as relações momento fletor — esforço normal — curvatura para a seção em estudo, utilizando o mesmo procedimento já descrito. A ruptura da seção também é determinada como anteriormente, apenas com a utilização dos domínios de dimensionamento da figura 2.21.

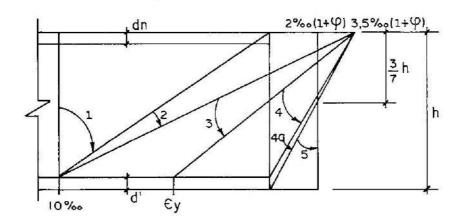


Figura 2.21 — Domínios de dimensionamento no tempo. Consideração da fluência do concreto

2.4.2 - Inclusão da retração

A retração é incluída no algoritmo de análise, considerando-se que a deformação total do concreto, dada por (2.4), é composta de uma parcela mecânica, ∈_{cmec}, e da deformação específica de retração no instante em questão. A deformação mecânica será

$$\leq_{\text{cmec}} = \chi y - \leq_{\text{cs}}(t, t_0). \tag{2.33}$$

Com as deformações mecânicas e o diagrama tensão-deformação para o concreto, obtém-se, por integração na seção transversal, a resultante de compressão e sua posição. A resultante de compressão no concreto, $R_{\rm CC}$, pode ser vista como constituída de duas parcelas

$$R_{cc} = R_{ce}\chi + R_{ccs}, \qquad (2.34)$$

onde

 $R_{cc}\chi$ — parcela da resultante devida à curvatura χ ;

R_{ccs} - dependente de X e da retração ∈_{cs}.

Em ambas as parcelas ficam incluídos os efeitos da fluência do concreto, porém a retração só aparece em R_{CCS} . Analogamente, a posição da resultante é composta de duas parcelas distintas. No apêndice, estas expressões encontram-se deduzidas para seções retangulares.

Uma vez que as relações momento fletor — esforço normal — curvatura dependem da resultante de compressão no concreto e de sua posição, a fluência e a retração ficam, conseqüentemente, incluídas nessas relações. A ruína por ruptura, através dos domínios de dimensionamento modificados da figura 2.21, e a instabilidade estrutural, através do cálculo de deslocamentos baseados nas relações M—N—X, englobam finalmente os efeitos da fluência e retração do concreto.

2.4.3 - História de carga

Em uma estrutura de concreto armado, parte das cargas de serviço é de longa duração e parte de curta duração. A parcela de longa duração é constituída pela carga permanente e por parte da carga acidental, aquela parcela da carga acidental quase permanente. Uma história de carga simplificada pode ser admitida como na figura 2.22, onde t_0 é o instante correspondente ao início da utilização da estrutura e $t_{\rm II}$ é o instante correspondente ao final das deformações diferidas do concreto. As cargas de longa duração $P_{\rm g}$ atuam no pilar desde t_0 até $t_{\rm II}$ e, neste instante final, aplica-se um incremento de carga δP ao mesmo. O incremento δP é a parcela de curta duração do carregamento.

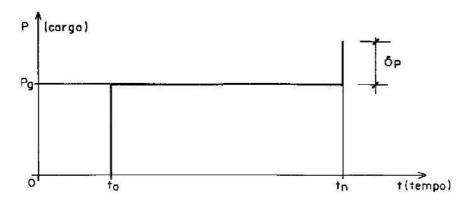


Figura 2.22 - História de carga simplificada

2.4.4. - Integração no tempo

Nos parágrafos anteriores, apresentou-se uma forma simples para se considerar a fluência e a retração do concreto nas relações M-N-X e no critério de ruptura. Para cada instante t especificado, obtém-se uma relação M-N-X diferente, uma vez que o diagrama tensão-deformação do concreto é variável com o tempo e a retração altera as deformações da seção de concreto armado. Na figura 2.23 apresenta-se um conjunto de relações M-N-X obtidas para cada instante t.

Observa-se, pela figura, uma diminuição da rigidez com o passar do tempo. Com isto, os deslocamentos serão incrementados, o que irá reduzir a capacidade de carga do pilar. Para se calcular os deslocamentos transversais do eixo do pilar e sua variação com o tempo, procede-se como se segue, baseando-se na história de carga da figura 2.22.

Inicialmente carrega-se o pilar com as cargas de longa duração $P_{\rm g}$, aplicadas no instante $t_{\rm O}$. Trabalha-se com uma relação M-N-X de curta duração para o cálculo dos deslocamentos. Esta relação é obtida com a resistência do concreto na idade $t_{\rm O}$, que pode ser avaliada a partir do conhecimento do valor da resistência em uma idade qualquer, através das correlações apresentadas no capítulo 1. Após a convergência dos deslocamentos, em uma seção genérica ao longo do eixo do pilar, o momento fletor é $M_{\rm O}$, o esforço normal $N_{\rm O}$, a curvatura $X_{\rm O}$ e o deslocamento $W_{\rm O}$.

Divide-se o intervalo $[t_0,t_1]$ em n subintervalos $[t_0,t_1]$, $[t_1,t_2]$, ..., $[t_{i_1-1},t_n]$. Uma subdivisão logarítmica pode ser usada para melhor acompanhar o desenvolvimento do coeficiente de fluência no tempo. Para o instante t_1 obtém-se uma relação M-N-X com o coeficiente de fluência e a deformação específica de retração correspondentes. Admite-se que, entre os instantes t_0 e t_1 , os esforços solicitantes e os deslocamentos não se alteram. Entretanto, no instante t_1 , a relação M-N-X é alterada devido à fluência e à retração que ocorrem no intervalo $[t_0,t_1]$. A estrutura fica menos rígida e não se encontra mais em equilibrio. Com os esforços solicitantes obtidos no final da análise iterativa realizada para o instante t_0 , repete-se o mesmo procedimento com a

relação M-N-X correspondente ao instante t_1 até a convergência dos deslocamentos. O momento fletor, o deslocamento e a curvatura, na seção em estudo, ficam ampliados para M_1 , W_1 e X_1 , respectivamente. Considera-se que o esforço normal não sofre alteração, permanecendo com o valor N_0 .

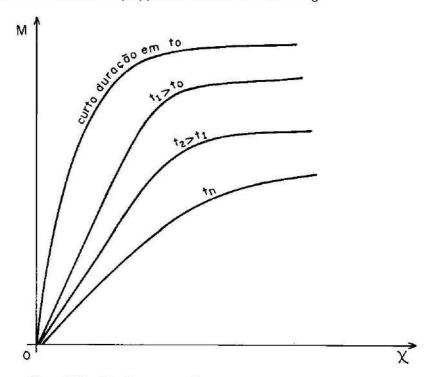


Figura 2.23 - Relações momento fletor - curvatura, para diversos instantes

Novamente admite-se que, entre os instantes t_1 e t_2 , os esforços solicitantes e deslocamentos permanecem inalterados, repetindo-se a análise com estes esforços e as relações M-N-X para o instante t_2 . Prossegue-se assim até o instante final t_{Π} . Na figura 2. 24 apresenta-se a variação do momento fletor em uma seção genérica, através das relações M-N-X para diversos instantes considerados. Na figura, M_a é o momento fletor de primeira ordem na seção em estudo.

Pela figura, observa-se que, se a análise fosse de primeira ordem, a convergência, na seção em estudo, corresponderia ao ponto A. A passagem do ponto A ao ponto B, com o crescimento do momento fletor de M_a para M_O , deve-se à não-linearidade geométrica. De t_O a t_1 admite-se que o momento fletor permanece constante, igual a M_O , porém ocorre um acréscimo de curvatura devido às deformações diferidas do concreto, com a passagem do ponto B à posição C. De C a D, o momento fletor fica aumentado pela não-linearidade geométrica, passando para M_1 , e a curvatura para χ_1 . Prosseguindo-se assim, as curvaturas na seção aumentam até a convergência final, no instante t_D , onde vale χ_D .

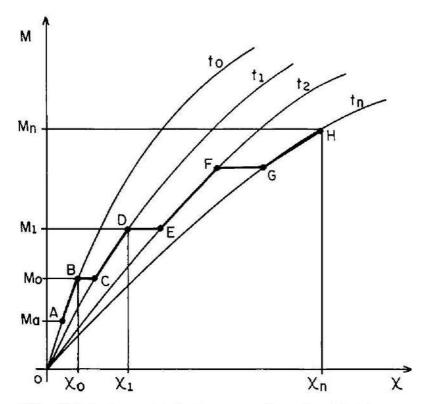


Figura 2.24 — Variação do momento fletor em uma seção genérica, devido às deformações diferidas

A curvatura diferida total, devido à fluência e à retração entre os instantes t_0 e t_n , é dada por

$$\chi_{\text{dif}} = \chi_{\text{n}} - \chi_{\text{o}}. \tag{2.35}$$

Esta curvatura, devido à fluência e à retração, deve ser calculada para todas as seções transversais do pilar. Ela é tomada como uma curvatura residual das seções.

Para o estágio final do carregamento de curta duração, o pilar será solicitado pela carga total. Trabalha-se agora com uma relação M-N-X sem incluir os efeitos da retração e da fluência, ou seja, com a mesma relação M-N-X adotada para cargas de curta duração. À curvatura obtida com essa relação M-N-X, para o carregamento total, deve-se adicionar a curvatura diferida, $X_{\rm dif}$, para o cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar.

Neste estágio final, pode-se ainda considerar o envelhecimento do concreto. A inclusão do envelhecimento pode ser feita tomando diretamente uma resistência majorada ou adotando um diagrama tensão-deformação modificado, como o da figura 2.20, com a adoção de um valor negativo para φ (ref. 17). O

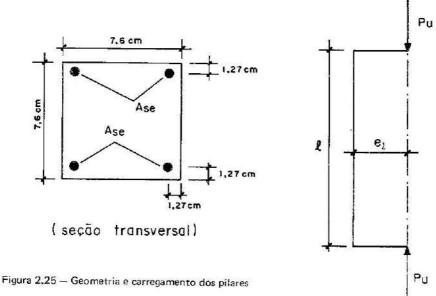
aumento da resistência do concreto com a idade pode ser obtido a partir das relações apresentadas no capítulo 1.

A possibilidade de ruptura de uma seção do pilar deve ser verificada durante o período de carga permanente, entre to e tn, e no estágio final do carregamento de curta duração. Na passagem de um instante ao seguinte, com a queda brusca de rigidez, também deve ser verificada a ruptura. A instabilidade, porém, só deve ser admitida durante o carregamento constante, ou no estágio final de curta duração. O acréscimo brusco dos deslocamentos que ocorre com a passagem de um instante ao outro não deve ser considerado como instabilidade estrutural, pois na realidade a variação no tempo é contínua e não discreta como se está considerando.

2.5 — Exemplos

Nesta seção apresentam-se dois exemplos, onde se comparam as respostas obtidas com o algoritmo de análise desenvolvido, com resultados experimentais encontrados por outros autores (ref. 17).

Na figura 2.25 indicam-se as características geométricas das seções transversais dos pilares, bem como o esquema de carga utilizado nos ensaios (ref. 17).



As características físicas dos materiais são:

- resistência à compressão do concreto: fc = 24MPa;
- tensão de escoamento do aço: f_y = 316MPa, apresentando um patamar de escoamento definido.

Resposta para carga de curta duração.

O pilar R (ref. 17) foi ensaiado aos 28 dias de idade, tendo sido alcançada a ruína em aproximadamente 45 minutos após o início do carregamento. Assim, na análise numérica admitiu-se um coeficiente redutor da resistência à compressão do concreto, devido ao Efeito Rüsch (ref. 26), igual a 0,92.

Na figura 2.26 apresenta-se a curva carga-deslocamento obtida experimentalmente, bem como a curva teórica.

Observa-se pela figura a boa concordância entre os resultados teóricos e experimentais, na previsão dos deslocamentos e da carga de ruína.

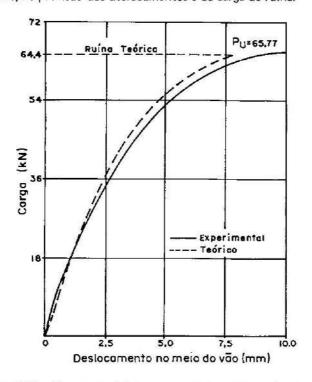


Figura 2.26 - Curva carga-deslocamento para carregamento de curta duração

Resposta para carga de longa duração

Um pilar com as mesma características do anterior foi ensaiado (ref. 17) para a determinação da curva carga-deslocamento sob carregamento de longa duração. A variação do coeficiente de fluência no tempo, obtida experimentalmente, é mostrada na figura 2.27.

A história de carga adotada no ensaio é a mesma da figura 2.22, com $P_g = 39,47 \, \text{kN}$ e $\delta P = 28,95 \, \text{kN}$. Além disso, a carga de longa duração foi aplicada aos 28 dias de idade e mantida constante por um período de 6 meses, após o que o pilar foi levado à ruína.

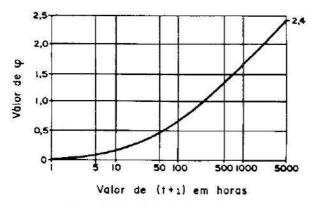


Figura 2,27 -- Variação de φ no tempo

Para o carregamento final de curta duração, na análise teórica, foi considerado o envelhecimento do concreto admitindo a deformação associada com uma tensão dada, igual a $(1+0.625\varphi)/(1+\varphi)$ vezes a correspondente deformação para a curva tensão-deformação no instante t=28 dias. A retração do concreto não foi incluída na análise. As respostas encontradas são mostradas na figura 2.28.

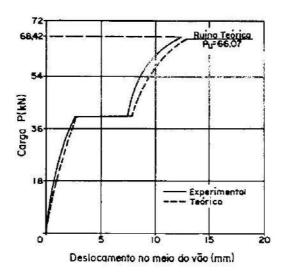


Figura 2.28 — Curva carga-deslocamento para carregamento de longa duração

Verifica-se mais uma vez a boa concordância dos resultados, o que confirma a eficiência do algoritmo para a análise de pilares esbeltos de concreto armado sob cargas de curta e de longa duração.

CAPÍTULO 3 DIMENSIONAMENTO DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO

3.1 - O problema do dimensionamento

O dimensionamento de uma seção de concreto armado submetida a uma solicitação de flexocompressão só pode ser realizado iterativamente, através de um processo de aproximações sucessivas, onde em cada iteração procura-se igualar os esforços solicitantes aos esforços resistentes (refs. 15, 20, 27, 28). O processo pode tornar-se trabalhoso e até mesmo inviável sem a utilização de um computador, dependendo da geometria da seção e da disposição das barras da armadura. Em geral, existe uma infinidade de soluções que satisfazem as condições de equilíbrio. Para tornar a solução única, há a necessidade de fixar de antemão a disposição e o proporcionamento da armadura. Assim é que, para o caso clássico de seções retangulares, submetidas a flexocompressão normal, com armaduras dispostas nos lados do retângulo perpendiculares ao plano de atuação do momento fletor, existem infinitas soluções com armaduras assimétricas, porém existe uma única solução com armadura simétrica.

O problema básico do dimensionamento, apesar das possíveis variantes de solução, é um só: deseja-se encontrar a quantidade de armadura com uma disposição predeterminada, a ser adicionada à seção de concreto, de forma que os esforços solicitantes igualem-se aos esforços resistentes no estado limite último. Resolve-se o problema a partir de algum critério de ruptura da seção de concreto armado. O critério de ruptura adotado pela norma NBR-6118 foi apresentado no capítulo 1, através dos domínios de dimensionamento. Dividindo-se o problema em dois, caso de grande excentricidade e caso de pequena excentricidade (ref. 15, 20), ou resolvendo-o através de zonas de dimensionamento (ref. 27, 28), pode-se hoje, com a utilização de um computador, dimensionar uma seção de concreto armado sob flexocompressão normal, no estado limite último.

A dificuldade do dimensionamento fica profundamente ampliada quando se estende tal problema a pilares. Em se tratando de pilares de concreto armado, surge, além da não-linearidade física do material, também existente no caso de dimensionamento de seção, a não-linearidade geométrica ocasionada pelos deslocamentos transversais do seu eixo. Os deslocamentos aumentam os momentos fletores solicitantes e, com isto, a armadura necessária para garantir o equilíbrio. Com o desconhecimento da armadura, pois esta é a incógnita, os deslocamentos não podem ser calculados, uma vez que a rigidez da estrutura depende também da mesma. Conseqüentemente, não se conhecem os momentos fietores solicitantes e o

problema fica aparentemente sem solução. Realmente, não se consegue dimensionar um pilar de concreto armado a não ser por tentativas.

Assim, surgiram processos simplificados, com maior ou menor grau de aproximação, que eliminam as tentativas. Estes processos tratam as duas não-linearidades de maneira independente, em geral, considerando inicialmente a não-linearidade geométrica e, em seguida, incluindo a física. A diferença básica entre eles consiste na forma de se incluir a não-linearidade geométrica no dimensionamento, como é mostrado a seguir.

a) Processo simplificado tipo 1

Neste processo, os efeitos não-lineares geométricos são incluídos, admitindo-se uma deformada para o eixo do pilar. Com isto, resulta uma excentricidade adicional que irá incrementar o momento fletor na seção crítica, a seção mais solicitada. Com o momento total, soma dos momentos de primeira e segunda ordens, e com o esforço normal, dimensiona-se a seção em flexocompressão. Esse é o processo simplificado permitido pela NBR-6118 e pelo CEB/FIP, como se apresenta na seção 3.4.

b) Processo simplificado tipo 2

Como alternativa ao processo anterior, pode-se admitir que o material é elástico linear e resolver a equação diferencial de equilíbrio para se encontrar o momento fletor máximo que atua nas seções ao longo do eixo do pilar. Esse momento máximo consiste de uma majoração do momento de primeira ordem na seção e, por isto, o processo é conhecido como Método do Momento Majorado. Com o momento majorado e o esforço normal, dimensiona-se a seção à flexocompressão. Essa é a solução proposta pelo American Concrete Institute, ACI (ref. 2).

A precisão dos dois processos fica restrita a condições particulares de carregamento e ao próprio valor do carregamento. Uma vez que a não-linearidade geométrica é incluída de forma aproximada, a imprecisão tende a aumentar com o aumento da esbeltez do pilar. Além disso, com a realização do dimensionamento à flexocompressão da seção crítica, impõe-se a condição de ruína por ruptura, o que pode não ser o caso. A comparação desses processos simplificados entre si e com um algoritmo de dimensionamento adequado, baseado na análise descrita anteriormente, será apresentada ao longo deste capítulo.

3.2 — Considerações para o dimensionamento

Quando se comparam soluções numéricas com resultados obtidos experimentalmente, em todas as fases da análise, trabalha-se com os valores médios da resistência à compressão do concreto, $f_{\rm C}$, e da tensão de escoamento do aço, $f_{\rm y}$, como apresentado no capítulo 2.

Entretanto, na situação de projeto, é necessário introduzir coeficientes de segurança para as cargas e as resistências dos materiais (ref. 6). Assim, para o cálculo dos deslocamentos transversais do eixo do pilar, a partir das curvaturas do mesmo,

trabalha-se com a resistência característica à compressão do concreto, f_{CK} , e com a tensão de escoamento característica do aço, f_{YK} . Isso se faz porque, como a força normal P_d que comprime o pilar é uma força majorada, ou seja, $P_d = \gamma_f \, P_K$, é necessário que os deslocamentos transversais sejam característicos, para que o coeficiente γ_f seja o mesmo para os momentos de primeira e segunda ordens. Para γ_f adota-se o valor 1,4, conforme exige a NBR-6118.

Já para a verificação da ruína por ruptura de uma seção do pilar, adota-se a resistência de cálculo do concreto, f_{cd} , e a tensão de escoamento de cálculo do aço, f_{yd} , sendo

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4}$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1.15},$$
(3.1)

também em conformidade com a NBR-6118.

3.3 — Sistematização computacional para o dimensionamento

3.3.1 — Relação carregamento de ruína-armadura

Na seção 3.4 serão apresentados alguns processos simplificados de dimensionamento de pilares propostos em normas. Esses processos não levam em consideração a análise global da estabilidade do pilar, através da inclusão simultânea das não-linearidades física e geométrica. As duas não-linearidades são incluídas de forma separada, e a solução encontrada pode dispersar muito da teoricamente exata, obtida através da análise descrita no capítulo 2.

Para se efetuar o dimensionamento de um pilar de concreto armado baseado nessa análise, é necessária a determinação da relação entre o carregamento de ruína do pilar e a quantidade de armadura do mesmo (ref. 3).

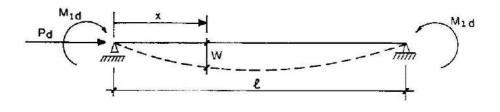


Figura 3.1 - Situação de cálculo para o pilar

Na figura 3.1 apresenta-se um pilar birrotulado com o carregamento de projeto, para o qual deseja-se proceder ao dimensionamento. Admite-se ainda que a seção transversai é constante ao longo do eixo do pilar, inclusive a armadura. A forma da seção transversai e a disposição da armadura são conhecidas "a priori". Pode-se então determinar a relação entre o carregamento de ruína e a armadura existente em uma seção transversal do pilar.

Inicialmente admite-se a seção sem armadura alguma, isto é, que o pilær seja de concreto simples. Escolhe-se um parâmetro inteiro m maior do que $1 \in d$ determina-se o perfil do carregamento, representado pelo momento fletor $m_1 \in d \in d$ pela força normal p_d , aplicados nos apoios, tais que

$$m_{1d} = \frac{M_{1d}}{m};$$

$$p_{d} = \frac{P_{d}}{m}.$$
(3.2)

Conhecido o perfil do carregamento, procede-se a uma análise incremental como a descrita no capítulo anterior, de forma que, numa etapa genérica de carga, j, o carregamento atuante no pilar consiste do momento M_{j} e da força normal P_{j} , aplicados nos apoios e dados por

$$M_{j} = j m_{i} d;$$
 (3.3)

$$P_i = j p \hat{c}$$
. (3.4)

Com o momento M_2 e a força normal P_1 , realiza-se a análise até a convergência dos deslocamentos, incrementa-se o carregamento e repete-se o processo até que em uma etapa de carga, k_0 , oporta a ruina de pilar, por ruptura ou por instabilidade, com o momento $M_{\rm KO}$ e a força norma. $P_{\rm KO}$, dados por

$$M_{ko} = k_0 m_1 d;$$
 (3.5)

$$P_{ko} = k_0 p_d. ag{3.6}$$

Determinou-se assim o carregamento de ruína, representado por M_{k0} e P_{k0} , para o pilar sem armadura e um primeiro ponto na curva da figura 3.2.

Para a determinação do próximo ponto da curva, arbitra-se um valor A_{51} para a quantidade de armadura nas seções transversais e repete-se o processo até a ocorrência da ruína na etapa de carga k_1 , com o momento M_{12} e a força normal P_{k1} . Novos pontos são encontrados, analogamente, para se obter a curva da figu a 3.2.

O mesmo procedimento pode ser adotado para um pliar submetido a um carregamento genérico, desde que seja mantido o perfil do carregamento de projeto.

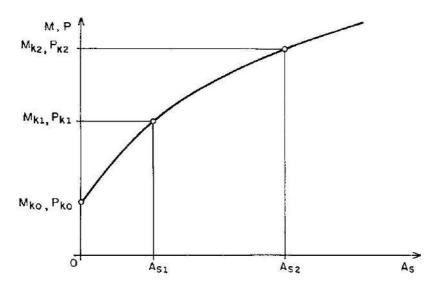


Figura 3.2 — Curva carregamento de ruína-armadura para o pilar

Na figura 3.3 apresentam-se algumas curvas obtidas para um pilar birrotulado com o carregamento da figura 3.1. A seção transversal é constante ao longo do eixo do pilar, inclusive a armadura, e tem a forma indicada na própria figura. Os parâmetros adimensionais empregados são definidos pelas expressões (3.7) a (3.11).

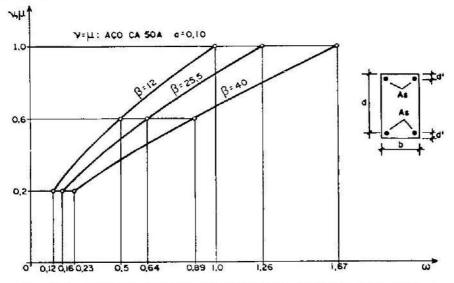


Figura 3.3 — Curvas carregamento de ruína-armadura para diferentes índices de esbeltez

$$v = \frac{P_{\rm d}}{0.85 \text{ b d f}_{\rm cd}} \tag{3.7}$$

$$\mu = \frac{M_1 d}{0.85 b d^2 f_{cd}}$$
 (3.8)

$$a = \frac{d'}{d} \tag{3.9}$$

$$\beta = \frac{\ell}{d} \tag{3.10}$$

$$\omega = \frac{As}{bd} \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$
 (3.11)

3.3.2 — Dimensionamento baseado no desequilíbrio

Conhecida a curva carregamento de ruína-armadura para o pilar, o seu dimensionamento é imediato. De fato, a solução para o problema do dimensionamento consiste em um ponto da curva, uma vez que o mesmo deve ser feito impondo a condição de ruína do pilar sob o carregamento de projeto. O carregamento de projeto é, portanto, um carregamento de ruína para o pilar. Para o pilar birrotulado da figura 3.1, a armadura procurada A_{\S} é a indicada na figura 3.4 e corresponde ao carregamento de ruína $M_1 d$ e P_d .

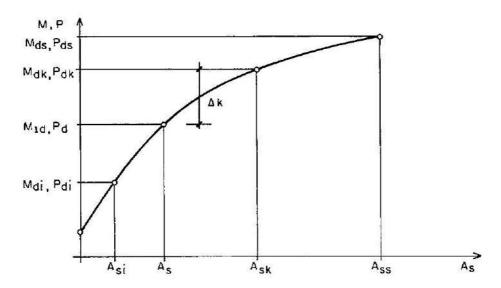


Figura 3.4 — Curva carregamento de ruína-armadura com desequilíbrio $\Delta_{f k}$ para a armadura ${f A}_{Sk}$

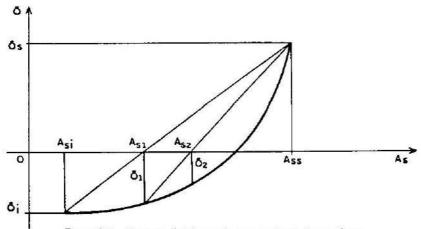
Para uma quantidade de armadura genérica A_{sk} , o carregamento de ruína é representado pelo momento M_{dk} e pela força normal P_{dk} . O desequilíbrio relativo δ_k , entre esse carregamento e o de projeto, é dado por (3.12) ou (3.13), uma vez que a curva foi obtida mantendo-se os incrementos de carga inalterados.

$$\delta k = \frac{M_{dk} - M_1 d}{M_1 d} \tag{3.12}$$

$$\delta k = \frac{P_{dk} - P_{d}}{P_{d}} \tag{3.13}$$

A solução procurada é aquela que torna nulo o desequilíbrio δ_k .

A fim de minimizar o número de pontos a serem determinados na curva e sistematizar a procura do ponto que constitui a solução, pode-se empregar o processo da bissecante. Para isso é necessário encontrar um intervalo [Asi, Ass] de tal forma que a solução A_{S} se encontre dentro do mesmo. Para o limite inferior $A_{\mathsf{S}i}$ do intervalo, pode-se adotar simplesmente Asi = 0. Também, para reduzir o número de iterações, pode-se realizar um dimensionamento à flexocompressão com o momento M₁ d e a força normal P_d, para encontrar A_{Si}. Em qualquer das duas alternativas, a solução A_{S} será maior, ou eventualmente igual a A_{Si} . Para A_{SS} , há a necessidade de se adotar um valor suficientemente grande, capaz de garantir que a solução As seja menor que o mesmo. Nos casos usuais de pilares de seção transversal constante, pode-se empregar um dos processos simplificados da seção 3,4 para a determinação de Ass. Entretanto, há a necessidade de se testar o sinal do desequilíbrio δ_S , uma vez que não se sabe, a princípio, se tais processos resultarão em uma solução a favor da segurança. Em caso contrário, ou seja, se o desequilíbrio δ_{S} for negativo, incrementa-se a armadura até que fique definido o limite superior A_{SS} . Calculam-se finalmente os desequilíbrios δi e δ_S por (3.14) e (3.15) e podem-se realizar as iterações do processo da bissecante, como na figura 3.5.



$$\delta i = \frac{M_{di} - M_1 d}{M_1 d} = \frac{P_{di} - P_{d}}{P_{d}}$$
 (3.14)

$$\delta s = \frac{M_{ds} - M_1 d}{M_1 d} = \frac{P_{ds} - P_d}{P_d}$$
 (3.15)

A convergência do processo será satisfeita quando, numa iteração genérica j, resultar lδjl ≤ tolerância preestabelecida.

A solução obtida por este procedimento é relativamente precisa, pois na convergência tem-se o carregamento de projeto tendendo para o carregamento de ruína do pilar, como é desejado. Entretanto, é uma solução extremamente trabalhosa do ponto de vista computacional, pois para cada aproximação da armadura deve-se determinar toda a resposta do pilar através do procedimento incremental, para se encontrar o carregamento de ruína. Por outro lado, o número de iterações necessárias para a convergência do processo da bissecante é dependente do tamanho do intervalo [$A_{\rm Si}$, $A_{\rm SS}$] que se escolhe. Quanto menor esse intervalo, mais rápida se dá a convergência. Para pilares de seção transversal constante, utilizando-se a determinação de $A_{\rm Si}$ e $A_{\rm SS}$ sugerida anteriormente, consegue-se a convergência com um número de iterações relativamente pequeno. Para pilares de seção retangular, como a da figura 3.3 e com o carregamento da figura 3.1, em geral a convergência se dá na primeira iteração ou no máximo na terceira, para uma precisão da ordem de 1%. Assim, necessita-se fazer apenas 3 análises para a determinação do desequilíbrio, ou no máximo 5.

Mesmo assim, o tempo de processamento computacional requerido é relativamente alto. A inclusão da fluência e da retração do concreto aumenta muito esse tempo e a tentativa de se confeccionar tabelas adequadas de dimensionamento se vê fracassada. Entretanto, é um processo rigoroso do ponto de vista conceitual e deve ser usado em casos especiais onde o risco de ruína do pilar seja alto. Também serve de base para a aferição dos processos simplificados propostos em normas e mesmo de outros que, apesar de baseados numa análise não-linear realística, são conceitualmente menos precisos. Este é o caso do processo alternativo apresentado a seguir.

3.3.3. - Processo alternativo de dimensionamento

Para evitar o inconveniente do processo anterior, apresenta-se uma solução alternativa que, apesar de conceitualmente menos exata, tem sua precisão constatada numericamente através de vários exemplos (ref. 3).

Nesse procedimento não se determina o valor correto do desequilíbrio para a realização do processo da bissecante e sim arbitra-se um valor para o mesmo. Com isso não há a necessidade de se determinar toda a resposta do pilar para encontrar o carregamento de ruína. Interessa aqui simplesmente saber se o pilar com uma dada armadura resiste ou não ao carregamento de projeto. Realiza-se então a análise do capítulo 2 com o carregamento total de projeto e não mais através do procedimento incremental. Se não ocorrer a ruína, ou seja, se o pilar com

uma dada armadura resistir ao carregamento de projeto, significa que o desequilíbrio é positivo e, em caso contrário, é negativo. Adota-se para o desequilíbrio um valor prefixado δ qualquer, que será positivo ou negativo, dependendo da situação. Assim, em cada iteração no processo da bissecante tem-se uma disposição para o desequilíbrio nos extremos do intervalo, conforme figura 3.6. Com isso, a aproximação da armadura para uma determinada iteração será o ponto médio do intervalo da iteração anterior.

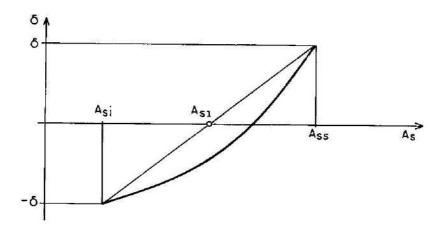


Figura 3.6 — Determinação da primeira aproximação da armadura $A_{\rm S1}$

De acordo com a figura 3.6, a primeira aproximação $A_{\rm S1}\,$ para a armadura é dada por

$$A_{S1} = \frac{A_{Si} + A_{SS}}{2} . ag{3.16}$$

Repete-se a análise com o carregamento total de projeto e com a armadura A_{S1} e adota-se o valor - δ ou + δ para o desequilíbrio correspondente, se a ruína ocorre ou não, respectivamente. Obtém-se uma seqüência de valores A_{S1} , A_{S2} , A_{S3} , . . . , A_{Sn} , que se aproximam cada vez mais da solução, uma vez que, em cada iteração, o tamanho do intervalo onde se encontra a raiz é reduzido. A convergência é admitida quando, em uma iteração genérica n, a desigualdade (3.17) for satisfeita.

$$\frac{|A_{sn} - A_{sn-1}|}{A_{sn-1}} < \text{tolerância} . \tag{3.17}$$

Na convergência não se conhece o valor real do desequilíbrio, porém garante-se que o erro cometido é pequeno. De fato, pela figura 3.7, se A_{SR-2} , A_{SR-1} , e A_{SR} são três valores sucessivos da seqüência obtida, a solução real necessariamente encontra-se no intervalo $[A_{SR-2},A_{SR-1}]$.

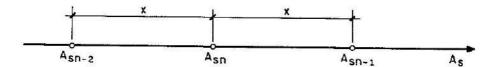


Figura 3.7 - Verificação da convergência do processo

Na convergência, se α é a tolerância estipulada, tem-se que

$$\frac{|A_{sn} - A_{sn-1}|}{A_{sn-1}} < \alpha , \qquad (3.18)$$

ou, pela figura 3.7,

$$\frac{x}{A_{\text{Sn}-1}} < \alpha . \tag{3.19}$$

Também pode-se ver que

$$\frac{|A_{Sn-1} - A_{Sn-2}|}{A_{Sn-2}} = \frac{2x}{A_{Sn-2}} < 2\alpha \quad \frac{A_{Sn-1}}{A_{Sn-2}} . \tag{3.20}$$

De (3.20) conclui-se que

$$\frac{|A_{\text{Sn}-1} - A_{\text{Sn}-2}|}{A_{\text{Sn}-1}} < 2\alpha . \tag{3.21}$$

De (3.21) verifica-se que, se α for um valor suficientemente pequeno, para qualquer valor de A_S dentro do intervalo $[A_{SR}$ _ 2, A_{SR} _ 1], o erro será também pequeno. Em particular, adota-se o valor de A_{SR} como solução do problema.

O tempo de processamento requerido para se encontrar a solução é sensivelmente menor que no processo anterior. Para pilares de seção retangular, como a da figura 3.3, e com o carregamento da figura 3.1, encontrou-se uma redução média do tempo de processamento da ordem de 15 vezes, deste processo para o anterior (ref. 3).

3.3.4 — Exemplos experimentais

3.3.4.1 — Pilares sob cargas de curta duração

Os exemplos apresentados nesta seção constituem uma série de 17 pilares que foram ensaiados até a ruína (ref. 17), com valores do índice de esbeltez λ de 83 e 125.

Os pilares têm seção transversal constante ao longo de todo o seu comprimento, inclusive a armadura (figura 3.8), e foram levados à ruína em aproximadamente 45 minutos após o início do ensaio, aos 28 dias de idade. Na

análise, admitiu-se um coeficiente redutor da resistência à compressão do concreto, devido ao Efeito Rüsch, igual a 0,92. Os ensaios foram realizados com velocidade de deformação controlada.

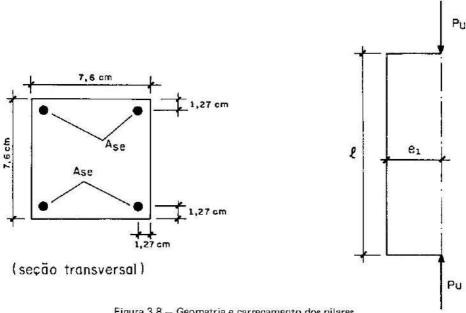


Figura 3.8 — Geometria e carregamento dos pilares

Para a determinação da resistência à compressão do concreto, foram ensaíados dois corpos de prova. Um primeiro corpo de prova é o cilíndro de 15cm de diâmetro e 30cm de altura, padrão da Associação Brasileira de Normas Técnicas, ABNT. A resistência obtida neste corpo de prova denomina-se f_c. Um segundo corpo de prova tem a mesma seção transversal dos pilares e altura igual a três vezes o lado da seção. A resistência obtida neste corpo de prova denomina-se $f_{
m pr}$. As resistências obtidas para os dois corpos de prova são diferentes, uma vez que a forma e dimensões dos mesmos diferem. Para a análise numérica adota-se a resistência obtida no corpo de prova prismático, pois o mesmo retrata melhor a realidade, já que tem a mesma forma e dimensões da seção transversal dos pilares. Uma vez que são comparados resultados teóricos com experimentais, a determinação da ruptura é feita com a própria resistência $f_{\mbox{\footnotesize pr}}$. O aço utilizado tem patamar de escoamento definido, aço classe A, e uma tensão de escoamento denominada fy. Para seu módulo de elasticidade adota-se o valor 210kN/mm², pela falta de determinação experimental. As cargas de ruína P_{H} obtidas nos ensaios são adotadas como cargas de projeto para os pilares, bem como as excentricidades iniciais e₁. Os valores obtidos para a armadura A_{SCAL}, calculada com o algoritmo da seção 3. 3, são comparados com a armadura existente nos pilares, Ase, e encontram-se na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Pilares sob carga de curta duração

	f_{c}	f_{pr}	Pu	e ₁	A _{scal}	$\frac{(A_{scal}-A_{se})}{A_{se}}$
PILAR	MPa	MPa	(kN)	(cm)	(cm ²)	7.
l = 18	2,9cm; fy	/ = 359MP	a; A _{se} = 0	,71cm ² ;)	∖ ≃ 83	
P ₁	27,5	20,0	33,79	3,81	0,71	0,0
P_2	27,5	20,0	34,02	3,81	0,72	1,4
P_3	30,0	24,0	45,36	2,54	0,66	- 7,0
P_4	30,0	24,0	47,71	2,54	0,72	1,4
P ₅	31,0	22,5	68,03	1,27	0,77	8,5
P ₆	31,0	22,5	66,67	1,27	0,74	4,2
P ₇	32,0	22,5	56,47	1,91	0,78	9,9
P_8	32,0	22,5	54,06	1,91	0,71	0,0
7.0					Company of the compan	
l = 18	2,9cm; f _y	_/ = 316MP	a; A _{se} = 0	,50cm ² ;	$\lambda \simeq 83$	
l = 18	2,9cm; f ₃	y = 316MP 23,0	a; $A_{se} = 0$,50cm ² ;	λ ≃ 83 0,60	20,0
P ₉			61,23			20,0 8,0
P ₉ P _{1 0} P _{1 1}	32,0	23,0 23,0 23,0	7	1,27	0,60 0,54	8,0
P ₉ P _{1 0} P _{1 1}	32,0 32,0	23,0 23,0 23,0	61,23 58,51 47,49	1,27 1,27 1,91	0,60	8,0 1 0, 0
P ₉ P ₁₀ P ₁₁ P ₁₂ P ₁₃	32,0 32,0 33,0	23,0 23,0	61,23 58,51	1,27 1,27	0,60 0,54 0,55	8,0
P ₉ P _{1 0} P _{1 1}	32,0 32,0 33,0 33,0	23,0 23,0 23,0 23,0 23,0	61,23 58,51 47,49 46,49	1,27 1,27 1,91 1,91	0,60 0,54 0,55 0,53	8,0 10,0 6,0
$\begin{array}{c} P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{array}$	32,0 32,0 33,0 33,0 33,0 33,0 33,0	23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0	61,23 58,51 47,49 46,49 37,87	1,27 1,27 1,91 1,91 2,54 2,54	0,60 0,54 0,55 0,53 0,51 0,50	8,0 10,0 6,0 2,0
$P_{9} \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14}$ $\ell = 27$	32,0 32,0 33,0 33,0 33,0 33,0 4,3cm; fy	23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 7 = 316MP	61,23 58,51 47,49 46,49 37,87 37,74 a; $A_{Se} = 0$	1,27 1,27 1,91 1,91 2,54 2,54	$0,60$ $0,54$ $0,55$ $0,53$ $0,51$ $0,50$ $\lambda \simeq 125$	8,0 10,0 6,0 2,0 0,0
$\begin{array}{c} P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{array}$	32,0 32,0 33,0 33,0 33,0 33,0 33,0	23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0	61,23 58,51 47,49 46,49 37,87 37,74	1,27 1,27 1,91 1,91 2,54 2,54 ,50cm ² ;	0,60 0,54 0,55 0,53 0,51 0,50	8,0 10,0 6,0 2,0

3.3.4.2 — Pilares sob cargas de longa duração

Dezessete pilares foram colocados em carga aos 28 dias de idade, e a carga foi mantida por 6 meses, após o que os pilares foram levados à ruína (ref. 17). A história de carga utilizada nos ensaios é mostrada na figura 3.9, onde Pg é a carga de longa duração e δP é o acréscimo dado ao carregamento para levar os pilares à ruína. O esquema de carga e a geometria dos pilares são os mesmos da figura 3.8.

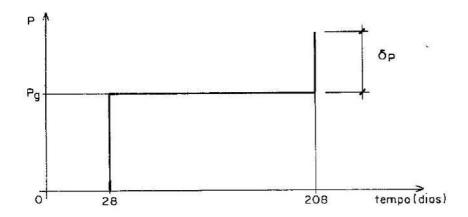


Figura 3.9 - História de carga nos ensaios

Para a determinação da resistência à compressão do concreto, foram utilizados os mesmos corpos de prova dos exemplos anteriores, obtendo-se a resistência cilíndrica f_C e a resistência prismática $f_{\rm pr}$ que foi utilizada na análise. Para a determinação da variação do coeficiente de fluência φ no tempo, carregaram-se corpos de prova prismáticos, com as mesmas dimensões dos utilizados para obter a resistência à compressão do concreto, com cargas correspondentes a 25%, 50% e 75% da resistência dos prismas correspondentes. A variação de φ com o tempo t é mostrada na figura 3.10.

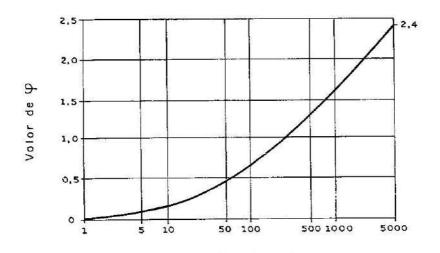


Figura 3.10 - Variação de ç no tempo

Valor de (t+1) em horas

As cargas de longa duração P_g e o acréscimo final δP utilizados nos ensaios são adotados como cargas de projeto. O aço é o mesmo dos exemplos anteriores.

Para o carregamento final de curta duração, foi considerado o envelhecimento do concreto tomando a deformação associada com uma tensão dada, igual a $(1+0,625\,\varphi)/(1+\varphi)$ vezes a correspondente deformação para a curva tensão-deformação no instante t = 28 dias (ref. 17). A retração do concreto não foi incluída na análise. Os valores obtidos para a armadura calculada, A_{Scal} , são comparados com a armadura existente nos pilares, A_{Se} , como é mostrado na tabela 3.2.

Tabela 3.2 — Pilares sob carga de longa duração

	fc	fpr	Pg	δP	e ₁	A _{scal}	$\frac{(A_{\text{scal}} \cdot A_{\text{se}})}{A_{\text{se}}}$
PILAR	MPa	MPa	(kN)	(kN)	(cm)	(cm²)	/·
£ = 1	82,9cm;	fy = 35	9MPa; A	x _{se} = 0,71	cm²;λ	≈ 83	
P_1	27,5	20,0	20,28	12,34	3,81	0,71	0,0
P ₂	27.5	20,0	13,52	19,41	3,81	0,70	- 1,4
P_3	30,0	24,0	27,21	16,56	2,54	0,68	- 4,2
P_4	30,0	24,0	18,14	23,04	2,54	0,60	- 15,5
P ₅	31,0	22,5	40,82	19,73	1,27	0,74	4,2
P ₆	31,0	22,5	27,22	33,25	1,27	0,67	- 5,6
P,	32,0	22,5	34,03	17,06	1,91	0,73	2,8
P ₈	32,0	22,5	22,68	28,13	1,91	0,68	- 4,2
- 0	22,0	22,0		20,10	-20-	-,	127.
			6MPa; A	21 21	1		
				use = 0,50	1		6,0
	82,9cm;	f _y = 31	6MPa; A	21 21	cm²; λ	~ 83	
Q = 1 P ₉ P ₁₀	82,9cm; 32,0	$f_y = 31$ 23,0	6MPa; A	a _{se} = 0,50	lem²; λ	≃ 83 0,53	6,0
$Q = 1$ P_{9} P_{10} P_{11} P_{12}	82,9cm; 32,0 32,0 33,0 33,0	fy = 31 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0	6MPa; A 36,74 24,49	8,39 34,83	cm ² ; λ 1,27 1,27 1,91 1,91	≃ 83 0,53 0,61	6,0 22,0
$R = 1$ P_{9} P_{10} P_{11} P_{12}	82,9cm; 32,0 32,0 33,0	fy = 31 23,0 23,0 23,0	6MPa; A 36,74 24,49 28,49	8,39 34,83 13,20	lcm ² ; λ 1,27 1,27 1,91	≃ 83 0,53 0,61 0,51	6,0 22,0 2,0
Q = 1 P ₉ P ₁₀ P ₁₁	82,9cm; 32,0 32,0 33,0 33,0	fy = 31 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0	6MPa; A 36,74 24,49 28,49 19,00	8,39 34,83 13,20 25,67	cm ² ; λ 1,27 1,27 1,91 1,91	≃ 83 0,53 0,61 0,51 0,53	6,0 22,0 2,0 6,0
P ₉ P ₁₀ P ₁₁ P ₁₂ P ₁₃ P ₁₄	82,9cm; 32,0 32,0 33,0 33,0 33,0 33,0	fy = 31 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0	36,74 24,49 28,49 19,00 22,68	8,39 34,83 13,20 25,67 14,42 21,59	cm ² ; λ 1,27 1,27 1,91 1,91 2,54 2,54	~ 83 0,53 0,61 0,51 0,53 0,54 0,51	6,0 22,0 2,0 6,0 8,0
$ \begin{array}{c} \mathbb{Q} = 1 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \end{array} $	82,9cm; 32,0 32,0 33,0 33,0 33,0 33,0	fy = 31 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0	36,74 24,49 28,49 19,00 22,68 15,10	8,39 34,83 13,20 25,67 14,42 21,59	cm ² ; λ 1,27 1,27 1,91 1,91 2,54 2,54	~ 83 0,53 0,61 0,51 0,53 0,54 0,51	6,0 22,0 2,0 6,0 8,0
Q = 1 P ₉ P ₁₀ P ₁₁ P ₁₂ P ₁₃ P ₁₄	82,9cm; 32,0 32,0 33,0 33,0 33,0 33,0 74,3cm;	fy = 31 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0 23,0	6MPa; A 36,74 24,49 28,49 19,00 22,68 15,10 6MPa; A	Ase = 0,50 8,39 34,83 13,20 25,67 14,42 21,59 Ase = 0,50	1,27 1,27 1,91 1,91 2,54 2,54 cm²; λ	≈ 83 0,53 0,61 0,51 0,53 0,54 0,51 ≈ 125	6,0 22,0 2,0 6,0 8,0 2,0

3.3.5 - Coeficiente de segurança

O coeficiente global de segurança, s, é definido como sendo a razão entre o carregamento de ruína e o carregamento de serviço do pilar. O carregamento de ruína, neste caso, é obtido com as resistências características dos materiais, ou seja, a ruptura é verificada sem reduzir as resistências.

De um modo geral, este coeficiente é composto de três parcelas, uma devida à majoração das cargas de serviço e as outras duas devidas à minoração das resistências dos materiais, que são as condições de segurança impostas no dimensionamento. Nestas condições, o coeficiente de segurança fica dependente do grau de solicitação do pilar. Assim é que ele diminui com a esbeltez, pois, quanto maior a esbeltez do pilar, maiores serão os momentos de segunda ordem e, conseqüentemente, maior o grau de fissuração da peça, reduzindo com isso a parcela de contribuição do fator minorador da resistência do concreto.

Na figura 3.11, apresenta-se a variação do coeficiente global de segurança para valores do parâmetro de esbeltez ℓ/d entre 12,7 e 40, o que corresponde a índices de esbeltez λ de 40 e 125, respectivamente. O aço utilizado é o CA 50A (ref. 6) e o parâmetro d'/d é igual a 0,10. A situação de projeto é a mesma da figura 3.1. As definições do esforço normal reduzido ν e do momento fletor reduzido, μ , são dadas pelas expressões (3.7) e (3.8). O carregamento é de curta duração. O coeficiente de segurança indicado na figura é obtido através do dimensionamento pelo processo alternativo apresentado na seção 3.3.3.

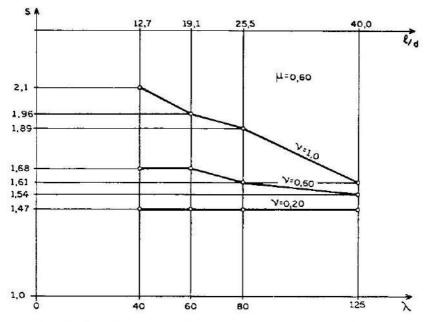


Figura 3.11 — Variação do coeficiente global de segurança s, com a esbeltez e com a força normal

3.4 - Processos simplificados de dimensionamento de pilares

3.4.1 - Processo da NBR-6118

A NBR-6118 apresenta um processo simplificado para incluir a não-linearidade geométrica no dimensionamento de pilares de concreto armado, quando o índice de esbeltez λ é maior do que 40 e menor ou igual a 80. Para índices de esbeltez não superiores a 40, os efeitos de segunda ordem são desprezados e os pilares são dimensionados como pilares curtos.

O processo restringe-se a barras retas com seção transversal simétrica constante, inclusive a armadura, e força normal também constante ao longo do seu comprimento.

Admite-se uma configuração deformada para o pilar e arbitra-se a curvatura última da seção mais solicitada. Na figura 3. 1 apresenta-se o pilar na situação de cálculo, onde M_1d é o momento de primeira ordem e P_d é a força normal de cálculo.

Admite-se para a deformada W do eixo do pilar uma função contínua que cumpre as condições geométricas de contorno, W(0) = 0 e $W(\ell) = 0$, na forma

$$W(x) = W_{\text{máx}} \text{ sen } \frac{\pi x}{\hat{v}} . \tag{3.22}$$

Com a hipótese de pequenos destocamentos e utilizando-se a expressão aproximada para a curvatura, resulta para as mesmas a expressão

$$\chi_{\pm} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \quad W_{\text{máx}} \text{ sen } \frac{\pi_{\text{X}}}{\ell}$$
 (3.23)

Cabe aqui salientar que a função adotada para os deslocamentos em (3.22) não cumpre as condições mecânicas de contorno. De fato, por (3.23) verifica-se serem nulas as curvaturas nos apoios, o que só seria real se os momentos aí também fossem nulos.

De acordo com (3.23), observa-se que a curvatura $X_{\rm u}$ na seção do meio do pilar é proporcional ao deslocamento transversal máximo $W_{\rm máx}$, que também ocorre nessa seção, isto é,

$$\chi_{\rm u} = -\frac{\pi^2}{g^2} W_{\rm máx}$$
 (3.24)

Assim, o deslocamento máximo $W_{m\acute{a}x}$ pode ser calculado em função da curvatura X_U da seção mais solicitada, por

$$W_{\text{máx}} = \frac{\ell^2}{\pi^2} \mid \chi_{\mathbf{u}} \mid . \tag{3.25}$$

Para $X_{\mathbf{u}}$, a NBR-6118 adota a expressão

$$|X_{\rm u}| \simeq \frac{0.0035 + f_{\rm yd}/E_{\rm S}}{(\nu + 0.5) \, \rm h}$$
 (3.26)

com

$$v + 0.5 \ge 1.0$$
, (3.27)

onde

$$\nu = \frac{P_{\rm d}}{A_{\rm c} f_{\rm cd}} , \qquad (3.28)$$

sendo

 h = lado, paralelo à excentricidade inicial considerada, do retângulo circunscrito à seção.

A_C = área da seção geométrica da peça.

Na realidade a NBR-6118 adota uma expressão um pouco diferente de (3.25), apenas substituindo o denominador π^2 por 10.

O deslocamento transversal $W_{m\acute{a}x}$ será tomado como uma excentricidade de segunda ordem, gerando um momento de segunda ordem M_2 d, dado por

$$M_{2d} = P_{d} W_{máx}$$
 (3.29)

O dimensionamento do pilar recai no dimensionamento à flexocompressão da seção mais solicitada, com a força normal P_d e com o momento fletor total $M_d,$ dado por

$$Md = M_1 d + M_2 d$$
. (3.30)

O processo proposto é de aplicação fácil e imediata, uma vez que, conhecido o momento fletor total de cálculo $M_{\rm d}$, o dimensionamento recai no caso de pilares curtos, com índice de esbeltez λ até 40. O coeficiente v na expressão (3. 26) tem por objetivo levar em conta o decréscimo da curvatura última de uma seção de concreto armado com o incremento do esforço normal. Entretanto, tal redução não é suficiente, e no caso de grandes valores da força normal $P_{\rm d}$, a curvatura convencional adotada em (3.26) será maior que a curvatura real, ocasionando uma solução a favor da segurança, como mostrado nas seções seguintes.

3.4.2 - Processo do CEB

O processo simplificado apresentado no Manual de Flambagem do CEB/FIP (ref. 11) difere do processo da NBR-6118 apenas quanto ao valor adotado para a curvatura $X_{\rm u}$. Segundo o CEB, a curvatura $X_{\rm u}$ para a utilização na equação (3.25) é dada por

$$|X_{\rm u}| = \frac{0.0035 + f_{\rm yd}/E_{\rm S}}{h}$$
 , se $\nu_{\rm O} \le 0.5$; (3.31)

$$|X_{\rm u}| = \frac{0,0035 + f_{\rm yd}/E_{\rm s}}{2 \nu_{\rm o} / h}$$
 , se $\nu_{\rm o} > 0.5$;

onde

$$v_0 = \frac{P_d}{0.85 \text{ A}_c f_{cd}}$$
 (3.32)

Entretanto, para o cálculo das resistências de projeto dos materiais deve-se aplicar um fator de comportamento $\gamma_{\rm n}$ = 1,2. Assim, as resistências de cálculo serão

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_n \gamma_c}$$
 , (3.33)

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_n \gamma_s}$$
,

onde $\gamma_{\rm C}$ e $\gamma_{\rm S}$, de acordo com o CEB, são iguais a 1,5 e 1,15, respectivamente.

3.4.3 — Processo do ACI

O processo simplificado proposto pelo ACI (ref. 2), usualmente denominado método do momento majorado, é permitido para pilares com índices de esbeltez λ entre 22 e 100. Para pilares com índices de esbeltez inferiores a 22, desprezam-se os efeitos não-lineares geométricos e o dimensionamento enquadra-se no caso de pilares curtos.

O processo é baseado na análise elástica linear do pilar da figura 3.1. Admitindo-se que o material seja elástico linear, o deslocamento transversal máximo, $W_{m\acute{a}x_{s}}$ que ocorre na seção central do pilar (ref. 10), é dado por

$$W_{\text{máx}} = \frac{M_{1 \text{ d}} \ell^{2}}{8 \text{ E I}} \left[\frac{2(1 - \cos \psi)}{\psi^{2} \cos \psi} \right], \tag{3.34}$$

onde

$$\psi = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P_d}{P_e}} \tag{3.35}$$

e Pe é a carga de flambagem de Euler dada por

$$P_{e} = \frac{\pi^2 EI}{\varrho^2} \qquad (3.36)$$

O momento total Md na seção crítica é

$$M_d = M_{1d} + P_d W_{máx}$$
 (3.37)

Substituindo (3.34), (3.35) e (3.36) em (3.37), resulta

$$M_d = \beta M_1 d, \qquad (3.38)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{\cos \psi} \quad . \tag{3.39}$$

O fator β é denominado fator de amplificação e pode ser colocado simplificadamente na forma

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{P_d}{P_e}} \tag{3.40}$$

O fator de amplificação adotado pelo ACI é dado por (3.41), onde $\phi=0.70$ é um fator de redução de capacidade.

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{P_d}{\phi P_e}} \tag{3.41}$$

Para o cálculo da rigidez EI pode-se adotar a expressão

$$EI = \frac{E_c I_c/2.5}{1 + \beta_d} , \qquad (3.42)$$

onde $I_{\rm C}$ é o momento de inércia centroidal da seção de concreto, sem inclusão da armadura.

O parâmetro βd em (3.42) é a razão entre o momento devido às cargas de longa duração e o momento de projeto total.

Com o momento total M_d e a força normal P_d , dimensiona-se a seção à flexocompressão, como no caso de pilares curtos.

O processo, em geral, tende a superestimar a armadura para valores da força normal significativos em relação à carga de flambagem de Euler. Para pequenos valores da força normal, os resultados são razoáveis, como será mostrado adiante.

3.4.4 — Processo da DIN

Segundo a DIN 1045 (ref. 20), os efeitos não-lineares geométricos podem ser desprezados em qualquer dos seguintes casos:

- a) $\lambda \leq 20$
- b) $e_1/h \ge 3.5$ se $\lambda \le 70$, e $e_1/h \ge 3.5$ $\frac{\lambda}{70}$ se $\lambda > 70$,

onde e_1 e h são a excentricidade de primeira ordem e a dimensão da seção transversal na direção em consideração.

- λ ≤ 45, para pilares internos de pórticos indeslocáveis regulares, quando o comprimento de flambagem for tomado igual à altura do andar.
- d) $\lambda \leqslant 45-25~M_1/M_2$, onde M_1 e M_2 são os momentos de primeira ordem nos apoios e $+M_2+ \geqslant +M_1+ = 1$, no caso de peças comprimidas indeslocáveis, engastadas elasticamente em ambas as extremidades e sem cargas transversais.

Quando a situação de cálculo não se enquadrar em um dos casos anteriores, os efeitos não-lineares geométricos devem ser incluídos. A norma apresenta um processo, para $20 < \lambda \le 70$, que consiste na adoção de uma excentricidade adicional de segunda ordem, análogo aos processos da NBR-6118 e do CEB. A excentricidade de segunda ordem, e_2 , é dada por uma das expressões (3.43) a (3.45), em função da excentricidade inicial relativa e_1 h e do índice de esbeltez λ .

$$e_2 = h \frac{\lambda - 20}{100} \sqrt{0,10 + \frac{e_1}{h}}, \text{ se } 0 \le \frac{e_1}{h} < 0,30;$$
 (3.43)

$$e_2 = h \frac{\lambda - 20}{160}$$
, se $0.30 \le \frac{e_1}{h} < 2.50$; (3.44)

$$e_2 = h \frac{\lambda - 20}{160} \left(3,50 - \frac{e_1}{h} \right)$$
, se $2,50 \le \frac{e_1}{h} < 3,50$ (3.45)

3.4.5 — Exemplos

Nas tabelas 3.3, 3.4 e 3.5 apresentam-se alguns resultados obtidos com os processos simplificados descritos anteriormente e com o algoritmo alternativo de dimensionamento da seção 3.3.3.

Encontram-se tabeladas as taxas mecânicas de armadura ω , como definido em (3.11), para esforço normal reduzido ν e momento fletor reduzido μ , definidos em (3.7) e (3.8), respectivamente. O parâmetro d'/d é igual a 0,10 e o aço é o CA 50A. O carregamento é de curta duração.

Tabela 3.3 – Valores de $\omega - \ell/d = 12,7 (\lambda = 40)$

μ	MÉTODO	ν			
m	, will topo	0,20	0,60	1,00	
888	ALGORITMO	0,12	0,09	0,20	
	NBR	0,12	0,11	0,23	
0,20	CEB	0,15	0,16	0,32	
	DIN	0,13	0,14	0,28	
	ACI	0,11	0,08	0,20	
	ALGORITMO	0,50	0,50	0,65	
	NBR	0,50	0,50	0,65	
0,60	CEB	0,59	0,69	0,90	
	DIN	0,50	0,53	0,72	
	ACI	0,50	0,52	0,71	
	ALGORITMO	0,88	0,89	1,05	
	NBR	0,88	0,88	1,04	
1,00	CEB	1,03	1,22	1,49	
	DIN	0,86	0,91	1,11	
	ACI	0,89	0,94	1,18	

Observa-se pelos resultados que o processo da NBR-6118 é o que melhor se apresenta em relação ao algoritmo. O erro máximo detectado é da ordem de 25% a favor da segurança. Observa-se também que, para valores de μ/ν não menores que 1, ocorre praticamente a coincidência do processo simplificado com o algoritmo. Para valores de μ/ν inferiores a 1, o processo fica sensivelmente a favor da segurança, devido à superestimação da curvatura última da seção.

Tabela 3.4 - Valores de ω - ℓ/d = 19,1 (λ = 60)

		υ			
μ	MÉTODO	0,20	0,60	1,00	
0,20	ALGORITMO	0,13	0,14	0,26	
	NBR	0,14	0,17	0,32	
	CEB	0,17	0,21	0,37	
	DIN	0,16	0,23	0,41	
	ACI	0,12	0,12	0,29	
0,60	ALGORITMO	0,51	0,56	0,73	
	NBR	0,52	0,56	0,73	
	CEB	0,61	0,73	0,95	
	DIN	0,52	0,61	0,86	
	ACI	0,53	0,62	0,95	
1,00	ALGORITMO	0,90	0,95	1,15	
	NBR	0,89	0,94	1,12	
	CEB	1,05	1,26	1,53	
	DIN	0,86	0,99	1,25	
	ACI	0,94	1,12	1,57	

Tabela 3.5 - Valores de ω - ℓ/d = 25,5 (λ = 80)

	1.4-0-0	71				
μ	MÉTODO	0,20	0,60	1.00		
0,20	ALGORITMO	0,16	0,21	0,35		
	NBR	0,17	0,26	0,44		
	CEB	0,19	0,27	0,44		
	DIN	0,18**	0,31*	0,53*		
	ACI	0,13	0,20	0,60		
0,60	ALGORITMO	0,54	0,64	0,85		
	NBR	0,54	0,64	0,84		
	CEB	0,63	0,78	1,00		
	DIN	0,54*	0,69*	0,99*		
	ACI	0,57	0,85	1,80		
1,00	ALGORITMO	0,92	1,03	1,26		
	NBR	0,92	1,02	1,23		
	CEB	1,07	1,31	1,58		
	DIN	0,86	1,07*	1,38*		
	ACI	1,01	1,48	2,98		

^{*} Situação fora dos limítes de aplicação do método

Dos quatro processos testados, o que fornece piores resultados é o do ACI, principalmente para grandes valores do esforço normal. Isto se dá porque, quando o esforço normal torna-se significativo frente à carga de Euler, o fator de amplificação de momentos fica muito grande e irreal. Para melhorar os resultados, deve-se considerar as armaduras na avaliação da carga de Euler. O ACI fornece uma expressão para o cálculo da rigidez à flexão incluindo as armaduras. Assim, a rigidez dada pela equação (3. 42) deve ser usada como pré-dimensionamento, e, a partir da armadura obtida, procede-se a novos dimensionamentos incluindo as armaduras no cálculo da rigidez.

3.5 - Dimensionamento para cargas de longa duração

3.5.1 — Coeficiente de fluência do concreto

A fim de utilizar o coeficiente de fluência proposto pelo CEB no dimensionamento, torna-se necessária a fixação de certos parâmetros relativos às condições de carga e utilização do pilar.

Assim, pode-se admitir que o pilar entra em carga aos 28 dias de idade, ou seja, adota-se t_0 = 28 dias, sem a correção da idade apresentada no capítulo 1.

Substituindo-se t_0 = 28 em (1,35), conclui-se que a deformação de fluência $\in_{CC} (t,t_0)$ é diretamente proporcional à deformação mecânica imediata \in_{CI} , e o coeficiente de fluência $\varphi(t,t_0)$ fica definido por

$$\varphi(t,t_0) = \frac{\in_{CC}(t,t_0)}{\in_{Ci}} . \tag{3.46}$$

Nessas condições, a deformação total no instante t é dada por

$$\leq t_0 \mathfrak{t}(t, t_0) = \leq_{ci} [1 + \varphi(t, t_0)].$$
(3.47)

O coeficiente de plasticidade diferida φ_f depende do meio ambiente e da espessura fictícia h_O . Para evitar a fixação da umidade relativa do ar, pode-se adotar o procedimento seguinte. Segundo a NBR-6118, a deformação total no concreto deve ser tomada igual a 3 vezes a deformação mecânica inicial, quando a estrutura entrar em carga logo após o término da construção, o que é equivalente a tomar um valor final para o coeficiente de fluência igual a 2. Assim, tem-se

$$\varphi(t_{\infty},t_0)=2. \tag{3.48}$$

Substituindo t por t∞ em (1.41), resulta

$$\varphi(t_{\infty},t_{0}) = \beta_{a}(t_{0}) + \varphi_{d}\beta_{d}(t_{\infty}-t_{0}) + \varphi_{f}[\beta_{f}(t_{\infty}) - \beta_{f}(t_{0})]. \tag{3.49}$$

De (1.46) conclui-se que

$$\frac{f_{\rm c}(t_0)}{f_{\rm c\infty}} = 0,67878\,,\tag{3.50}$$

valor obtido simplesmente substituindo $t_0 = 28$ em (1.46). Levando (3.50) em (1.42), obtém-se

$$\beta_a(t_0) = 0.256976$$
. (3.51)

Aplicando o limite quando t tende a infinito na equação (1.48), chega-se a

$$\beta_{\rm d} (t_{\infty} - t_0) = 1$$
. (3.52)

Analogamente, aplicando o limite quando t tende a infinito em (1.49), resulta

$$\beta_{f}(t_{\infty}) = 1. \tag{3.53}$$

Substituindo (3.51), (3.52) e (3.53) em (3.49), e lembrando que $\varphi_{\rm d}$ = 0,4, tem-se

$$\varphi(t_{\infty}, t_0) = 0.656976 + \varphi_f[1 - \beta_f(t_0)]. \tag{3.54}$$

Igualando φ (t ∞ ,t $_0$) a 2, chega-se à expressão para φ_{f_*}

$$\varphi_{\rm f} = \frac{1,343024}{1 - \beta_{\rm f}(t_0)} \tag{3.55}$$

Assim, para a análise numérica efetuada a seguir, evitou-se ter que arbitrar a umidade relativa do ar, necessária para a determinação de φ_{f_i} e o coeficiente de fluência toma a forma

$$\varphi(t,t_0) = 0,256976 + 0,4\beta_{\rm d}(t-t_0) + \frac{1,343024}{1-\beta_{\rm f}(t_0)} \left[\beta_{\rm f}(t) - \beta_{\rm f}(t_0) \right]. \quad (3.56)$$

Evidentemente, a expressão (3.56) ainda depende da espessura fictícia h_O. Entretanto, testes preliminares efetuados com o coeficiente de fluência dado por (3.56) mostram que a solução do problema, a armadura necessária ao pilar, pouco ou quase nada é influenciada pelo valor de h_O adotado.

3.5.2 - Retração do concreto

Para efeito de dimensionamento, pode-se admitir que a cura do concreto se processa eficazmente até o sétimo dia após a concretagem. Assim, o tempo t_0 é igual a 7, uma vez que, tanto para a retração quanto para a fluência, supõe-se

simplesmente que a temperatura ambiente é da ordem de 20° C, não sendo necessária a correção da idade apresentada no capítulo 1.

O coeficiente básico de retração, \in_{SO} , depende do meio ambiente e da espessura fictícia da peça. Para evitar a fixação da umidade relativa do ar, adota-se um procedimento análogo ao da fluência. Segundo a NBR-6118, a deformação relativa de retração pode ser tomada, nos casos que classifica como correntes, igual a 15×10^{-5} . Assim, adota-se

$$\in_{CS} (t_{\infty}, t_0) = 15 \times 10^{-5}$$
 (3.57)

Aplicando o limite à equação (1.51), para t tendendo a infinito, resulta

$$\beta_{\rm S}(t_{\infty}) = 1. \tag{3.58}$$

Fazendo t tender a infinito em (1.45) e substituindo (3.57) e (3.58), resulta

$$\epsilon_{SO} = \frac{15 \times 10^{-5}}{1 - \beta_S(t_O)}$$
(3.59)

Dessa forma, a deformação específica de retração será tomada como

$$\in_{CS}(t, t_0) = \frac{15 \times 10^{-5}}{1 - \beta_S(t_0)} \left[\beta_S(t) - \beta_S(t_0) \right],$$
(3.60)

com $t_0 = 7$.

A expressão (3.60) ainda é dependente da espessura fictícia h_0 ; porém, como constatado para a fluência, este valor altera muito pouco a armadura. Nos exemplos apresentados a seguir, adota-se $h_0=0.20$ m.

3.5.3 — História de carga

Face à dificuldade de determinação da parcela do carregamento que é de longa duração, e levando-se em conta que, em pilares de edificios de concreto armado, a carga acidental é pequena em relação à carga permanente, pode-se admitir que toda a carga de serviço é de longa duração. A história de carga assim definida é a apresentada na figura 3.12.

Considera-se que, aos 28 dias de idade, o pilar fica submetido a todo o carregamento de serviço, P_{K} , igual ao carregamento de projeto dividido pelo coeficiente 1,4. Esse carregamento é mantido até o final das deformações diferidas do concreto. Nesse instante, aplica-se ao pilar o acréscimo de carga δP igual à diferença entre o carregamento de projeto e o de serviço. Para este estágio, não se considera o aumento da resistência do concreto, e trabalha-se com o diagrama tensão-deformação para carga de curta duração.

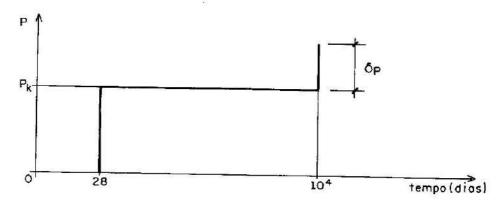


Figura 3.12 — Historia de carga adotada no dimensionamento

3.5.4 - Inclusão simplificada da fluência do concreto

O processo simplificado para se considerar a fluência do concreto, proposto no Manual de Flambagem do CEB/FIP (ref. 11), consiste em se considerar todo o carregamento de projeto como sendo de curta duração, introduzindo-se uma excentricidade adicional ec de primeira ordem, dada por

$$e_{c} = e_{1g} \left[e^{\left(\frac{\varphi(t_{\infty}, t_{0}) P_{g}}{P_{e} - P_{g}}\right)} - 1 \right], \tag{3.61}$$

onde

Pg = força normal de longa duração;

e₁g = excentricidade de primeira ordem da força Pg;

 $\varphi(t_{\infty},t_{0}) = \text{coeficiente final de fluência;}$

Pe = carga de flambagem de Euler, sendo

$$P_{e} = \frac{\pi^{2} E_{c} I_{c}}{\varrho^{2}}$$
 (3.62)

e I_{C} , o momento de inércia centroidal da seção de concreto, sem incluir a armadura.

Com a excentricidade adicional e_C resolve-se o problema como se todo o carregamento fosse de curta duração.

Para levar em conta a incerteza na avaliação de e_C, é conveniente majorar a força normal de longa duração por um fator especial de segurança da ordem de 1,2 (ref. 11). Segundo o CEB, esse procedimento é particularmente indicado quando as cargas de longa duração representam uma porção significativa da carga total de projeto. A precisão do processo é verificada na seção seguinte.

3.5.5 - Exemplos

Para testar a precisão da expressão (3. 61), preparou-se a tabela 3. 6 para coeficiente final de fluência, $\varphi(t_{\infty},t_0)$, igual a 2. Para o algoritmo a história de carga é a mostrada na figura 3.12.

A tabela foi preparada para pilares curtos e esbeltos, com relação ℓ/d igual a 12 e 40. A situação de projeto é a mesma das seções anteriores. O aço é o CA 50A e o parâmetro d'/d igual a 0,10. Encontram-se tabeladas as taxas mecânicas de armadura ω , definidas por (3.11), para os esforços de projeto de primeira ordem ν e μ definidos por (3.7) e (3.8), respectivamente. No processo simplificado do CEB não foi considerado o fator de comportamento $\gamma_{\rm R}=1,2$.

ASS	V	0,20		0,60		1,00	
8/d	μ\	ALGORITMO	CEB/78	ALGORITMO	CEB/78	ALGORITMO	CEB/78
12 (λ ≃ 40)	0,20 0,60 1,00	0,12 0,49 0,88	0,12 0,50 0,88	0,10 0,50 0,88	0,10 0,52 0,91	0,22 0,65 1,05	0,21 0,67 1,10

0,26

0,70

1,13

0,55

0,94

1,34

0.58

1,19

1,80

0.86

1,33

1,74

1,07

2,05

2,95

Tabela 3.6 – Valores de $\omega - \varphi(t_{\infty}, t_0) = 2$

0.26

0,65

1,02

0,20

0,60

1.00

40

Comparando os resultados, verifica-se que o processo simplificado proposto pelo CEB para a inclusão da fluência do concreto fornece uma solução a favor da segurança. O erro torna-se maior à medida que os esforços iniciais de primeira ordem crescem, principalmente o esforço normal. Isto se dá porque, quando a força normal aproxima-se da carga de Euler, a excentricidade adicional de fluência tende ao infinito. Conseqüentemente, os melhores resultados são obtidos para valores baixos do esforço normal. A precisão do processo pode ser melhorada incluindo-se as armaduras no cálculo da carga de Euler. Para isso procede-se iterativamente, adotando em uma iteração a armadura calculada na iteração anterior. O fator de comportamento $\gamma_{\rm II}$ sugerido pelo CEB para a majoração da força normal pode ser desconsiderado em vista dos resultados obtidos.

3.5.6 — Importância das deformações diferidas

Para testar o erro cometido no dimensionamento, ao se desprezarem as deformações diferidas do concreto, foram preparadas tabelas semelhantes à anterior, para pilares curtos e esbeltos, com relação ℓ/d igual a 12 e 40. As deformações de fluência e retração foram fixadas como nas seções 3.5.1 e 3.5.2. Os

demais parâmetros caracterizadores do pilar são os mesmos da seção anterior.

Ao se desprezar a fluência do concreto, verificou-se um erro máximo, para a faixa de esbeltez e esforços solicitantes de primeira ordem em estudo, da ordem de 20%. Esse limite tende a aumentar com o crescimento do esforço normal, de forma que a fluência do concreto não pode simplesmente ser desprezada como sugere a NBR-6118.

A retração do concreto acarretou um aumento máximo de 2½ na armadura, o que indica que a mesma pode ser desprezada nos casos em questão. Isto inclusive é permitido pelo CEB.

3.6 – Comentários sobre a norma brasileira

Em se tratando de dimensionamento de pilares, duas críticas devem ser feitas à norma NBR-6118. A primeira delas é quanto à definição de pilar curto. A norma brasileira, ao classificar como curtos todos os pilares cujos índices de esbeltez λ não sejam superiores a 40, desprezando com isto a consideração dos efeitos não-lineares geométricos, pode estar induzindo a erros contrários à segurança da estrutura. Os efeitos de segunda ordem não podem ser desprezados simplesmente em função de λ. Além desse parâmetro, deve-se levar em consideração o valor da excentricidade inicial relativa, e₁/h, da força normal no pilar. Um pilar com índice de esbeitez menor que 40, mas no qual a excentricidade relativa da força normal é pequena, deve ser classificado como esbelto, pois neste caso os efeitos de segunda ordem são importantes. A norma DIN 1045, por exemplo, ao dispensar a consideração desses efeitos, leva em conta os dois parâmetros. A classificação de pilares por essa norma é apresentada na figura 3.13.

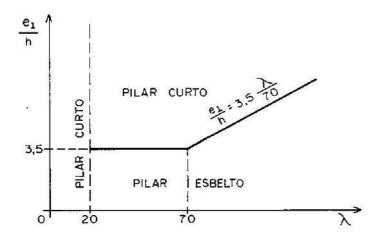


Figura 3.13 — Classificação de pilares quanto à esbeltez, segundo a DIN 1045

Na conceituação de pilar curto também deve ser levada em consideração a forma do diagrama de momentos fletores de primeira ordem. Um pilar com momentos iguais nos apoios é muito mais sensível aos efeitos de segunda ordem que outro com momentos de sentidos opostos. Assim, um pilar com índice de esbeltez λ maior que 40 pode ser classificado como curto, dependendo dos momentos de primeira ordem. A DIN 1045 também leva esse fato em consideração.

Um segundo ponto da NBR-6118 passível de crítica tem relação com a fluência do concreto. A norma simplesmente dispensa a consideração da fluência para pilares com índices de esbeltez não superiores a 80, quando se tratar de barras de seção transversal constante, com armadura simétrica. Não é levada em consideração a excentricidade relativa da força normal, nem o próprio valor das cargas de longa duração. Quanto menor a excentricidade relativa, maior será o efeito da fluência do concreto na estabilidade do pilar. Além disso, se a carga de longa duração é significativa em relação à carga total, como é o caso dos pilares, a fluência tem importância considerável. O CEB, por exemplo, só dispensa a consideração da fluência num dos seguintes casos:

- excentricidade relativa inicial grande: $\frac{e_1}{h} \ge 2$;
- carga predominante de curta duração: $P_g \leqslant$ 0,2 P_k
- Índice de esbeltez pequeno: $\lambda \le 50$

			2
			· •.
		<u> </u>	<u></u>

CAPÍTULO 4 O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

4.1 - Introdução

Diversas técnicas numéricas têm sido desenvolvidas para a análise de pilares esbeltos de concreto armado. Dentre essas, o método das diferenças finitas centrais tem o atrativo da sua simplicidade e facilidade de implementação computacional. Apesar da dificuldade de generalização inerente à técnica de diferenças finitas, consegue-se facilmente resolver o problema para os casos usuais de carregamento e condições de contorno.

Neste capítulo apresenta-se um algoritmo para a análise de pilares esbeltos de concreto armado, baseado em um modelo de diferenças finitas (ref. 4). O algoritmo combina processos incrementais e iterativos, os quais possibilitam a consideração das não-linearidades.

Com o objetivo de mostrar a versatilidade do método, apresenta-se a formulação para um caso geral de carregamento ao longo do eixo do pilar. As cargas, entretanto, devem ser de curta duração e aplicadas monotonamente ao elemento estrutural. Considera-se também a possibilidade de uma imperfeição geométrica inicial do eixo, bem como a existência de um engastamento nodal parcial. Em todo o estudo admite-se que o pilar pertence a um pórtico indeslocável e é solicitado em flexocompressão normal. Resultados experimentais obtidos por outros autores são utilizados para verificar a precisão do algoritmo.

. 4.2 — Equações de equilíbrio

Nesta seção apresentam-se as equações de equilíbrio para o pilar da figura 4.1, submetido a uma carga transversal q e aos momentos M_a e M_b aplicados em seus extremos. O pilar, pertencente a um pórtico de nós indeslocáveis, encontra-se esgastado elasticamente por molas de rigidez rotacional G_a e G_b . A força normal P_a é suposta constante ao longo do eixo, o qual pode apresentar uma imperfeição geométrica inicial representada pela função $W_0(x)$.

Com a aplicação das cargas, o pilar sofre um acréscimo de deslocamentos W(x) como mostrado na figura 4.2, onde também se indicam os sentidos positivos para as rotações e deslocamentos transversais.

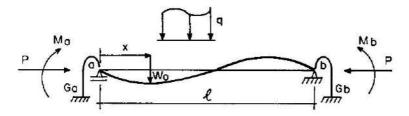


Figure 4.1 — Carregamento do pilar

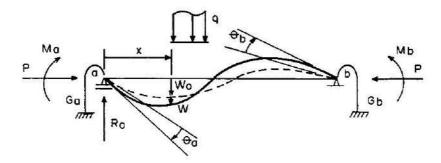


Figura 4.2 - Deformada do eixo do pilar

Garantindo o equilíbrio de momentos em relação ao extremo b, tem-se

$$R_a \ell + M_a - M_b - G_a \theta_a - G_b \theta_b - \int_0^{\ell} q(\ell - s) ds = 0.$$
 (4.1)

de onde se obtém a força vertical R_{a} na forma

$$R_a = \frac{1}{\ell} \left[G_a \theta_a + G_b \theta_b - M_a + M_b + \int_0^{\ell} q(\ell - s) ds \right].$$
 (4.2)

O momento fletor \mathbf{M} em uma seção transversal genérica ao longo do eixo do pilar é dado por

$$M = M_a - G_a \theta_a + P(W_o + W) + R_a x - \int_0^x q(x - s) ds$$
 (4.3)

e substituindo a expressão para Ra, resulta

$$M = \left[M_a \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) + M_b \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] + \left[G_a \theta_a \left(\frac{x}{\ell} - 1 \right) + G_b \theta_b \left(\frac{x}{\ell} \right) \right] +$$

$$+ PW_0 + PW + \left[\frac{x}{\ell} \int_0^{\ell} q(\ell - s) ds - \int_0^{x} q(x - s) ds \right] . \tag{4.4}$$

Observa-se, da expressão (4.4), que os dois termos dados pelas integrais correspondem ao momento fletor $M_{\mathbf{q}}$ em uma seção genérica de uma viga biapoiada submetida a uma carga transversal \mathbf{q} , isto é,

$$M_{\mathbf{q}} = \frac{x}{\ell} \int_{0}^{\ell} \mathbf{q}(\ell - s) ds - \int_{0}^{x} \mathbf{q}(x - s) ds$$
 (4.5)

e definindo

$$M_{\rm m} = M_{\rm a} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_{\rm b} \left(\frac{x}{\ell}\right) , \qquad (4.6)$$

$$M_g = G_a \theta_a \left(\frac{x}{\ell} - 1 \right) + G_b \theta_b \left(\frac{x}{\ell} \right)$$
, (4.7)

$$M_{O} = PW_{O}, (4.8)$$

resulta

$$M = M_{\rm m} + M_{\rm g} + M_{\rm O} + M_{\rm Q} + PW$$
 (4.9)

Na expressão (4.9) estão incluídas as influências dos momentos nodais em $M_{\rm m}$, do engastamento elástico em $M_{\rm g}$, da imperfeição geométrica em $M_{\rm O}$, da carga transversal em $M_{\rm O}$ e da não-linearidade geométrica em PW.

Admitindo um comportamento elástico linear para o material e as hipóteses das seções planas e de moderadas rotações, o momento fletor M em uma seção transversal do pilar é dado por

$$M = -k \frac{d^2 W}{dx^2} = -kW'',$$
 (4.10)

onde k é a rigidez à flexão da seção e W" é o valor aproximado para a curvatura χ do eixo da barra.

Igualando (4.9) a (4.10), resulta finalmente

$$M_m + M_g + M_o + M_q + PW = -kW''$$
 (4.11)

A equação (4.11) é a equação diferencial de equilíbrio do eixo do pilar e leva em conta apenas a não-linearidade geométrica, já que a rigidez k é admitida constante.

4.3 - Diferenças finitas centrais

A solução da equação de equilíbrio (4.11) é obtida através do emprego de diferenças finitas. A deformada do eixo do pilar é aproximada por funções polinomiais, obtendo-se assim uma expressão para a curvatura W" em função dos deslocamentos nas várias seções transversais,

Na figura 4.3 indica-se o seccionamento do eixo do pilar em $\bf n$ seções transversais igualmente espaçadas, do extremo a ao extremo b. Nessa figura indicam-se apenas as variações nos deslocamentos do eixo.

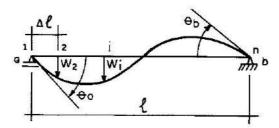


Figura 4.3 - Seccionamento do eixo do pilar

A distância Δℓ entre duas seções consecutivas é dada por

$$\Delta \ell = \frac{\ell}{n-1} . \tag{4.12}$$

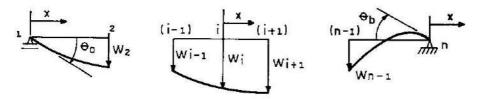


Figura 4.4 — Localização da origem de coordenadas

Ajustando um polinômio do segundo grau aos deslocamentos indicados na figura 4.4, obtêm-se as seguintes expressões para a curvatura nas diversas seções transversais:

$$W_1'' = \frac{2(W_2 - \theta_a \Delta \ell)}{\Delta \theta^2} ; (4.13)$$

$$W_{i}^{2} = \frac{W_{i+1} - 2W_{i} + W_{i+1}}{\Delta R^{2}}, \quad \text{com } i = 2 \text{ a } n-1;$$
 (4.14)

$$W_{n}^{*} = \frac{2(W_{n-1} + \theta_{b} \Delta \ell)}{\Delta \ell^{2}}, \qquad (4.15)$$

onde em (4.13) e (4.15) já estão introduzidas as condições de contorno W_1 = 0 e W_{11} = 0

Aplicando a equação diferencial de equilíbrio (4.11) a todas as seções e substituindo W" por suas aproximações em diferenças finitas, resulta um sistema de n equações algébricas lineares a n incógnitas, na forma

$$M + P_0 W = (K + G) W,$$
 (4.16)

onde

$$M = M_m + M_0 + M_q$$
 (4.17)

é um vetor coluna com n elementos, sendo \underline{M}_m dependente dos momentos nodais, \underline{M}_0 da imperfeição geométrica e \underline{M}_q da carga transversal aplicada ao pilar.

Definindo os vetores auxiliares

$$\psi_{\mathbf{a}} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 - \xi \\ 1 - 2\xi \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} ; \quad \psi_{\mathbf{b}} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \xi \\ 2\xi \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\} , \qquad (4.18)$$

onde $\xi = \Delta \ell / \ell$, resulta

$$M_{m} = M_{a} \psi_{a} + M_{b} \psi_{b}$$
 (4.19)

O vetor \underline{M}_q contém os valores dos momentos fletores devidos à carga transversal q nas \underline{n} seções, calculados como para uma viga biapoiada. O vetor \underline{M}_0 , levando em conta a imperfeição geométrica, é da forma

onde Woj é o valor do deslocamento transversal inicial na seção genérica i.

Evidentemente Wo1 e Won são nulos por condição de contorno.

As matrizes G e P_O são matrizes quadradas ($n \times n$) e levam em conta os efeitos do engastamento elástico e de segunda ordem, respectivamente.

A matriz G é dada por

$$G = \begin{bmatrix} G_a & \psi_a & O - G_b & \psi_b \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

onde $\underline{0}$ é uma matriz nula, de dimensão ($n \times n - 2$), e \underline{P}_0 é da forma

$$P_{0} = P_{\underline{I}}$$

$$\text{onde } \underline{I}(i,j) = \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i = j = 1 \\ 0 \text{ se } i = j = n. \end{cases}$$

$$(4.22)$$

A matriz K, levando em consideração a rigidez à flexão da barra, é uma matriz quadrada de dimensão ($n \times n$). Seus elementos podem ser obtidos a partir das expressões (4.13) a (4.15) associadas à equação (4.11).

O vetor coluna W, contendo os deslocamentos incógnitos, é da forma

$$\mathbf{W} = \begin{cases}
\theta_{\mathbf{a}} \\
\mathbf{W}_{2} \\
\vdots \\
\mathbf{W}_{i} \\
\vdots \\
\theta_{\mathbf{b}}
\end{cases} (4.23)$$

4.4 — Relações momento fletor—curvatura

No desenvolvimento apresentado nas seções anteriores admitiu-se que o material era elástico linear, resultando assim uma relação linear entre o momento

fletor M e a curvatura X dada pela equação (4.10). Para o concreto armado, entretanto, essa relação é não-linear e depende, além de outros fatores, do valor dos esforços que solicitam a seção.

Em virtude da formulação desenvolvida, interessa aqui conhecer o valor do momento fletor M, que, associado a uma força normal N e a uma curvatura X, estabelece o equilíbrio em uma seção transversal de concreto armado.

Na figura 4.5 apresenta-se uma seção transversal de concreto armado, possuindo um eixo de simetria coincidente com o plano da flexão. A seção possui n camadas de armadura e é solicitada por uma força normal N que atua no centro de gravidade, c, da seção de concreto.

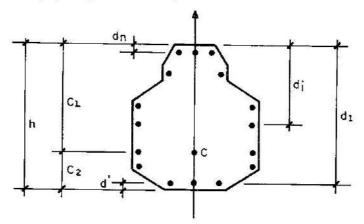


Figura 4.5 - Seção transversal de concreto armado

Com o emprego da hipótese das seções planas, resulta uma distribuição linear de deformações ao longo da altura da seção transversal, como indicado na figura 4.6.

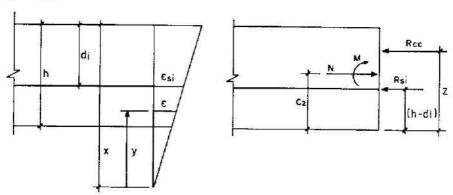


Figura 4 6 — Deformações e solicitações na seção

Por considerações puramente geométricas, verifica-se que a deformação ∈ em uma fibra genérica de concreto, situada a uma distância y da linha neutra, é dada por

$$\in = X y \tag{4.24}$$

e pela figura 4.6, a deformação em uma camada genérica de armadura é

$$\in_{\mathbf{si}} = \chi(\mathbf{x} - \mathbf{d_i}), \tag{4.25}$$

onde x é a distância da linha neutra à borda mais comprimida da seção.

Com as deformações no concreto e nas camadas de armadura, funções de x e χ , obtêm-se as tensões, a partir das equações constitutivas para os materiais. Integrando as tensões nas áreas correspondentes, obtém-se a resultante de compressão no concreto, R_{CC} , e as resultantes de tensões nas armaduras, genericamente R_{Si} para a camada i. Uma integração numérica ao longo da altura da seção transversal pode ser necessária para a determinação de R_{CC} .

Aplicando as equações de equilíbrio da estática ao sistema da figura 4.6, vem:

$$N - R_{cc}(x, X) - \sum_{i=1}^{n} R_{si}(x, X) = 0;$$
 (4.26)

$$M = R_{cc}(x, X) Z(x, X) + \sum_{\substack{i=1\\ i \neq 1}}^{n} R_{si}(x, X) (h - d_i) - N C_2.$$
 (4.27)

As equações (4.26) e (4.27) constituem um sistema não-linear de duas equações a duas incógnitas. Uma vez que a curvatura X é um dado do problema, a equação (4.26) é do tipo f(x)=0, onde f é uma função apenas de x. O processo iterativo da bissecante pode então ser utilizado para encontrar a raiz x da equação. Evidentemente o processo deve ser utilizado respeitando o critério de ruptura, como indicado no capítulo 2.

Encontrada a raiz da equação (4.26), obtém-se, a partir de (4.27), o momento fletor solicitante M, ficando resolvido o problema.

4.5 - Algoritmo de análise

As equações de equilíbrio dadas por (4.16) podem ser escritas na forma

$$\underline{M} + \underline{P}_0 \quad \underline{W} = \underline{K}_0 \quad \underline{W} , \qquad (4.28)$$

onde $K_0 = K + G$ é uma matriz que leva em conta a rigidez da barra e do engastamento nodal.

Na figura 4.7 representa-se simbolicamente a relação M-W para um pilar esbelto de concreto armado, para um dado valor da força normal P.

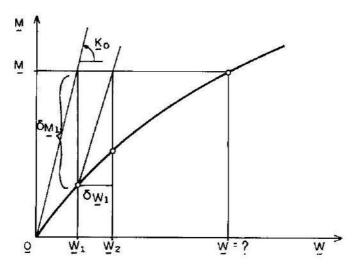


Figura 4.7 - Esquema iterativo

A matriz K_0 é computada considerando a rigidez das seções transversais de concreto armado no estado não-fissurado. Para a seção da figura 4.5, essa rigidez é dada por

$$k = E_C I_C + E_S \sum_{i=1}^{n} I_{Si}$$
 (4.29)

onde $E_{\rm C}$ e $E_{\rm S}$ são os módulos de deformação longitudinal do concreto e do aço, e $I_{\rm C}$ e $I_{\rm Si}$ são os momentos de inércia da seção de concreto e da camada genérica i de armadura, em relação ao baricentro da seção homogeneizada, respectivamente.

Para encontrar os deslocamentos \underline{W} associados aos momentos solicitantes \underline{M} , procede-se iterativamente empregando o método de Newton-Raphson modificado como exposto a seguir.

Inicialmente, calcula-se a primeira aproximação Ψ_1 para os deslocamentos a partir da equação

$$\underline{M} = \underline{K}_0 \underline{W}_1 \tag{4.30}$$

Com W_1 obtêm-se as curvaturas nas seções transversais do eixo do pilar através das aproximações em diferenças finitas e com as mesmas determinam-se os momentos internos M_1 para o concreto armado, como indicado na seção 4.4.

O vetor de desequilíbrio $\delta \underline{\mathtt{M}}_1$ entre os momentos externos e internos é

$$\delta M_1 = (M + P_0 W_1) - (G W_1 + M_1)$$
 (4.31)

Calcula-se então o acréscimo $\delta \underline{W}_1$ a ser dado nos deslocamentos a partir da equação

$$\delta \underline{\mathbf{M}}_{1} = \underline{\mathbf{K}}_{0} \ \delta \underline{\mathbf{W}}_{1} \tag{4.32}$$

e o novo conjunto W2 é dado por

$$W_2 = W_1 + \delta W_1 . (4.33)$$

Procede-se assim iterativamente até que em uma iteração genérica j se tenha

$$\left| \frac{W_{j}^{i} - W_{j-1}^{i}}{W_{j}^{i}} \right| \leq \text{tolerância} ; (i = 1 \text{ a n})$$
 (4.34)

e simultaneamente

$$\frac{\parallel \delta \underline{Mj} \parallel}{\parallel \underline{M} \parallel} \leqslant \text{tolerância} . \tag{4.35}$$

Como valor para a tolerância pode-se adotar 0,01. Na equação (4.34), $W_{\mathbf{j}}^{\mathbf{j}}$ é o deslocamento na seção transversal i calculado na iteração j, e na equação (4.35) o símbolo $\| \ \|$ significa norma de vetor.

Um procedimento incremental no carregamento é utilizado para obter uma resposta completa da estrutura até a ruína.

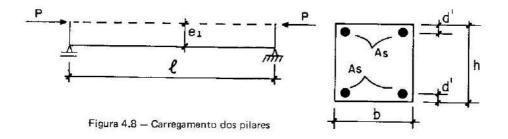
A ruína por instabilidade é considerada quando em uma seção de referência for atendida a desigualdade

$$|W_{j-1}| > |W_{j-1} - W_{j-2}|$$
 (4.36)

e a ruína por ruptura é detectada pelo algoritmo apresentado na seção 4.4.

4.6 - Exemplos

Os exemplos apresentados nesta seção referem-se ao pilar da figura 4.8, solicitado por uma força normal P com uma excentricidade inicial e_1 . Na figura indica-se também a forma das seções transversais do pilar.



Nas figuras 4.9 e 4.10 apresentam-se as respostas teóricas obtidas com o algoritmo, em comparação com os resultados dos ensaios da ref. 17.

Os pilares são submetidos ao carregamento da figura 4.8, em forma incremental até a ruína. A seção transversal é quadrada com dimensões b=h=7.6 cm e d'=1.3 cm. A área da seção de armadura é $A_S=0.5 cm^2$. O aço apresenta um comportamento elastoplástico perfeito, com uma tensão de escoamento igual a 316MPa. Na análise teórica adota-se para o módulo de elasticidade o valor $210 kN/mm^2$.

Na figura 4.9 apresentam-se as curvas carga-deslocamento na seção central, para um pilar com comprimento $\ell=122$ cm, excentricidade inicial da carga igual a 1,9cm e resistência à compressão do concreto, $f_{\mathcal{C}_i}$ igual a 24MPa. Na análise numérica adota-se um coeficiente redutor da resistência à compressão do concreto, devido ao Efeito Rüsch, igual a 0,92.

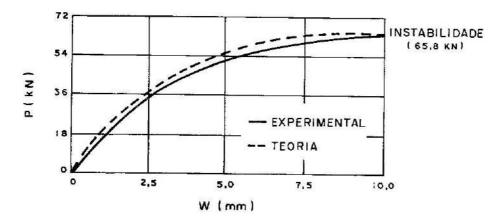


Figura 4.9 - Curvas carga-deslocamento (pilar P₁)

Na figura 4.10 são apresentadas as relações força normal-momento fletor máximo, para um pilar com comprimento $\ell=274$ cm, excentricidade inicial $e_1=1,3$ cm e resistência do concreto $f_C=22$ MPa. O coeficiente redutor da resistência é tomado igual a 0,92.

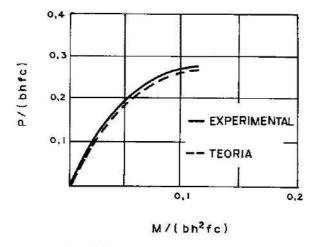


Figura 4.10 - Curvas carga-momento (pilar R,)

Observa-se, através dos dois exemplos apresentados, um bom ajuste entre a resposta teórica e a experimental, o que indica o realismo das hipóteses formuladas.

O grande atrativo do método das diferenças finitas é sua simplicidade de concepção, o que resulta em facilidade de implementação computacional para o problema em questão. A manutenção da mesma matriz K_0 durante todo o processo de solução é possível pela criação de um vetor auxiliar onde se inclui a não-linearidade geométrica. Com isso a decomposição da matriz é efetuada uma única vez, o que reduz o tempo de processamento requerido. Entretanto, nessa formulação, o número de iterações necessárias à convergência pode se tornar excessivo e a atualização da rigidez em determinada etapa do processo pode ser mais eficaz. Um estudo comparativo dessa natureza é apresentado no capítulo 6.

CAPÍTULO 5 ANÁLISE PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

5.1 - Teoria não-linear de flexão de barras

5.1.1 - Generalidades

A análise tridimensional do estado de deformações e tensões em um corpo contínuo, em geral, inicia-se pela formulação de hipóteses sobre o campo de deslocamentos do mesmo. O campo de deslocamentos admitido deve, de antemão, ser tal que considere todo possível movimento de corpo rígido, o que evidentemente não deve originar deformações no corpo.

Conhecidos os deslocamentos, obtêm-se, por diferenciação dos mesmos, as deformações nos pontos do corpo, através das relações deformações-deslocamentos. A definição das equações constitutivas para o material possibilita a obtenção das tensões no corpo em função dos deslocamentos.

No caso elástico linear, a solução para o problema, associada às condições de contorno, é única (ref. 31). A solução assím obtida, que é a solução exata para o problema elástico tridimensional, fornece o real estado de tensões e deformações no corpo.

A análise tridimensional dos problemas estruturais correntes em Engenharia, entretanto, é demasiadamente complexa, mesmo para estruturas simples como vigas esbeltas sob flexão normal.

Em virtude da onerosidade matemática do tratamento elástico tridimensional, em geral são formuladas certas hipóteses simplificadoras sobre o campo de deslocamentos que permitem a obtenção de uma solução aproximada. O grau de aproximação da solução, evidentemente, vai depender do realismo das hipóteses admitidas.

Na teoria técnica de vigas são adotadas simplificações desse nível. O corpo tridimensional é tratado como se fosse unidimensional, e hipóteses são formuladas sobre os deslocamentos do seu eixo. Na seção seguinte apresenta-se uma teoria simplificada para a análise não-linear geométrica de barras esbeltas, que fornece resultados compatíveis com as experimentações de laboratório, como se tem demonstrado numericamente.

5.1.2 - Deslocamentos em barras esbeltas

Para a obtenção dos deslocamentos em uma barra esbelta, empregam-se

usualmente as hipóteses das seções planas e de moderadas rotações. Na figura 5.1 apresenta-se um elemento de barra nas configurações deformada e indeformada, submetido a cargas aplicadas no plano x-z, o qual é um plano de simetria para o elemento.

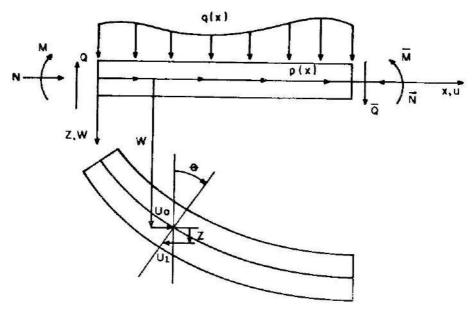


Figura 5.1 - Deslocamentos e esforços

Na figura 5.1 admite-se que o eixo da barra sofre um deslocamento \mathbf{u}_0 na direção \mathbf{x} e um deslocamento transversal \mathbf{W} na direção \mathbf{z} .

O deslocamento u (x, z) em uma fibra genérica da barra é dado por

$$u(x, z) = u_0(x) + u_1(x, z)$$
 (5.1)

e pela hipótese das seções planas tem-se que

$$u_1(x, z) = -z W, x$$
, (5.2)

onde o símbolo [], x representa a primeira derivada da função [] em relação à variável x.

Logo, o campo de deslocamentos para a barra fica representado por

$$u(x, z) = u_0(x) - z W, x;$$

 $W(x, z) = W(x).$ (5.3)

5.1.3 - Relação deformação-deslocamentos

Na teoria não-linear para a flexão de barras, as relações entre deformações e deslocamentos são obtidas considerando-se as deformações devidas à curvatura e ao encurtamento do seu eixo. Na figura 5.2 apresenta-se um segmento infinitesimal da barra com os respectivos deslocamentos.

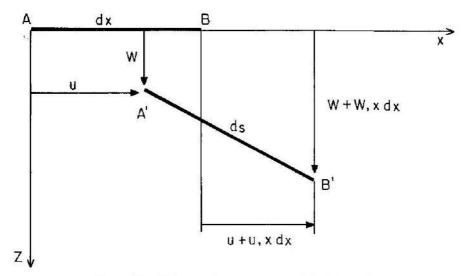


Figura 5.2 - Deslocamentos em um elemento infinitesimal

Nota-se pela figura 5.2 que as posições finais dos extremos A e B do segmento, na configuração deformada, serão

$$A' = \begin{cases} x_{a'} \\ z_{a'} \end{cases} = \begin{cases} u \\ W \end{cases} ; B' = \begin{cases} x_{b'} \\ z_{b'} \end{cases} = \begin{cases} u + u, x dx + dx \\ W + W, x dx \end{cases}$$
 (5.4)

e o comprimento final do segmento é dado por

$$ds = \sqrt{(x_{b'} - x_{a'})^2 + (z_{b'} - z_{a'})^2}.$$
 (5.5)

Substituindo (5.4) em (5.5), tem-se

$$ds = dx \sqrt{(1+u, x)^2 + (W, x)^2}.$$
 (5.6)

Expandindo o segundo termo da expressão (5.6) em série de Taylor, tem-se

$$ds = dx \left[1 + u, x + \frac{1}{2} (W, x)^2\right]$$
 (5.7)

o qual representa o comprimento final do segmento,

A deformação longitudinal $\in_{\mathbf{X}}$ do segmento é dada por

$$\in_{\mathbf{X}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{s} - \mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\mathbf{x}} \quad .$$
(5.8)

Substituindo (5.7) em (5.8), chega-se a

$$\in_{\mathbf{X}} = \mathbf{u}, \mathbf{x} + \frac{1}{2} (\mathbf{W}, \mathbf{x})^2$$
 (5.9)

e lembrando que

$$u = u_0 - z W, x$$
, (5.10)

resulta finalmente

$$\in_{\mathbf{X}} = \mathbf{u_0}, \mathbf{x} - \mathbf{zW}, \mathbf{xx} + \frac{1}{2} (\mathbf{W}, \mathbf{x})^2$$
 (5.11)

onde o símbolo [], xx representa a segunda derivada da função [] em relação à variável x.

Definindo

$$\epsilon_0 = u_0, x + \frac{1}{2} (W, x)^2 = \text{deformação axial;}$$

X = W, xx = curvatura média aproximada do eixo da barra, pode-se escrever

$$\epsilon_{\mathbf{X}} = \epsilon_{\mathbf{0}} - \mathbf{z} \, \lambda$$
(5.12)

que relaciona a deformação longitudinal em um ponto genérico da barra com os deslocamentos do seu eixo. Observa-se que a relação é não-línear pela definição dada para a deformação axial.

5.1.4 - Princípio dos trabalhos virtuais

O modelo de elementos finitos apresentado neste capítulo é baseado em uma formulação em deslocamentos com o emprego do princípio dos trabalhos virtuais correspondente.

Considerando o campo de deslocamentos admitido, o trabalho virtual interno, δ Wint, no volume indeformado v da barra, é dado por

$$\delta \text{Wint} = \int_{V} \sigma_{X} \delta \in_{X} dv , \qquad (5.13)$$

onde $\delta \in_X$ é uma deformação virtual compatível com o campo de deslocamentos e σ_X é a tensão despertada no interior da barra.

Aplicando-se a primeira variação (ref. 8) à deformação $\in_{\mathbf{X}}$ dada por (5.11), resulta

$$\delta \in_{\mathbf{X}} = \delta \mathbf{u}_{0}, \mathbf{x} - \mathbf{z} \delta \mathbf{W}, \mathbf{x} + \mathbf{W}, \mathbf{x} \delta \mathbf{W}, \mathbf{x}. \tag{5.14}$$

O trabalho virtual interno pode, portanto, ser escrito na forma

$$\delta \text{Wint} = \int_{0}^{\ell} \int_{A} \sigma_{X} \left[\delta u_{O}, x - z \delta W, x x + W, x \delta W, x \right] dA dx, \quad (5.15)$$

onde A e ℓ são a área da seção transversal e o comprimento da barra, respectivamente.

Reordenando a expressão (5.15), tem-se

$$\delta \text{Wint} = \int_{\Omega}^{\Omega} \left[\delta \mathbf{u}_{O}, \mathbf{x} \int_{\mathbf{A}} \sigma_{\mathbf{X}} d\mathbf{A} - \delta \mathbf{W}, \mathbf{x} \mathbf{x} \int_{\mathbf{A}} \sigma_{\mathbf{X}} \mathbf{z} d\mathbf{A} + \mathbf{W}, \mathbf{x} \delta \mathbf{W}, \mathbf{x} \int_{\mathbf{A}} \sigma_{\mathbf{X}} d\mathbf{A} \right] d\mathbf{x}$$
(5.16)

e definindo

$$N = \int_A \sigma_X dA = \text{esforço normal;}$$

$$M = \int_A \sigma_X z dA = \text{momento fletor,}$$

resulta

$$\delta \text{Wint} = \int_0^{\varrho} \left[-M\delta W, xx + N\delta u_0, x + NW, x\delta W, x \right] dx. \qquad (5.17)$$

O trabalho virtual devido às forças externas aplicadas à barra (figura 5.1) é dado por

$$\delta \mathbf{Wext} = \int_{0}^{\ell} \mathbf{q}(\mathbf{x}) \, \delta \mathbf{W} d\mathbf{x} + \int_{0}^{\ell} \mathbf{p}(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}_{0} \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^{n} F_{i} \delta U_{i}, \qquad (5.18)$$

onde F_i e δU_i são forças e deslocamentos virtuais generalizados.

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece a condição necessária e suficiente para o equilíbrio do corpo na forma

$$\delta Wext = \delta Wint \tag{5.19}$$

A equação (5.19) é, em suma, a equação integral de equilíbrio da barra. A solução dessa equação será obtida mediante o emprego do método dos elementos finitos como apresentado nas seções seguintes.

5.2 - Modelo de elementos finitos

5.2.1 — Considerações gerais

O método dos elementos finitos, na sua formulação em deslocamentos, será aqui utilizado para solucionar a equação integral de equilíbrio da barra, apresentada na seção anterior.

A técnica consiste em se discretízar a estrutura em um número finito de pequenos elementos líneares, que se interligam através de seus extremos (nós). Para cada nó consideram-se três deslocamentos possíveis, ou seja, admite-se a existência de três graus de liberdade. Os deslocamentos em qualquer ponto do eixo do elemento são obtidos em função dos deslocamentos nodais, através do emprego de funções de interpolação polinomiais.

Uma vez definido o campo de deslocamentos para um elemento genérico, obtêm-se as deformações e as tensões correspondentes no mesmo. Empregando equações constitutivas lineares para os materiais, podem-se operar analiticamente as integrais do princípio dos trabalhos virtuais. Obtém-se assim um sistema linear de equações simultâneas relacionando as ações nodais com os deslocamentos nodais para cada elemento. As ações distribuídas ao longo do elemento são transformadas em ações nodais equivalentes. Dessa maneira fica definida a matriz de rigidez elementar para um material elástico linear.

Montadas as matrizes de rigidez elementares, pode-se computar a matriz de rigidez global da estrutura e resolver o sistema global de equações lineares para a obtenção dos deslocamentos nodais.

Nesse ponto é introduzido um esquema computacional iterativo, denominado método de Newton-Raphson modificado, que possibilita a inclusão das não-linearidades física e geométrica da estrutura de concreto armado.

5.2.2 - Funções de interpolação

Na figura 5.3 apresenta-se um elemento de barra submetido às ações nodais, onde também se indicam os sentidos positivos dos deslocamentos nodais.

Para determinar os deslocamentos em um ponto genérico do eixo do elemento, em função dos deslocamentos nodais, são admitidas as aproximações

$$W = ax^3 + bx^2 + cx + d; (5.20)$$

$$u_0 = Ax + B$$
. (5.21)

Introduzindo as condições de contorno nas expressões (5.20) e (5.21), resulta

$$W = \phi_2 U_2 + \phi_3 U_3 + \phi_5 U_5 + \phi_6 U_6;$$

$$u_0 = \phi_1 U_1 + \phi_4 U_4$$
(5.22)

onde as ϕ_i são funções de interpolação na forma

$$\phi_{1} = 1 - \frac{x}{\ell}; \qquad \phi_{2} = 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^{3} - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^{2} + 1;$$

$$\phi_{3} = \ell \left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^{3} - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^{2} + \left(\frac{x}{\ell}\right)\right]; \qquad \phi_{4} = \frac{x}{\ell};$$

$$\phi_{5} = -2\left(\frac{x}{\ell}\right)^{3} + 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^{2}; \qquad \phi_{6} = \ell \left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^{3} - \left(\frac{x}{\ell}\right)^{2}\right]. (5.23)$$

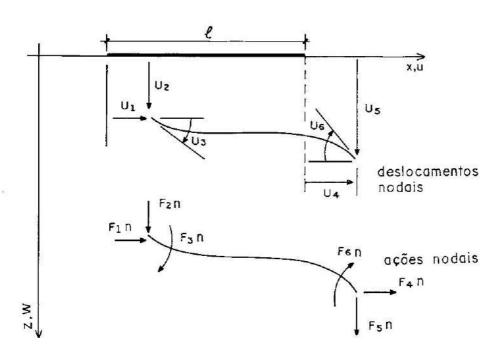


Figura 5.3 — Ações e deslocamentos nodais

5.2.3 - Aplicação do princípio dos trabalhos virtuais

Considerando-se apenas as ações nodais F_{in} atuando no elemento, tem-se

$$\delta Wext = \sum_{i=1}^{6} F_{in} \delta U_i . \qquad (5.24)$$

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece a condição de equilíbrio na forma

$$\sum_{i=1}^{6} F_{in}\delta U_{i} = \int_{0}^{\ell} \left[-M\delta W, xx + N\delta u_{0}, x + NW, x\delta W, x \right] dx.$$
 (5.25)

Com o campo de deslocamentos admitido em (5.22), tem-se

$$\delta W_{3} \times X = \phi_{2}^{"} \delta U_{2} + \phi_{3}^{"} \delta U_{3} + \phi_{5}^{"} \delta U_{5} + \phi_{6}^{"} \delta U_{6};$$

$$\delta \mathbf{u_0}, \mathbf{x} = \phi_1^* \delta \mathbf{U_1} + \phi_4^* \delta \mathbf{U_4};$$

$$W_{3}x = \phi_{2}^{3}U_{2} + \phi_{3}^{3}U_{3} + \phi_{5}^{3}U_{5} + \phi_{6}^{3}U_{6}$$

$$\delta W_{3}X = \phi_{2}^{2}\delta U_{2} + \phi_{3}^{2}\delta U_{3} + \phi_{3}^{2}\delta U_{5} + \phi_{5}^{2}\delta U_{6}$$

onde
$$\phi_{i}^{2} = \phi_{i,X} e \phi_{i}^{2} = \phi_{i,XX}$$
 (5.26)

Como os deslocamentos virtuais δU_i são arbitrários, pode-se tomar qualquer valor para os mesmos, como por exemplo, pode-se adotar $\delta U_1 \neq 0$ e $\delta U_2 = \ldots = \delta U_6 = 0$. Tomando $\delta U_k \neq 0$ e $\delta U_i = 0$ se $i \neq k$, resultam seis equações de equilibrio.

Considerando só $\delta U_1 \neq 0$, a equação (5.25) resume-se a

$$\mathbf{F}_{1 \,\mathbf{n}} \delta \mathbf{U}_{1} = \int_{0}^{\varrho} \mathbf{N} \dot{\varphi}_{1}^{2} \delta \mathbf{U}_{1} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \; ; \tag{5.27}$$

e como δU₁ é independente de x, resulta

$$\mathbf{F}_{1:\mathbf{\Pi}} = \int_{0}^{\chi} N\phi_{1}^{\prime} d\mathbf{x} . \tag{5.28}$$

Analogamente obtém-se

$$F_{2\Pi} = \int_{0}^{\ell} -M\phi_{2}^{"}dx + \int_{0}^{\ell} N(\phi_{2}^{"}U_{2} + \phi_{3}^{"}U_{3} + \phi_{5}^{"}U_{5} + \phi_{6}^{"}U_{6})\phi_{2}^{"}dx \qquad (5.29)$$

$$F_{3n} = \int_{0}^{\ell} -M\phi_{3}^{**}dx + \int_{0}^{\ell} N(\phi_{2}^{*}U_{2} + \phi_{3}^{*}U_{3} + \phi_{5}^{*}U_{5} + \phi_{6}^{*}U_{6})\phi_{3}^{*}dx \qquad (5.30)$$

$$F_{4n} = \int_{0}^{\mathcal{Q}} N\phi_4^* dx \tag{5.31}$$

$$F_{5n} = \int_{0}^{\ell} -M\phi_{5}^{\prime\prime} dx + \int_{0}^{\ell} N(\phi_{2}^{\prime\prime}U_{2} + \phi_{3}^{\prime\prime}U_{3} + \phi_{5}^{\prime\prime}U_{5} + \phi_{6}^{\prime\prime}U_{6})\phi_{5}^{\prime\prime} dx \qquad (5.32)$$

$$F_{6n} = \int_{0}^{\ell} -M\phi_{6}^{"}dx + \int_{0}^{\ell} N(\phi_{2}^{"}U_{2} + \phi_{3}^{"}U_{3} + \phi_{5}^{"}U_{5} + \phi_{6}^{"}U_{6})\phi_{6}^{"}dx \qquad (5.33)$$

5.2.4 - Matrizes de rigidez e geométrica

Admitindo-se um comportamento elástico linear para o material, tem-se

$$M = \int_{\Delta} \sigma_{X} z dA = \int_{\Delta} E \in_{X} z dA$$
 (5.34)

$$N = \int_{A} \sigma_{X} dA = \int_{A} E \in_{X} dA$$
 (5.35)

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal e a deformação longitudinal $\in x$ é dada por (5.11).

Substituindo (5.11) em (5.34) e (5.35) resulta

$$M = E \left\{ \left[u_0, x + \frac{1}{2} (W, x)^2 \right] \int_A z dA - W_0 xx \int_A z^2 dA \right\}$$
 (5.36)

$$N = E \left\{ \left[u_0, x + \frac{1}{2} (W, x)^2 \right] \int_{\Delta} dA - W, xx \int_{\Delta} z dA \right\}$$
 (5.37)

Se o eixo da barra é o eixo centroidal tem-se

$$S = \int_{A} z dA = 0$$
; (5.38)

$$I = \int_{A} z^{2} dA = 0$$
, (5.39)

onde S e I são o momento estático e o momento de inércia centroidal da seção transversal, respectivamente.

Desprezando-se o termo $(W, x)^2$ na expressão (5.37) chega-se a

$$M = -EIW, xx ag{5.40}$$

$$N = EA u_{0} x$$
 (5.41)

onde EI e EA são a rigidez à flexão e a rigidez axial das seções transversais da barra, respectivamente.

Substituindo W, xx e uo, x por suas aproximações dadas em (5.26) resulta

$$M = -EI \left[\phi_2^{"} U_2 + \phi_3^{"} U_3 + \phi_5^{"} U_5 + \phi_6^{"} U_6 \right]$$
 (5.42)

$$N = EA \left[\phi_1^2 U_1 + \phi_2^2 U_4 \right]$$
 (5.43)

e introduzindo M e N nas expressões (5.28) a (5.33), obtém-se um sistema de seis equações lineares a seis incógnitas na forma

$$F_n^e = (K^e + G^e) U^e$$
, (5.44)

onde \underline{K}^e e \underline{G}^e são as matrizes de rigidez e geométrica linearizadas, para o elemento de barra. Os vetores \underline{F}_n^e e \underline{U}^e contêm as ações de extremo de membro e os deslocamentos nodais, respectivamente.

As matrizes de rigidez e geométrica são da forma

$$\widetilde{G}^{e} = \frac{N}{\ell} \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6/5 & \ell/10 & 0 & -6/5 & \ell/10 \\
0 & \ell/10 & 2\ell^{2}/15 & 0 & -\ell/10 & -\ell^{2}/30 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -6/5 & -\ell/10 & 0 & 6/5 & -\ell/10 \\
0 & \ell/10 & -\ell^{2}/30 & 0 & -\ell/10 & 2\ell^{2}/15
\end{bmatrix} (5.46)$$

No esquema computacional apresentado neste capítulo, a matriz geométrica não é armazenada e a não-linearidade geométrica é considerada quando da avaliação das acões não-lineares de extremo de membro.

5.2.5 — Ações nodais equivalentes

Na figura 5. 4 apresenta-se um elemento submetido a uma carga transversal q e a uma carga p, distribuídas ao longo do seu eixo. Na mesma figura apresenta-se o conjunto das ações nodais equivalentes ao carregamento distribuído.

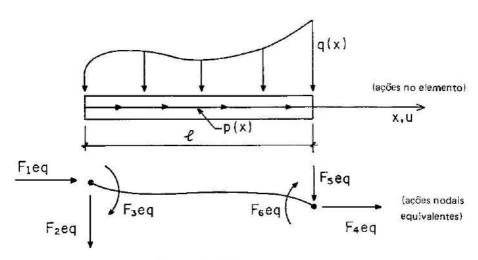


Figura 5.4 - Ações no elemento

As ações nodais equivalentes são tais que o trabalho por elas realizado é igual ao trabalho realizado pelas ações nos elementos, isto é,

$$\sum_{i=1}^{6} F_{ieq} \delta U_i = \int_0^{\ell} q(x) \delta W dx + \int_0^{\ell} p(x) \delta_{uo} dx$$
 (5.47)

Admitindo $\delta U_k \neq 0$ e δU_i = 0 se $~i \neq k,$ obtêm-se as seis ações nodais equivalentes na forma

$$F_{1 eq} = \int_{0}^{\ell} p(x)\phi_{1} dx$$
 (5.48)

$$F_{2} = \int_{0}^{\ell} q(x)\phi_{2} dx$$
 (5.49)

$$F_{3} = \int_{0}^{\hat{x}} q(x) \phi_{3} dx$$
 (5.50)

$$F_{4}eq = \int_{0}^{Q} p(x)\phi_{4} dx$$
 (5.51)

$$F_{seq} = \int_{0}^{\varrho} q(x)\phi_{s} dx \qquad (5.52)$$

$$F_{6 eq} = \int_{0}^{\Re} q(x) \phi_{6} dx$$
 (5.53)

As ações aplicadas ao longo dos elementos são, portanto, transformadas em ações nodais equivalentes e adicionadas às ações aplicadas diretamente nos nós.

O sistema de equações, em nível de elemento, finalmente é colocado na forma

$$\mathbf{\tilde{F}}_{n}^{e} + \mathbf{\tilde{F}}_{eq}^{e} = (\mathbf{\tilde{K}}^{e} + \mathbf{\tilde{G}}^{e}) \mathbf{\tilde{U}}^{e}, \qquad (5.54)$$

onde F_n^e e F_{eq}^e são vetores de ações aplicados nos nós e de ações nodais equivalentes, respectivamente.

5.2.6 — Implementação computacional do método dos elementos finítos

Nas seções anteriores apresentou-se a formulação das equações de equilíbrio em nível de elemento, na hipótese de um comportamento elástico linear. A implementação computacional do sistema global de equações é feita de acordo com a seguinte sequência lógica (ref. 8):

- Introdução das características geométricas e mecânicas dos elementos, bem como das ações nodais e das ações aplicadas ao longo dos elementos.
- Montagem do vetor de cargas F que contém a soma das ações nodais e das ações nodais equivalentes, para a estrutura completa.
- Montagem das matrízes de rigidez dos elementos que serão acopladas para a formação da matriz de rigidez global da estrutura. A montagem da matriz global é feita por superposição das submatrízes elementares, correspondentes às partições nodais referentes aos nós comuns a dois elementos. A matriz geométrica não é armazenada, pois as não-línearidades são introduzidas através de um esquema iterativo.
- Após o armazenamento da matriz global devem ser introduzidas as condições de contorno. Isto pode ser feito subtraindo do vetor de cargas o produto da supercoluna da matriz, correspondente ao nó com deslocamentos prescritos, pelos

valores desses deslocamentos. Na posição do vetor, correspondente ao nó em questão, colocam-se os valores dos deslocamentos prescritos. Em seguida altera-se a matriz de rigidez, zerando a superlinha e a supercoluna correspondente ao nó, colocando o valor 1 na diagonal da mesma. Essa forma de introdução das condições de contorno é atraente, já que não é quebrada a simetria da matriz de rigidez. Uma vez que a matriz de rigidez é banda e simétrica, a mesma é armazenada em arranjo retangular, o que reduz sensivelmente a disponibilidade de memória requerida.

 Nesta etapa do processamento resolve-se o sistema de equações líneares para a obtenção dos deslocamentos nodais da estrutura.

5.2.7 — Esquema iterativo para a consideração das não-linearidades

Na linearização das equações de equilíbrio apresentadas anteriormente, chegou-se a um sistema da forma

$$F = K U \tag{5.55}$$

onde \underline{K} é a matriz de rigidez global da estrutura e \underline{F} e \underline{U} são os vetores das ações e dos deslocamentos nodais para a estrutura completa, respectivamente.

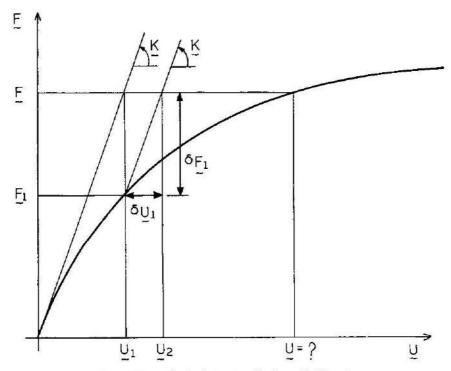


Figura 5.5 - Método de Newton-Raphson Modificado

Para a obtenção de K admite-se que a seção transversal de um elemento de concreto armado se mantém constante ao longo do mesmo, inclusive a armadura. As rigidezes axial e à flexão são então computadas para cada elemento, considerando a seção transversal homogeneizada de concreto armado. No sistema (5.55), portanto, foram desconsideradas as não-linearidades física e geométrica da estrutura.

Para a inclusão dessas não-linearidades, procede-se como indicado na figura 5.5, onde se ilustra o esquema iterativo denominado Método de Newton-Raphson Modificado (ref. 5).

Inicialmente resolve-se o sistema linear

$$F = K U_1 \tag{5.56}$$

para se obter a primeira aproximação, U_1 , para os deslocamentos nodais.

Com os deslocamentos nodais obtêm-se as deformações axiais e as curvaturas ao longo do eixo dos elementos, empregando as funções de interpolação, como visto na seção 5.2.2. A não-linearidade geométrica da estrutura fica considerada na expressão da deformação axial. A deformação em uma fibra genérica ao longo de um elemento pode ser avaliada por (5.12) e, empregando as equações constitutivas para os materiais, obtêm-se as tensões.

Na figura 5.6 indica-se uma seção transversal de um elemento de concreto armado. A seção possui n camadas de armadura, dispostas simetricamente em relação ao eixo de simetria z .

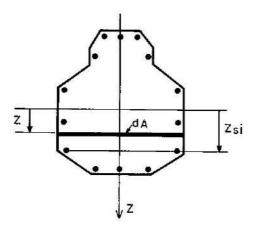


Figura 5.6 - Seção transversal

Tomando algumas seções ao longo do eixo de cada elemento, podem-se avaliar os momentos fletores, M, e os esforços normais, N, nessas seções, como

$$M = \int_{Ac} \sigma_{c} Z dA + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} A_{si} Z_{si}$$
 (5.57)

$$N = \int_{Ac} \sigma_{C} dA + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{Si} A_{Si}$$
 (5.58)

onde A_{Si} e σ_{Si} são a área da seção transversal e a tensão em uma camada genérica i de armadura, respectivamente.

A dificuldade em se avaliar os esforços internos N e M é relativa às integrais contidas nas expressões anteriores. A solução é encontrada discretizando a seção em faixas perpendiculares ao seu eixo de simetria. A tensão σ_C no concreto é obtida para o centro de cada faixa e considerada constante na mesma. A integral é então repassada para uma soma finita, podendo-se assim avaliar o esforço normal, N, e o momento fletor, M, associados a um dado estado de deformações. Dessa maneira fica incluída a não-linearidade física dos materiais, uma vez que as tensões σ_C no concreto e σ_{SI} nas camadas de armadura são obtidas empregando-se os diagramas tensão-deformação apresentados no capítulo 1.

Para a obtenção das ações não-lineares de extremo de membro efetuam-se as integrais (5.28) a (5.33) com os valores de M e N obtidos para as várias seções transversais dos elementos. Essas integrações podem ser efetuadas utilizando a regra de Gauss-Legendre.

Superpondo as ações não-lineares calculadas para os elementos isoladamente, em função das conetividades respectivas, obtém-se o vetor \underline{F}_1 das ações nodais não-lineares.

O desequilíbrio $\delta \tilde{F}_1$ entre as forças aplicadas \tilde{F} e as ações nodais não-lineares \tilde{F}_1 é dado por

$$\delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1 \tag{5.59}$$

A solução do sistema linear

$$\delta \mathbf{\tilde{F}}_1 = \mathbf{K} \delta \mathbf{\tilde{U}}_1 \tag{5.60}$$

fornece $\delta \underline{U}_1$, com o qual se calcula o novo conjunto de deslocamentos nodais

$$\underline{\mathbf{U}}_2 = \underline{\mathbf{U}}_1 + \delta \underline{\mathbf{U}}_1 \tag{5.61}$$

Desenvolve-se assim um processo iterativo que fornece uma seqüência de deslocamentos nodais. A convergência do método é admitida quando, em uma iteração genérica j, encontrar-se

$$\frac{\|\delta \underline{F_j}\|}{\|\underline{F}\|} \leq \text{tolerância}; \tag{5.62}$$

e simultaneamente

$$\frac{\parallel \underline{U_j} - \underline{U_{j-1}} \parallel}{\parallel \underline{U_i} \parallel} \leq \text{tolerância}, \tag{5.63}$$

onde o símbolo | | representa a norma Euclidiana de vetor.

Associando a esse esquema iterativo um processo incremental no carregamento, pode-se obter a resposta estrutural até a ruína. A ruptura de uma seção transversal é constatada da mesma maneira como apresentada no capítulo 2, através dos domínios de dimensionamento.

5.3 - Exemplos

5.3.1 - Pilar esbelto

Na figura 5.7 indica-se a curva carga-deslocamento obtida para um pilar esbelto, bem como a resposta experimental (ref. 32). Na mesma figura estão indicados o sistema de carga e a seção transversal do pilar, a qual se mantém constante ao longo de todo o seu eixo. O pilar tem índice de esbeltez igual a 100.

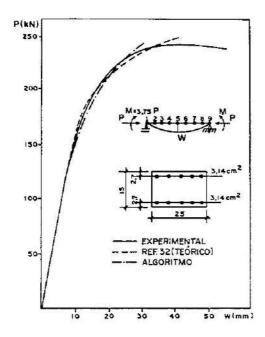


Figura 5.7 — Curvas carga-deslocamento para pilar esbelto

A máxima tensão de compressão no concreto, $f'_{\rm C}$, é igual a 28MPa, e a tensão de escoamento $f_{\rm y}$ do aço é igual a 450MPa. Para o aço admite-se um comportamento elastoplástico perfeito e um módulo de elasticidade longitudinal 21×10^4 MPa.

A resposta teórica foi encontrada utilizando-se trinta etapas de carga até a ruína. As integrações ao longo da altura das seções transversais dos elementos foram efetuadas considerando vinte faixas de igual altura. Para a integração ao longo do eixo dos elementos, foram utilizados três pontos de integração de Gauss-Legendre.

Em virtude da resposta obtida, verifica-se a boa precisão do algoritmo, mesmo nas proximidades da ruína. O trecho descendente da curva experimental, entretanto, não pode ser acompanhado pelo algoritmo, já que, no esquema computacional, o carregamento é considerado sempre crescente.

5.3.2 - Pilar moderadamente eshelto

Na figura 5.8 apresentam-se as respostas teórica e experimental (ref. 17), de um pilar com índice de esbeltez igual a 56. Na mesma figura encontram-se indicados o sistema de carga e a seção transversal do pilar. A seção se mantém constante ao longo de todo o eixo.

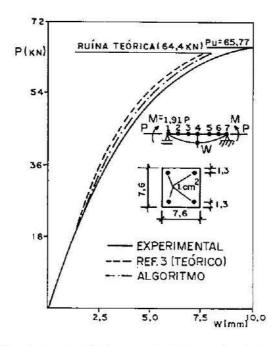


Figura 5.8 - Curvas carga-deslocamento para pilar moderadamente esbelto

A resistência à compressão do concreto, $f_{\rm C}$, é igual a 24MPa, e a tensão de escoamento do aço, $f_{\rm y}$, é igual a 316MPa. Na análise teórica adotou-se um coeficiente igual a 0,92 para levar em conta o Efeito Rüsch. Para o aço admite-se um comportamento elastoplástico perfeito e um módulo de elasticidade longitudinal igual a 21 x 10^4 MPa.

Observa-se mais uma vez a boa concordância entre a solução teórica e os resultados experimentais.

CAPÍTULO 6 ACELERAÇÃO DA CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS DE NEWTON-RAPHSON

6.1 - Introdução

No capítulo anterior apresentou-se uma formulação do método dos elementos finitos para a análise de pilares esbeltos de concreto armado. O sistema não-linear de equações foi resolvido através do método de Newton-Raphson modificado.

O grande atrativo desse método é que a matriz de rigidez da estrutura é mantida constante durante todo o processo de análise, havendo assim a necessidade de uma única triangularização da mesma, no início do processamento. Entretanto, o número de iterações necessárias à convergência pode ser muito alto, especialmente quando ocorre um patamar na resposta carga-deslocamento.

Uma outra alternativa possível consiste em se atualizar a matriz de rigidez da estrutura no início de cada etapa de carga, definindo-se uma matriz de rigidez tangente. Esta é a versão original do método de Newton-Raphson. O número de iterações necessárias para a obtenção da solução é menor que no esquema anterior. Entretanto, o tempo de processamento pode ser elevado, pois em cada etapa de carga deve-se redefinir e triangularizar a matriz de rigidez global. Essa redefinição da matriz de rigidez exige uma integração numérica ao longo dos elementos, o que em geral acarreta um alto custo computacional.

Com o objetivo de acelerar a convergência desses métodos iterativos, especialmente do método de Newton-Raphson modificado, pode-se associar aos mesmos uma extrapolação dos deslocamentos nodais no início de cada etapa de carga. Assim, uma fórmula de extrapolação é utilizada para a previsão dos deslocamentos nodais, e o esquema iterativo serve para a correção dos mesmos.

Neste capítulo é apresentado um conjunto de fórmulas de extrapolação de deslocamentos que foram desenvolvidas pelo autor (ref. 5), com as quais consegue-se reduzir sensivelmente o tempo de processamento computacional requerido pelo método de Newton-Raphson modificado. As fórmulas, de maneira geral, se aplicam na análise não-linear de estruturas de concreto armado sob carregamento monótono crescente. Os exemplos apresentados, entretanto, são restritos à análise de vigas e pilares de concreto armado, de acordo com a teoria desenvolvida no capítulo anterior.

6.2 — Os métodos de Newton-Raphson

Em análise não-linear de estruturas de concreto armado, via método dos

elementos finitos, utiliza-se, em geral, uma aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, uma vez que o mesmo se aplica a materiais inelásticos. Inicialmente a estrutura é discretizada em elementos finitos que se interligam através dos nós. Os deslocamentos nodais são tomados como incógnitas do problema, e funções de interpolação adequadas são empregadas para relacionar os deslocamentos no interior dos elementos aos deslocamentos nodais. Empregando-se as relações deformações-deslocamentos e as equações constitutivas para os materiais, o trabalho virtual interno pode ser escrito em função das incógnitas nodais, conforme visto no capítulo 5.

Considerando apenas ações nodais na estrutura, a equação de equilíbrio em nível de elemento pode ser representada na forma

$$F^{e} = F^{e}(U^{e}) , \qquad (6.1)$$

onde $\underline{\underline{F}}^e$ e $\underline{\underline{U}}^e$ são as ações e deslocamentos nodais para um elemento genérico, respectivamente.

Deve-se observar que a função dada por (6.1) é não-linear em virtude das não-linearidades nas relações deformações-deslocamentos e nas equações constitutivas.

Acoplando apropriadamente as equações de equilíbrio para todos os elementos da estrutura, chega-se a um sistema não-linear de equações na forma

$$F = F(U) \tag{6.2}$$

onde \underline{F} e \underline{U} são as ações e deslocamentos nodais da estrutura completa. A montagem e introdução das condições de contorno no sistema global de equações é feita da forma apresentada no capítulo 5.

Expandindo a função (6.2) em série de Taylor até o segundo termo, tem-se

$$\underline{F}(\underline{U} + \Delta \underline{U}) - \underline{F}(\underline{U}) = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{U}} \quad \Delta \underline{U} , \qquad (6.3)$$

ou

$$\Delta \mathbf{\tilde{F}} = \frac{\partial \mathbf{\tilde{F}}}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{\tilde{U}} , \qquad (6.4)$$

onde ΔF e ΔU são os acréscimos nas ações e deslocamentos nodais, respectivamente. A equação (6.4) pode ser escrita na forma

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_{1} \Delta \mathbf{U} \,, \tag{6.5}$$

onde K_t é a matriz de rigidez tangente da estrutura, cujo elemento genérico K_{ij} é dado por

$$K_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial U_i} \quad ; i \in j : 1 \text{ a.m.}, \tag{6.6}$$

sendo n o número total de graus de liberdade da estrutura discretizada.

A expressão (6.5) representa a fórmula de recorrência do método de Newton-Raphson que é representado simbolicamente na figura 6.1.

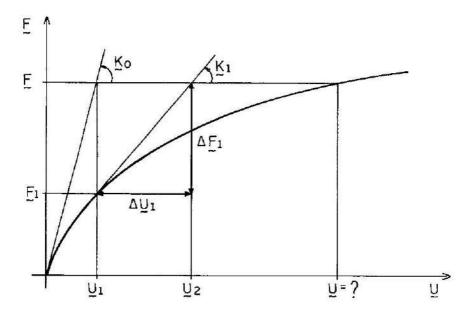


Figura 6.1 - Método de Newton-Raphson

Sendo \underline{F} o vetor das cargas nodais aplicadas à estrutura, determina-se a primeira aproximação para os deslocamentos nodais, U_1 , por

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_0 \, \mathbf{U}_1 \tag{6.7}$$

onde Ko é a matriz de rigidez tangente para a estrutura indeformada.

Com os deslocamentos \underline{U}_1 determinam-se, a partir de (6.2), as ações nodais \underline{F}_1 , considerando as não-linearidades presentes, e a seguir monta-se a nova matriz tangente, \underline{K}_1 , através da expressão (6.6).

 $oldsymbol{f O}$ incremento $\Delta oldsymbol{U_1}$ nos deslocamentos é obtido através da expressão

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{K}_1 \ \Delta \mathbf{U}_1 \ , \tag{6.8}$$

onde

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1 \tag{6.9}$$

é o vetor de desequilíbrio entre as cargas nodais e as ações não-lineares obtidas com os deslocamentos \mathbf{U}_1 .

O novo conjunto de deslocamentos é

$$U_2 = U_1 + \Delta U_1 \tag{6.10}$$

e o processo é repetido até que em uma iteração j se tenha

$$\frac{\|\Delta \mathbf{F}_{\mathbf{j}}\|}{\|\mathbf{F}\|} \leq \alpha \tag{6.11}$$

e simultaneamente

$$\frac{\|\Delta \underline{\underline{U}}_{j}\|}{\|\underline{\underline{U}}_{i}\|} \leqslant \alpha \tag{6.12}$$

onde o símbolo $\| \ \|$ representa a norma Euclidiana de vetor, e α é uma tolerância preestabelecida.

Para evitar a redefinição e triangularização da matriz de rigidez tangente, pode-se substituir a expressão (6.8) por

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{K}_0 \, \Delta \mathbf{U}_1 \,, \tag{6.13}$$

o que dá origem ao método de Newton-Raphson modificado representado em forma esquemática na figura 6.2.

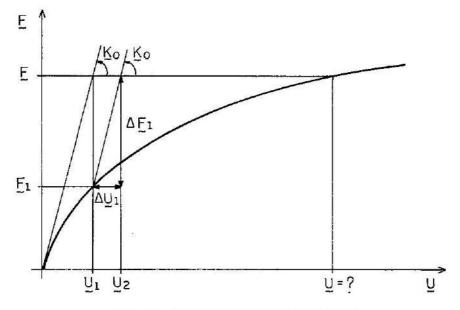


Figura 6.2 - Método de Newton-Raphson modificado

Deve-se observar que, nos dois algoritmos, os pontos intermediários não fazem parte da resposta estrutural, isto é, não se pode escrever

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{p}_1 \mathbf{F} \,, \tag{6.14}$$

sendo p_i um escalar. Assim, o único ponto pertencente à resposta estrutural é o representado pelo par (F,U), quando da convergência.

Para a obtenção da resposta completa até a ruína, deve-se associar aos métodos iterativos um procedimento incremental como se descreve. Fracionando o carregamento \underline{F} em incrementos, em uma etapa de carga n tem-se aplicada à estrutura a carga \underline{F}_n , e os deslocamentos são \underline{U}_n , bem como a rigidez tangente \underline{K}_n . Sendo \underline{F}_{n+1} a carga da etapa seguinte, pode-se escrever

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{K}_{\mathbf{\Pi}} \Delta \mathbf{U}_1 \,, \tag{6.15}$$

onde

$$\Delta \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{\mathbf{n}} + \mathbf{1} - \mathbf{F}_{\mathbf{n}} \tag{6.16}$$

é o vetor de desequilíbrio para a primeira iteração, e o processo é repetido até a convergência, como no método de Newton-Raphson.

Se a matriz \underline{K}_n é mantida constante durante toda essa etapa de carga, sendo atualizada no início da etapa seguinte, a expressão (6.15) dá a origem ao denominado método de Newton-Raphson misto, representado simbolicamente na figura 6.3.

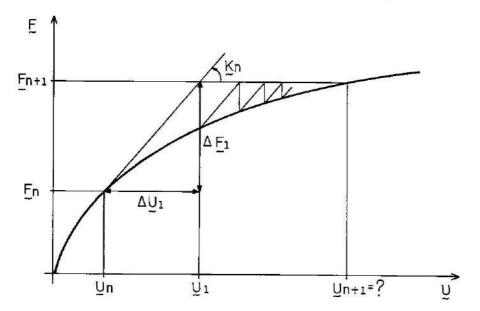


Figura 6.3 - Método de Newton-Raphson misto

Evidentemente pode-se usar o método de Newton-Raphson modificado em forma incremental, substituindo (6.15) por

$$\Delta F_1 = K_0 \Delta U_1 \tag{6.17}$$

para se obter uma resposta completa.

6.3 - A matriz de rigidez tangente

Nesta seção apresenta-se a matriz de rigidez tangente para um pilar esbelto, conforme as relações desenvolvidas no capítulo 5.

De acordo com a expressão (6.6), o elemento genérico K_{ij} da matriz tangente é dado por

$$K_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial U_i}$$
; ie j: 1 an, (6.18)

onde n é o número total de graus de liberdade da estrutura discretizada. Para um elemento finito isoladamente, n=6.

Das expressões (5.28) a (5.33), apresentadas no capítulo 5, podem-se obter os elementos da matriz por simples diferenciação.

Por exemplo, diferenciando a expressão (5.29) em relação a U2, tem-se

$$K_{22}^e = \frac{\partial F_{2n}}{\partial U_2} = \int_0^{Q} -\frac{\partial M}{\partial U_2} \phi_2^{"} dx +$$

$$+ \int_{0}^{Q} \left[\frac{\partial N}{\partial U_{2}} - (\phi_{2}^{2} U_{2} + \phi_{3}^{2} U_{3} + \phi_{5}^{2} U_{5} + \phi_{6}^{2} U_{6}) \phi_{2}^{2} + N(\phi_{2}^{2})^{2} \right] dx$$
 (6.19)

Fazendo $\frac{\partial N}{\partial U_2} = 0$, resulta

$$K_{22}^{e} = \int_{0}^{\ell} -\frac{\partial M}{\partial U_{2}} \phi_{2}^{"} dx + \int_{0}^{\ell} N(\phi_{2}^{*})^{2} dx$$
 (6.20)

Mas, por definição, tem-se

$$M = \int_{A} \sigma_{X} z dA \tag{6.21}$$

de onde

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{U}_2} = \int_{\mathbf{A}} \frac{\partial \sigma_{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{U}_2} \ \mathbf{z} \ d\mathbf{A} , \qquad (6.22)$$

ou

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{U}_2} = \int_{\mathbf{A}} \frac{\partial \sigma_{\mathbf{X}}}{\partial \in_{\mathbf{X}}} \frac{\partial \in_{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{U}_2} \mathbf{z} \, d\mathbf{A} . \tag{6.23}$$

Definindo

$$E_t = \frac{\partial \sigma_X}{\partial \in_X}$$
 = módulo tangente de deformação longitudinal,

tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{U}_2} = \int_{\mathbf{A}} \mathbf{E}_{\mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{e}_{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{U}_2} \ \mathbf{z} \, d\mathbf{A} \,. \tag{6.24}$$

A deformação longitudinal ∈_X é dada por

$$\in_{\mathbf{X}} = \mathbf{u}_{0}, \mathbf{x} - \mathbf{z}\mathbf{W}, \mathbf{x}\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{W}, \mathbf{x})^{2}$$
, (6.25)

conforme já foi apresentado na expressão (5.11).

Introduzindo as aproximações para W e uo, dadas em (5.22), tem-se

$$\in_{\mathbf{X}} = (\phi_1^{\prime} \mathbf{U}_1 + \phi_4^{\prime} \mathbf{U}_4) - \mathbf{z}(\phi_2^{\prime\prime} \mathbf{U}_2 + \phi_3^{\prime\prime} \mathbf{U}_3 + \phi_5^{\prime\prime} \mathbf{U}_5 + \phi_6^{\prime\prime} \mathbf{U}_6), \tag{6.26}$$

onde foi desprezado o termo $\frac{1}{2}$ (W, x)².

Diferenciando (6.26) em relação a U2, tem-se

$$\frac{\partial \in_{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{U}_2} = -z \, \phi_2^{"} \,, \tag{6.27}$$

que substituído em (6.24) leva a

$$\frac{\partial M}{\partial U_2} = \int_A -E_t z^2 \phi''_2 dA$$
 (6.28)

Substituindo (6.28) em (6.20), resulta

$$K_{22}^{e} = \int_{0}^{\ell} \left[\int_{A} E_{t} z^{2} dA \right] (\phi_{2}^{"})^{2} dx + \int_{0}^{\ell} N(\phi_{2}^{"})^{2} dx.$$
 (6.29)

Definindo.

$$EI = \int_A E_t z^2 dA$$
 = rigidez tangente à flexão da seção transversal,

chega-se finalmente a

$$K_{22}^{e} = \int_{0}^{\ell} EI(\phi_{2}^{"})^{2} dx + \int_{0}^{\ell} N(\phi_{2}^{'})^{2} dx$$
 (6.30)

Observa-se que as integrais acima têm que ser resolvidas numericamente, uma vez que a rigidez EI e o esforço normal N variam ao longo do eixo do elemento.

Procedendo de forma similar ao apresentado, encontram-se todos os elementos da matriz.

A matriz de rigidez tangente em nível de elemento, finalmente, pode ser escrita na forma

$$\mathbf{K}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{e}} = \mathbf{K}^{\mathbf{e}} + \mathbf{G}^{\mathbf{e}} \,, \tag{6.31}$$

onde

 \underline{K}^e = matriz de rigidez tangente da teoria de primeira ordem, para o elemento de barra;

 g^{e} = matriz de rígidez geométrica elementar.

Acoplando adequadamente as matrizes elementares, tem-se definida a matriz de rigidez tangente para a estrutura discretizada.

6.4 - Fórmulas de extrapolação

Na seção 6.2 apresentou-se o método de Newton-Raphson modificado na sua versão original, o qual pode ser associado a um processo incremental para a obtenção da resposta completa da estrutura. Como já foi salientado, o grande atrativo desse método é que é possível manter a mesma matriz de rigidez inicial durante todo o processo, evitando assim o trabalho computacional de redefinição e triangularização da matriz tangente. Entretanto, o número de iterações necessárias à convergência pode ser muito elevado, especialmente quando a não-linearidade é acentuada, o que origina um tempo de processamento excessivamente alto. Para reduzir o número de iterações e, conseqüentemente, o tempo de processamento, o método pode ser associado às fórmulas de extrapolação que serão desenvolvidas a seguir.

Sendo \tilde{F} o vetor das cargas nodais aplicadas à estrutura, define-se um vetor normalizado F_0 , tal que

$$\mathbf{F} = \mathbf{pF_0} \,, \tag{6.32}$$

onde p é um escalar.

Assim, em qualquer etapa de carga, pode-se escrever

$$U = U(p), \tag{6.33}$$

ou seja, na configuração de equilíbrio, o vetor de deslocamentos nodais pode ser expresso como função do parâmetro correspondente às cargas atuantes na estrutura.

Sendo U_n a solução obtida para a enésima etapa de carga e p_n o parâmetro de carga correspondente, o conjunto U_{n+1} para a etapa seguinte pode ser aproximado em série de Taylor, na forma

$$\underline{U}_{\mathbf{n}+1} = \underline{U}_{\mathbf{n}} + \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \mathbf{p}}\right)_{\mathbf{p}\mathbf{n}} \Delta \mathbf{p} + \underline{\mathbf{E}}^{\mathbf{x}}, \qquad (6.34)$$

onde \underline{E}^{*} é o erro de truncamento da série.

Aproximando a derivada de U com relação a p em diferenças finitas, tem-se

$$\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial p}\right)_{pn} \Delta p = \underline{U}_n - \underline{U}_{n-1}$$
 (6.35)

e substituindo (6.35) em (6.34), resulta

$$U_{n+1} = 2U_n - U_{n+1} + E_{n+1}$$
 (6.36)

onde \underline{E}_{n+1} é o erro da extrapolação para \underline{U}_{n+1} .

Se o erro E_{n+1} for desprezado, a expressão (6.36) resume-se a

$$U_{n+1} = 2U_n - U_{n-1}, (6.37)$$

que é a conhecida extrapolação linear para os deslocamentos nodais.

De forma semelhante a (6.36) pode-se escrever

$$U_{n} = 2 U_{n-1} - U_{n-2} + E_{n}, (6.38)$$

que seria a extrapolação para \underline{U}_n , de onde determina-se o erro \underline{E}_n na forma

$$E_n = U_n - 2U_{n-1} + U_{n-2}$$
 (6.39)

Se \underline{E}_{n+1} for tomado igual a \underline{E}_{n} , a expressão (6.39) pode ser substituída em (6.36), chegando-se a

$$U_{n+1} = 3U_{n-1} + U_{n-2}$$
, (6.40)

que é uma extrapolação melhorada para \underline{U}_{n+1} .

De modo análogo a (6.38) também pode-se escrever

$$U_{n-1} = 2U_{n-2} - U_{n-3} + E_{n-1}, (6.41)$$

que seria a extrapolação para U_{n-1} , e o erro E_{n-1} é dado por

$$E_{n-1} = U_{n-1} - 2U_{n-2} + U_{n-3}. (6.42)$$

Expandindo o erro global da extrapolação (6.36) em série de Taylor até o segundo termo, tem-se

$$\underline{E}_{n+1} = \underline{E}_{n} + \left(\frac{\partial \underline{E}}{\partial p}\right)_{pn} \Delta p \tag{6.43}$$

e aproximando

$$\left(\frac{\partial \underline{E}}{\partial p}\right)_{pn} \Delta p = \underline{E}_{n} - \underline{E}_{n-1}. \tag{6.44}$$

resulta

$$E_{n+1} = 2E_n - E_{n-1}. ag{6.45}$$

Substituindo (6.39) e (6.42) em (6.45), tem-se

$$E_{n+1} = 2U_n - 5U_{n-1} + 4U_{n-2} - U_{n-3}, (6.46)$$

que dá a aproximação para o erro em (6.36).

Introduzindo (6.46) em (6.36), chega-se finalmente a

$$U_{n+1} = 4U_n - 6U_{n-1} + 4U_{n-2} - U_{n-3}, \qquad (6.47)$$

que é uma terceira fórmula de extrapolação para os deslocamentos.

Obviamente esta fórmula aproxima mais a solução que a expressão (6.40), pois considera também uma extrapolação do erro de truncamento da série.

As três fórmulas desenvolvidas podem ser utilizadas no início de cada etapa de carga, para a previsão da solução, associadas ao método de Newton-Raphson modificado. Evidentemente, como o objetivo é acelerar a convergência, uma fórmula de ordem superior deve ser empregada conjuntamente com as de ordem inferior. Por exemplo, na utilização da expressão (6.47), deve-se adotar o seguinte esquema:

- primeira etapa de carga: sem extrapolação;
- segunda etapa de carga: extrapolação com equação (6.37);
- terceira etapa de carga: extrapolação com equação (6.40);
- quarta etapa de carga e etapas seguintes: extrapolação com equação (6.47).

6.5 - Exemplos

Nesta seção verifica-se a eficiência computacional do método de Newton-Raphson modificado associado às fórmulas de extrapolação desenvolvidas.

Para fins de comparação, são apresentados os resultados obtidos com os seguintes algoritmos:

- algoritmo 1 : método de Newton-Raphson misto (rigidez tangente);
- algoritmo 2 : método de Newton-Raphson modificado, sem extrapolação;
- algoritmo 3 : método de Newton-Raphson modificado, com extrapolação através da fórmula (6.37);
- algoritmo 4 : método de Newton-Raphson modificado, com extrapolação através da fórmula (6,40);
- algoritmo 5 : método de Newton-Raphson modificado, com extrapolação através da fórmula (6.47).

Nos exemplos que se seguem, são comparados o número de iterações necessárias à convergência, bem como o tempo de processamento requerido pelos cinco algoritmos.

Nas aplicações do método de Newton-Raphson misto, emprega-se a matriz de rigidez tangente, como apresentado na seção 6.3. Para a obtenção dessa matriz, é necessário efetuar uma integração numérica ao longo do eixo de cada elemento, o que é feito utilizando três pontos de integração. Nas integrações ao longo da altura das seções transversais, considera-se uma discretização das mesmas em vinte faixas de concreto.

Em todos os exemplos, o carregamento é aplicado em 10 incrementos iguais até as proximidades da ruína. A determinação das ações não-lineares de extremo de membro também é feita utilizando três pontos de integração ao longo dos elementos e 20 faixas de concreto para as seções transversais. Em todos os algoritmos, a matriz de rigidez da estrutura é armazenada em um arranjo retangular e decomposta pelo método de Cholesky.

- Não-linearidade física

Neste primeiro exemplo, comparam-se os resultados obtidos para uma viga biapoiada, submetida a duas cargas concentradas iguais e equidistantes dos apoios (ref. 32). Neste exemplo, portanto, só se considera a não-linearidade física.

No estudo realizado, o eixo da viga foi discretizado em 4, 8 e 12 elementos, o que corresponde a um total de 15, 27 e 39 graus de liberdade, respectivamente.

Nas tabelas 6.1, 6.2 e 6.3, apresenta-se o número de iterações, por etapa de carga, necessárias à convergência dos algoritmos, para as três discretizações utilizadas.

TABELA 6.1 — Número de iterações — 4 elementos

ETAPA	ALG. 1	ALG. 2	ALG. 3	ALG. 4	ALG. 5
1	20	20	20	20	20
2	3	20	11	11	11
3	3	20	11	6	6
4	4	20	11	8	8
5	4	20	11	8 .	4
6	4	21	12	9	6
7	7	21	13	10	8
8	10	22	14	11	9
9	10	19	18	13	11
10	8	26	22	19	18

TABELA 6.2 - Número de iterações - 8 elementos

ETAPA	ALG. 1	ALG. 2	ALG. 3	ALG. 4	ALG. 5
1	17	17	17	17	17
2	3	17	13	13	13
3	3	16	14	7	7
4	4	17	14	5	6
5	4	18	14	5	6
6	8	19	15	8	7
7	10	20	15	8	8
8	11	22	16	10	9
9	11	23	18	13	11
10	11	26	22	18	16

TABELA 6.3 — Número de iterações — 12 elementos

			A CONTRACTOR OF THE CONTRACTOR		
ETAPA	ALG. 1	ALG. 2	ALG. 3	ALG. 4	ALG. 5
1	16	16	16	16	16
2	3	16	14	14	14
3	4	17	14	7	7
4	4	18	14	6	5
5	9	19	14	7	6
6	10	20	15	8	7
7	11	21	16	10	8
8	12	22	16	11	9
9	12	23	18	13	11
10	13	26	22	18	16

Na tabela 6.4 apresenta-se o número total de iterações obtido nas 10 etapas de carga, e na tabela 6.5 indicam-se os tempos de processamento relativos, entre os algoritmos estudados.

TABELA 6.4 - Número total de iterações

GRAUS DE LIBERDADE	ALG. 1	ALG. 2	ALG. 3	ALG. 4	ALG. 5
15	73	209	143	115	101
27	82	195	158	104	100
39	94	198	159	110	99

TABELA 6.5 - Tempo de processamento relativo

GRAUS DE LIBERDADE	ALG. 1	ALG. 2	ALG. 3	ALG. 4	ALG. 5
15	1	2,31	1,59	1,28	1,13
27	2,19	4,31	3,49	2,30	2,22
39	3,69	6,57	5,27	3,66	3,29

Observando a tabela 6.4, verifica-se que o método de Newton-Raphson misto (algorítmo 1) é o que requer o menor número de iterações para a convergência. Entretanto, à medida que aumenta o número de graus de liberdade, sua eficiência vai se reduzindo devido ao grande esforço computacional requerido para a redefinição e triangularização da matriz de rigidez tangente. Como se observa na tabela 6.5, para 15 graus de liberdade esse método é o que exigiu o menor tempo de processamento, mas para 39 graus de liberdade os algoritmos 4 e 5 são os mais eficientes.

- Não-linearidades física e geométrica

Neste exemplo, analisa-se um pilar esbelto, com índice de esbeltez igual a 100, submetido a uma força normal excêntrica (ref. 32). Dessa maneira, consideram-se os efeitos das não-linearidades física e geométrica, simultaneamente.

No estudo realizado, o eixo do pilar foi discretizado em 5, 10 e 15 elementos, o que corresponde a um total de 18, 33 e 48 graus de liberdade, respectivamente.

Nas tabelas 6.6 e 6.7 apresentam-se o número total de iterações e o tempo de processamento relativo, obtidos com cada um dos algoritmos estudados.

TABELA 6.6 - Número total de iterações

GRAUS DE LIBERDADE	ALG. 1	ALG. 2	ALG. 3	ALG, 4	ALG. 5
18	67	202	156	120	97
33	80	227	182	148	129
48	86	228	182	149	130

TABELA 6.7 — Tempo de processamento relativo

GRAUS DE LIBERDADE	ALG. 1	ALG. 2	ALG. 3	ALG. 4	ALG. 5
18	1,00	2,52	1,94	1,50	1,22
33	2,28	5,58	4,46	3,62	3,16
48	3,62	8,38	6,65	5,44	4,75

Observando os resultados encontrados, verifica-se que neste exemplo o método de rigidez tangente é o mais eficiente. Entretanto, durante a análise surgiu um problema de instabilidade numérica, causado pela inclusão da matriz de rigidez geométrica. O problema foi contornado conservando-se a mesma rigidez tangente obtida na oitava etapa de carga, como sendo a matriz para as etapas seguintes. Com isto, conseguiu-se estabilizar o algorítmo de rigidez tangente, obtendo-se uma melhor solução. Este é um dos inconvenientes dos métodos que usam rigidez tangente, especialmente quando a não-linearidade geométrica é acentuada.

Apesar da existência de métodos mais eficientes, como os métodos quase-Newton, o emprego das fórmulas de extrapolação apresentadas é satisfatório para análise de pilares de concreto armado. Em problemas nos quais a fissuração é a principal fonte de não-linearidade, entretanto, tais fórmulas podem ser ineficientes e outros métodos devem ser usados.

CAPÍTULO 7 FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

7.1 - Introdução

Neste capítulo apresenta-se um algoritmo para análise de pilares esbeltos de concreto armado sob flexão composta oblíqua. A formulação é desenvolvida para uma seção transversal arbitrária. As integrações necessárias, ao longo das seções, são feitas com o emprego do teorema de Green.

Na análise estrutural utiliza-se a mesma formulação do método dos elementos finitos, como apresentada no capítulo 5. Por hipótese, é desprezada a torção, de maneira que cada nó da estrutura apresenta apenas cinco graus de liberdade. Assim, o que se apresenta neste capítulo é simplesmente uma ampliação do estudo feito para a flexão normal. A diferenca maior é devida à consideração de uma seção transversal de forma qualquer, o que introduz uma complexidade adicional no esquema de solução.

7.2 - Análise em nível de secão

7.2.1 — Equações de equilíbrio

Na figura 7.1 apresenta-se uma seção transversal de concreto armado na qual atua um esforço normal N, excêntrico em relação ao sistema de eixos y-z.

Com a aplicação da hipótese das seções planas, a deformação em um ponto genérico da seção transversal é dada por

$$\in_{\mathsf{X}} = \in_{\mathsf{O}} - \mathsf{y} \mathsf{X}_{\mathsf{y}} - \mathsf{z} \mathsf{X} \mathsf{z} \,, \tag{7.1}$$

onde

€₀ – deformação axial;

 X_y — curvatura no plano x—y; X_z — curvatura no plano x—z.

Na expressão (7.1), convenciona-se como sendo positivas as deformações específicas de tração.

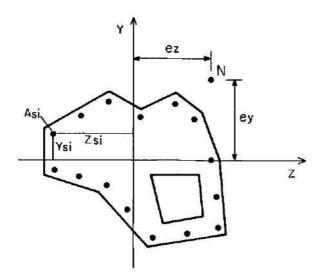


Figura 7.1 — Seção transversal de concreto armado

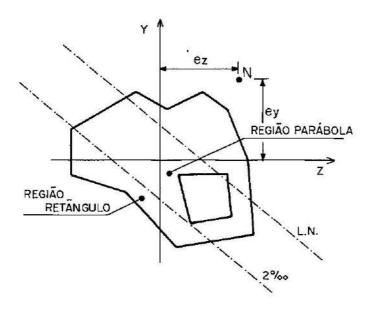


Figura 7.2 — Seção transversal de concreto, com representação das zonas com tensão no trecho parabólico e retangular.

Igualando a deformação ∈_X a zero, resulta

$$y = \frac{\epsilon_0}{x_y} - \frac{x_z}{x_y} z, \qquad (7.2)$$

que é a equação da linha neutra.

Analogamente, igualando ∈_X ao valor −0,002 chega-se a

$$y = \frac{\in_0 + 0,002}{\chi_y} - \frac{\chi_z}{\chi_y} = z,$$
 (7.3)

que é o lugar geométrico dos pontos com deformação de compressão igual a 0,002.

Sabe-se assim qual é a parte da seção transversal de concreto que corresponde à zona parabólica e à zona retangular do diagrama tensão-deformação, conforme indicado na figura 7.2.

A zona tracionada de concreto não é considerada em vista das hipóteses formuladas.

Aplicando as equações de equilíbrio da estática, vem

$$N = \int_{p} \sigma_{c} dA + \int_{r} \sigma_{c} dA + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{si} A_{si}; \qquad (7.4)$$

$$M_Z = N e_Z = \int_D \sigma_C z dA + \int_T \sigma_C z dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} z_{si} A_{si};$$
 (7.5)

$$M_y = N e_y = \int_0^\infty \sigma_c y dA + \int_0^\infty \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} y_{si} A_{si},$$
 (7.6)

onde

σ_{Si} — tensão em uma barra genérica i da armadura;

Asi — área da seção transversal de uma barra genérica i;

ysi – posição da barra relativa ao eixo z;

zsi - posição da barra relativa ao eixo y.

Nas equações anteriores, $\sigma_{\rm C}$ é a tensão de compressão em um elemento infinitesimal de concreto, e os índices p e r referem-se às zonas comprimidas, com equação parabólica e retangular, respectivamente.

Na formulação que será apresentada nas seções seguintes, a deformação axial, \in_0 , e as curvaturas, $X_{\mathbf{y}}$ e $X_{\mathbf{Z}}$, são dados do problema, sendo de interesse determinar o esforço normal \mathbf{N} e os momentos fletores $M_{\mathbf{y}}$ e $M_{\mathbf{Z}}$ associados a este estado de deformações.

O maior problema enfrentado é a avaliação das integrais contidas nas expressões (7.4), (7.5) e (7.6). A solução é obtida através do emprego do teorema de Green, como apresentado na seção seguinte. No desenvolvimento das equações (7.4) a (7.6), as integrais de superfície são repassadas para integrais ao longo do contorno das zonas respectivas. Resulta assim a necessidade de se avaliar, para cada zona, a área, os momentos estáticos, os momentos de inércia, o produto de inércia, bem como integrais de ordem superior.

7.2.2 - Teorema de Green

Conforme indicado na seção anterior, as integrações de superfície necessárias para a avaliação dos esforços internos são efetuadas com o emprego do teorema de Green.

Sejam Q e P duas funções contínuas e diferenciáveis no domínio bidimensional A . O Teorema de Green estabelece a seguinte igualdade:

$$\iint_{A} \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dzdy = \oint_{C} \left[P(z,y)dz + Q(z,y)dy \right], \tag{7.7}$$

onde o segundo termo representa a integral de linha ao longo do contorno C, como ilustrado na figura 7.3.

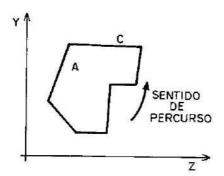


Figura 7.3 - Polígono fechado.

Além disso, se C é uma curva no plano y-z definida por

C:
$$\begin{cases} z = f(t), \\ y = g(t), \text{ com } a \le t \le b, \end{cases}$$
 (7.8)

resulta

$$\oint_{C} [P(z,y) dz + Q(z,y) dy] = \left\{ \int_{a}^{b} P[f(t), g(t)] f'(t) dt + \int_{a}^{b} Q[f(t), g(t)] g'(t) dt \right\}$$
(7.9)

o que permite avaliar o segundo termo da equação (7.7). Se o contorno C é poligonal a expressão (7.8) é a equação paramétrica de um segmento de reta, como ilustrado na figura 7.4.

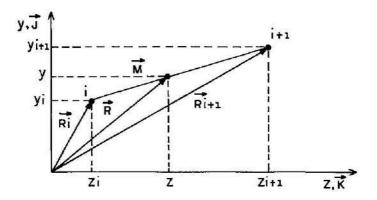


Figura 7.4 - Segmento genérico de reta.

Os vetores posição dos pontos extremos do segmento são

$$\overrightarrow{R_i} = y_i \overrightarrow{j} + z_i \overrightarrow{k} \tag{7.10}$$

$$\overrightarrow{R}_{i+1} = y_{i+1} \overrightarrow{j} + z_{i+1} \overrightarrow{k}$$

$$(7.11)$$

e o vetor M que une estes extremos é

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{R}_{i+1} - \overrightarrow{R}_{i}. \tag{7.12}$$

Definindo,

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$
 (7.13)

e

$$\Delta z_i = z_{i+1} - z_i \tag{7.14}$$

tem-se

$$\overrightarrow{M} = \Delta y_i \overrightarrow{j} + \Delta z_i \overrightarrow{k}. \tag{7.15}$$

O vetor posição de um ponto genérico do segmento (figura 7.4) é

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_i + t \overrightarrow{M}, \qquad (7.16)$$

onde t é um escalar variando de 0 a 1.

Substituindo (7.10) e (7.15) em (7.16), resulta

$$\overrightarrow{R} = (y_i + t\Delta y_i)\overrightarrow{j} + (z_i + t\Delta z_i)\overrightarrow{k},$$
 (7.17)

que é a equação paramétrica vetorial da reta.

Em termos escalares, a expressão (7.17) representa um sistema de duas equações na forma

$$\begin{cases} y = y_i + t \triangle y_i \\ z = z_i + t \triangle z_i, \quad 0 \le t \le 1, \end{cases}$$
 (7.18)

que são as equações paramétricas do segmento de reta.

7.2.3 - Obtenção das sub-regiões da seção transversal

Nesta seção apresenta-se a seqüência de passos para a obtenção dos vértices das zonas correspondentes aos trechos parabólico e retangular do diagrama tensão-deformação, necessárias para utilização do teorema de Green,

 A numeração dos vértices da seção transversal é feita no sentido anti-horário para o contorno externo. Se a seção for vazada, o contorno interno é numerado em sentido contrário, conforme figura 7.5.

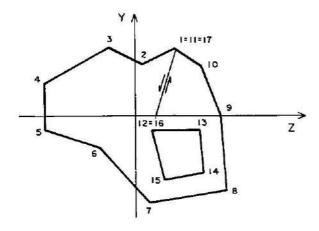


Figura 7.5 - Sentido de numeração

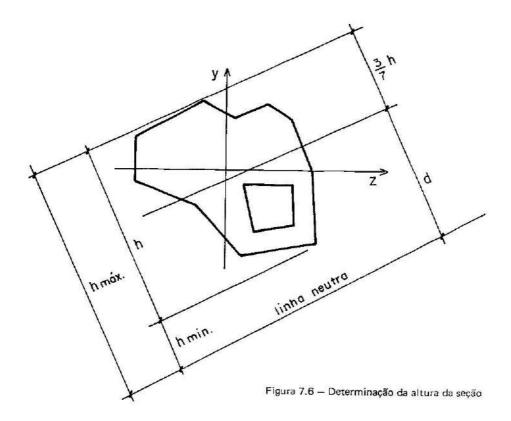
- 2. À medida que vão sendo introduzidas as coordenadas dos vértices, é gerado um vetor auxiliar V com o número de ordem dos mesmos. Este vetor é usado para a determinação dos pontos de intersecção da linha neutra e da reta com deformação 0,002 com os lados do polígono.
- Na determinação dos pontos de intersecção da linha neutra com os lados do polígono, procede-se da seguinte maneira:

- Para um dado terno (∈₀, X_y, X_z), a expressão (7.2) fornece a equação da linha neutra.
- Para cada lado do polígono, determina-se o ponto de intersecção com essa reta. Se este ponto estiver situado fora do segmento em análise, o mesmo é desprezado e procede-se de forma similar para o lado seguinte.
- Quando é encontrado um ponto de intersecção, suas coordenadas são adicionadas aos vetores de coordenadas dos vértices. No vetor V acrescenta-se o valor da média entre as posições V(i) e V(i + 1), onde i e i + 1 são os vértices inicial e final do segmento em análise.
- A seguir, os vetores em questão são reordenados em ordem crescente, em função do vetor auxiliar V.
- 4. Para a intersecção da reta de deformação 0,002 com os lados do polígono, procede-se de forma semelhante ao apresentado, utilizando a expressão (7.3). Evidentemente, trabalha-se agora com os vetores acrescidos dos pontos de intersecção já encontrados.
- 5. Determinadas todas as intersecções necessárias, podem-se separar os vértices pertencentes à zona parábólica dos pertencentes à zona retangular. Isto é feito simplesmente avaliando a deformação nos mesmos, através da expressão (7.1), e comparando-a com os limites 0 e -0,002. Geram-se assim novos vetores de coordenadas dos vértices das zonas acima em separado, juntamente com dois arranjos auxiliares do vetor y, um para cada zona. Uma nova reordenação é efetuada, em função destes arranjos auxiliares. Desta forma fica eliminada toda zona tracionada.

7.2.4 · Verificação da ruptura

Com base nos domínios de dimensionamento apresentados no capítulo 1, utiliza-se a seguinte seqüência de passos para a verificação da ruptura de uma seção transversal:

- Inicialmente calculam-se as deformações nas barras de aço. Se a deformação em uma das barras for igual ou superior a 0,010, fica caracterizada a ruptura da seção transversal.
- Se a seção estiver parcialmente comprimida, a ruptura fica constatada quando a deformação em algum vértice for menor ou igual a -0,0035.
- 3. Se a seção estiver totalmente comprimida, a ruptura fica constatada quando a deformação na fibra, situada a 3h/7 do ponto de maior compressão, for menor ou igual a -0,002. Na figura 7.6 indica-se a fibra em questão.



Inicialmente determinam-se as distâncias dos vértices da seção à linha neutra. A altura h da seção, perpendicularmente à linha neutra, é dada por

$$h = h_{m\acute{a}x} - h_{min}, \tag{7.19}$$

onde h_{máx} e h_{min} são a maior e a menor distância encontrada, respectivamente. A distância d da linha neutra à fibra em estudo é

$$d = h_{máx} - \frac{3}{7} h$$
. (7.20)

Calcula-se a curvatura total

$$X = \sqrt{X_{\mathbf{Y}}^2 + X_{\mathbf{Z}}^2} \tag{7.21}$$

A deformação €o na fibra em estudo é dada por

$$\epsilon_0 = \chi d$$
 (7.22)

e a ruptura é alcançada quando essa deformação atingir o valor -0,002.

7.3 — Teoria não-linear de flexão

7.3.1 — Relação deformação-deslocamentos

Para a obtenção dos deslocamentos no pilar, assumem-se as hipóteses das seções planas e de moderadas rotações. Na figura 7.7 apresenta-se um elemento de barra nas configurações deformada e indeformada, submetido a cargas aplicadas nos planos x—y e x—z. Admite-se também que o eixo da barra sofre um deslocamento u_0 na direção x, um deslocamento transversal W_y na direção y e um deslocamento transversal W_z na direção z.

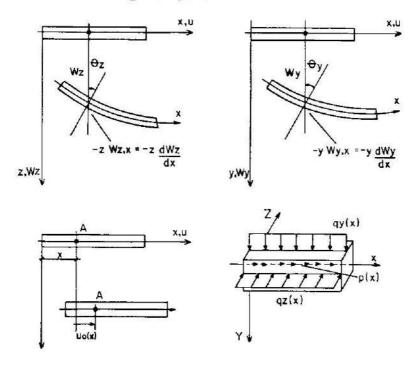


Figura 7.7 - Deslocamentos e esforços

Com o emprego da hipótese das seções planas, o deslocamento longitudinal em um ponto genérico da barra fica representado por

$$u(x,y,z) = u_0(x) - yWy, x - zWz, x,$$
 (7.23)

onde a vírgula significa derivação com relação à variável que a sucede.

Na figura 7.8 apresenta-se um segmento infinitesimal de barra com os respectivos deslocamentos.

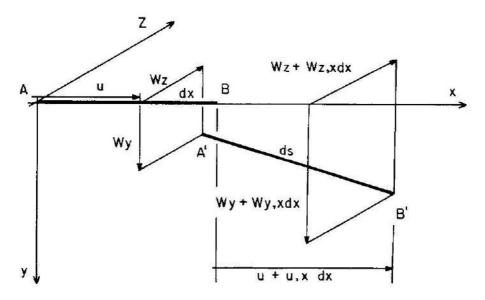


Figura 7.8 - Deslocamentos em um elemento infinitesimal

Nota-se pela figura 7.8 que as posições finais dos pontos A e B são

$$A' = \left\{ \begin{array}{c} x_a' \\ y_a' \\ z_a' \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u \\ W_y \\ W_z \end{array} \right\}; \quad B' = \left\{ \begin{array}{c} x_b' \\ y_b' \\ z_b' \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u+u, xdx + dx \\ W_y + W_y, xdx \\ W_z + W_z, xdx \end{array} \right\}$$
(7.24)

e o comprimento final do elemento será

$$ds = \sqrt{(x_b^2 - x_a^2)^2 + (y_b^2 - y_a^2)^2 + (z_b^2 - z_a^2)^2}.$$
 (7.25)

Substituindo (7.24) em (7.25) tem-se

$$ds = dx \sqrt{(1+u, x)^2 + (W_y, x)^2 + (W_z, x)^2},$$
 (7.26)

que expandida em série de Taylor leva a

$$ds = dx \left\{ 1 + u, x + \frac{1}{2} \left[(W_{y}, x)^{2} + (W_{z}, x)^{2} \right] \right\}, \qquad (7.27)$$

a qual representa o comprimento final do elemento.

A deformação longitudinal em um ponto genérico do elemento é dada por

$$\epsilon_{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{s} - \mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\mathbf{x}} \tag{7.28}$$

e substituindo (7.27) em (7.28) chega-se a

$$\in_{\mathbf{X}} = \mathbf{u}, \mathbf{x} + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}, \mathbf{x})^2 + (\mathbf{W}_{\mathbf{z}}, \mathbf{x})^2 \right] .$$
 (7.29)

Lembrando que

$$u = u_0 - yW_V, x - zW_Z, x,$$
 (7.30)

resulta finalmente

$$\in_{\mathbf{X}} = \mathbf{u_0}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \mathbf{W_y}, \mathbf{x} \mathbf{x} - \mathbf{z} \mathbf{W_z}, \mathbf{x} \mathbf{x} + \frac{1}{2} [(\mathbf{W_y}, \mathbf{x})^2 + (\mathbf{W_z}, \mathbf{x})^2]$$
 (7.31)

Definindo,

$$\in_{\mathcal{O}} = \mathbf{u}_{\mathcal{O}}, \mathbf{x} + \frac{1}{2} \left[(\mathbf{W}_{\mathbf{y}}, \mathbf{x})^2 + (\mathbf{W}_{\mathbf{z}}, \mathbf{x})^2 \right] = \text{deformação axial;}$$

$$X_y = W_y$$
, $xx = curvatura$ no plano $x - y$;

$$X_Z = W_Z$$
, xx = curvatura no plano x - z,

chega-se a

$$\in_{\mathbf{X}} = \in_{\mathbf{O}} - \mathbf{y} \mathbf{X}_{\mathbf{V}} - \mathbf{z} \mathbf{X}_{\mathbf{Z}} \,, \tag{7.32}$$

que relaciona a deformação longitudinal em um ponto genérico da barra com os deslocamentos do seu eixo.

Deve-se observar que a relação dada por (7.32) é não-linear pelo surgimento do termo não-linear na expressão da deformação axial.

7.3.2 - Princípio dos trabalhos virtuais

Considerando o campo de deslocamentos admitido anteriormente, o trabalho virtual interno δ Wint, no volume indeformado v da barra, é dado por

$$\delta \text{Wint} = \int_{\mathbf{v}} \sigma_{\mathbf{X}} \, \delta \epsilon_{\mathbf{X}} \, d_{\mathbf{v}} \tag{7.33}$$

onde $\delta \in_X$ é uma deformação virtual compatível com o campo de deslocamentos e σ_X é a tensão despertada no interior da barra. Aplicando-se a primeira variação à deformação \in_X dada por (7.31), resulta

$$\delta \in_{\mathbf{X}} = \delta \mathbf{u_0}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \delta \mathbf{W_y}, \mathbf{x} \mathbf{x} - \mathbf{z} \delta \mathbf{W_z}, \mathbf{x} \mathbf{x} + \mathbf{W_y}, \mathbf{x} \delta \mathbf{W_y}, \mathbf{x} + \mathbf{W_z}, \mathbf{x} \delta \mathbf{W_z}, \mathbf{x} . \tag{7.34}$$

O trabalho virtual interno pode, portanto, ser escrito na forma

$$\delta \text{Wint} = \int_{0}^{\varrho} \left[\delta u_{\text{O}}, x \int_{A} \sigma_{\text{X}} dA - \delta W_{\text{y}}, xx \int_{A} \sigma_{\text{X}} y dA - \delta W_{\text{z}}, xx \int_{A} \sigma_{\text{X}} z dA + W_{\text{y}}, x \delta W_{\text{y}}, x \int_{A} \sigma_{\text{X}} dA + W_{\text{z}}, x \delta W_{\text{z}}, x \int_{A} \sigma_{\text{X}} dA \right] dx, \qquad (7.35)$$

onde A e ℓ são a área da seção transversal e o comprimento da barra, respectivamente.

Definindo.

$$\begin{split} N &= \int_A \ \sigma_X \ dA \ = \text{esforco normal} \ ; \\ M_y &= \ \int_A \ \sigma_X \ y \ dA \ = \text{momento fletor em torno de } z; \\ M_z &= \ \int_A \ \sigma_X \ z \ dA \ = \text{momento fletor em torno de } y, \end{split}$$

resulta

$$\delta \text{Wint} = \int_{0}^{\ell} \left[-M_{y} \delta W_{y}, xx - M_{z} \delta W_{z}, xx + N \delta u_{0}, x + N W_{y}, x \delta W_{y}, x + N W_{z}, x \delta W_{z}, x \right] dx \qquad (7.36)$$

O trabalho virtual devido às forças externas aplicadas à barra (figura 7.7) é dado por

$$\delta Wext = \int_{0}^{\ell} [q_{y}(x)\delta W_{y} + q_{z}(x)\delta W_{z} + p(x)\delta u_{0}]dx + \sum_{i=1}^{n} F_{i}\delta U_{i}, \quad (7.37)$$

onde F_i e δU_i são forças e deslocamentos virtuais generalizados, respectivamente.

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece a condição de equilíbrio na forma

$$\delta Wext = \delta Wint \tag{7.38}$$

A equação (7.38) é a equação integral de equilibrio da barra. A solução dessa equação é obtida mediante o emprego do método dos elementos finitos como apresentado a seguir.

7.4 - Modelo de elementos finitos

Na figura 7.9 apresenta-se um elemento de barra submetido às ações nodais, onde também é indicado o sentido positivo dos deslocamentos.

Para determinar os deslocamentos em um ponto genérico do eixo do elemento em função dos deslocamentos nodais, adotam-se aproximações cúbicas e lineares para os deslocamentos transversais e longitudinais, respectivamente.

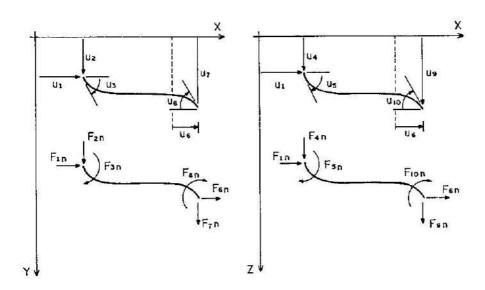


Figura 7.9 - Deslocamentos e ações nodais

introduzindo as condições de contorno nas aproximações adotadas, resulta

$$\mathbf{u_0} = \phi_1 \mathbf{U_1} + \phi_6 \mathbf{U_6} \; ; \tag{7.39}$$

$$W_{y} = \phi_{2}U_{2} + \phi_{3}U_{3} + \phi_{7}U_{7} + \phi_{8}U_{8}; \qquad (7.40)$$

$$W_Z = \phi_4 U_4 + \phi_5 U_5 + \phi_9 U_9 + \phi_{10} U_{10}, \qquad (7.41)$$

onde as ϕ_i são funções de interpolação da forma apresentada no capítulo 5. Considerando apenas as ações nodais F_{in} atuando no elemento, tem-se

$$\sum_{i=1}^{10} F_{in} \delta U_{i} = \int_{0}^{\ell} \left[-M_{y} \delta W_{y}, xx - M_{z} \delta W_{z}, xx + N \delta u_{0}, x + N (W_{y}, x \delta W_{y}, x + W_{z}, x \delta W_{z}, x) \right] d_{x}.$$
 (7.42)

Introduzindo as aproximações admitidas para o campo de deslocamentos, a equação (7.42) representa um sistema de 10 equações não-lineares na forma

$$F_{in} = \int_{0}^{\ell} N\phi_{i}^{*}d_{x}, \quad i = 1, 6;$$

$$F_{in} = \int_{0}^{\ell} -M_{y}\phi'_{i}d_{x} + \int_{0}^{\ell} NA\phi'_{i}d_{x}, i = 2,3,7,8;$$

$$F_{in} = \int_{0}^{\ell} -M_{z} \phi_{i}^{*} d_{x} + \int_{0}^{\ell} NB \phi_{i}^{*} d_{x}, \quad i = 4,5,9,10;$$
(7.43)

onde

$$A = \phi_2^2 U_2 + \phi_3^2 U_3 + \phi_7^2 U_7 + \phi_8^2 U_8$$

$$B = \phi_4^2 U_4 + \phi_5^2 U_5 + \phi_9^2 U_9 + \phi_{10}^2 U_{10}.$$
(7.44)

Linearizando as equações, chega-se a

$$\underline{F}^{e} = \underline{K}^{e} \underline{U}^{e} , \qquad (7.45)$$

onde

 F^e = vetor com as ações nodais (10 x 1);

 K^e = matriz de rigidez elementar (10 x 10);

 \underline{U}^{e} = vetor com deslocamentos nodais (10 x 1).

Acopiando as equações em nível de elemento, como descrito no capítulo 5, chega-se a um sistema global de equações lineares, na forma

$$\mathbf{\tilde{E}} = \mathbf{\tilde{K}} \ \mathbf{\tilde{U}} \,, \tag{7.46}$$

que é utilizado no esquema iterativo.

A solução do sistema não-linear de equações é obtida através do emprego do método de Newton-Raphson modificado como descrito no capítulo 5. Para acelerar a convergência do método, pode-se empregar as fórmulas de extrapolação desenvolvidas no capítulo 6.

7.5 - Exemplos

Nesta seção apresentam-se dois exemplos, onde se comparam as soluções numéricas obtidas com o algoritmo apresentado, com resultados experimentais e teóricos de outros autores.

Nos dois exemplos, a solução foi encontrada utilizando-se dez etapas de carga para a obtenção da resposta estrutural até a ruína. Para a integração ao longo do eixo dos elementos, foram utilizados três pontos de integração de Gauss. Os exemplos referem-se a pilares de seção transversal constante.

Exemplo 1 — Seção retangular

Na figura 7.10 é apresentado um pilar com seção transversal retangular, submetido a flexocompressão oblíqua. As propriedades dos materiais são $f_c^* = 25,4$ MPa; $f_v = 453,3$ MPa; $E_s = 210000$ MPa.

Na mesma figura îndica-se a discretização usada na análise, bem como as curvas carga-deslocamento transversal na seção central.

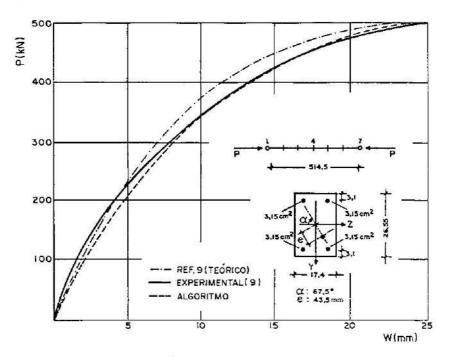


Figura 7.10 - Curvas carga-deslocamento

Exemplo 2 - Seção em L

Comparam-se aqui os resultados obtidos com o algoritmo com os determinados teoricamente na ref. 9, para um pilar de seção transversal em L

submetido a flexocompressão oblíqua. As propriedades dos materiais são as seguintes: $f_{\rm C}^*$ = 25,4MPa; $f_{\rm Y}$ = 453,3MPa; $E_{\rm S}$ = 210000MPa.

A discretização utilizada e o ponto de aplicação da carga encontram-se assinalados na figura 7.11, onde se comparam as respostas carga-deslocamento transversal na seção central do pilar.

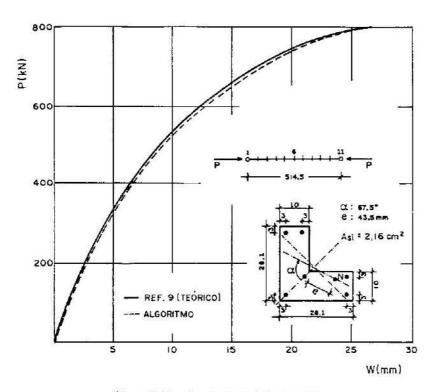


Figura 7.11 — Curvas carga-deslocamento

APÊNDICE RELAÇÕES MOMENTO FLETOR-ESFORÇO NORMAL-CURVATURA PARA SECÕES RETANGULARES

A.1 - Resultante das tensões de compressão no concreto

A seção de concreto armado considerada é a mostrada na figura A.1.1, onde a armadura se distribui simetricamente em torno do perímetro da seção. Os parâmetros geométricos caracterizadores da mesma encontram-se evidenciados na figura.

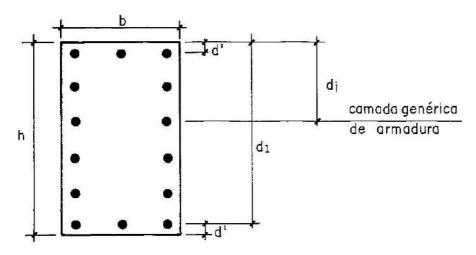


Figura A.1.1 -- Seção transversal retangular maciça

Com a aplicação de um momento fletor associado a um esforço normal, a distribuição de deformações na seção é a linear da figura A.1.2, onde \in_{O} é a deformação correspondente ao início do trecho retangular do diagrama tensão-deformação do concreto.

O diagrama tensão-deformação adotado para o concreto é o da figura A.1.3, onde f_{C} será tomado igual a f_{Cd} ou f_{Ck} , dependendo se trata-se da verificação da ruptura ou do cálculo de deslocamentos através das relações M-N-X.

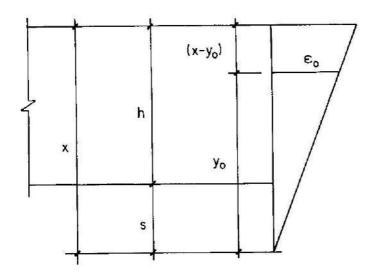


Figura A.1.2 — Distribuição de deformações na seção transversal

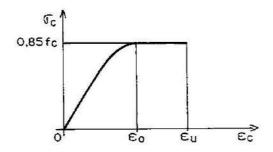


Figura A.1.3 - Diagrama tensão-deformação do concreto em compressão

As deformações $\in_{\mathcal{O}}$ e $\in_{\mathcal{U}}$ são dadas por (A.1.1) e (A.1.2), onde φ é o valor do coeficiente de fluência num instante t genérico.

$$\epsilon_0 = 0,002 (1 + \varphi)$$
. (A.1.1)

$$\epsilon_n = 0.0035 (1 + \varphi)$$
. (A.1.2)

A equação do trecho parabólico do diagrama é dada por

$$\sigma_{\rm c} = 0.85 \ f_{\rm c} [A \in ^2_{\rm C} + B \in _{\rm C}],$$
 (A.1.3)

onde

$$A = \frac{-250000}{(1+\varphi)^2}$$
 (A.1.4)

e

$$B = \frac{1000}{(1+\varphi)}$$
 (A.1.5)

A deformação $\in_{\mathbb{C}}$ em uma fibra situada a uma distância y da linha neutra é dada por (A.1.6), onde $\in_{\mathbb{C}S}$ é a deformação específica de retração num instante t genérico e X é a curvatura da seção.

$$\in_{\mathbf{C}} = \chi_{\mathbf{y}} - \in_{\mathbf{CS}} \tag{A.1.6}$$

Igualando (A.1.6) ao valor de \subseteq_0 dado por (A.1.1), resulta

$$y_0 = \frac{0,002(1+\varphi) + \in_{cs}}{\chi}$$
, (A.1.7)

como ilustrado na figura A.1.2,

Define-se

$$\phi = \chi \, \mathbf{d}_1; \tag{A.1.8}$$

$$\xi = \frac{x}{d_1} \quad ; \tag{A.1.9}$$

$$a = \frac{d^2}{d_1}$$
 ; (A.1.10)

$$\alpha = \frac{0,002(1+\varphi) + \in_{CS}}{\phi}$$
; (A.1.11)

$$\gamma = \xi - 1 - a \tag{A.1.12}$$

Substituindo (A.1.8) e (A.1.11) em (A.1.7) resulta

$$y_0 = \alpha d_1 \tag{A.1.13}$$

A distância s na figura A.1.2 é dada por

$$s = x - h$$
. (A.1.14)

Observando pela figura A.1.1 que

$$h = d_1 + d'$$
 (A.1.15)

e introduzindo (A.1.9), (A.1.10) e (A.1.12), resulta para s a expressão

$$s = \gamma d_1 \tag{A.1.16}$$

A distribuição das tensões de compressão na seção de concreto é mostrada na figura A.1.4.

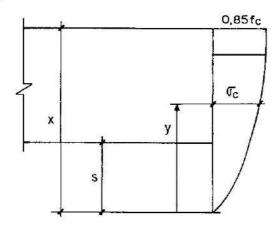


Figura A.1.4 — Tensões de compressão na seção de concreto

A tensão numa fibra genérica da seção será, conforme a mesma se encontre no trecho parabólico ou no trecho retangular, dada por (A.1.17) ou (A.1.18) respectivamente, onde em (A.1.17) já se substituiu a expressão (A.1.6) para a deformação $\subseteq_{\mathbb{C}}$.

$$a_{\rm C} = 0.85 \, f_{\rm C} [A(Xy - \in_{\rm CS})^2 + B(Xy - \in_{\rm CS}]$$
 (A.1.17)

$$\sigma_{\rm C} = 0.85 \, \rm f_{\rm C}$$
 (A.1.18)

A resultante de tensões no concreto é dada pela integral

$$R_{cc} = \int_{s}^{x} b \sigma_{c} dy, \qquad (A.1.19)$$

ou, o que é equivalente, por

$$R_{cc} = \int_{s}^{y_0} b \sigma_c d_y + \int_{v_0}^{x} b \sigma_c d_y$$
 (A.1.20)

Resolvendo as integrais e fazendo todas as substituições necessárias, resulta

$$R_{CC} = R_{CCX} + R_{CCS}, \qquad (A.1.21)$$

onde

$$R_{CC\chi} = \left[\frac{A\phi^2}{3} (\alpha^3 - \gamma^3) + \frac{B\phi}{2} (\alpha^2 - \gamma^2) + \xi - \alpha \right] bd_1 \ 0.85 \ f_C \ (A.1.22)$$

$$R_{CCS} = \left\{ A \left[\in_{CS}^{2} (\alpha - \gamma) - \phi \in_{CS} (\alpha^{2} - \gamma^{2}) \right] - B \in_{CS} (\alpha - \gamma) \right\} bd_{1} \quad 0.85f_{C} \quad (A.1.23)$$

De um modo geral, pode-se escrever

$$R_{cc} = K_c \, bd_1 \, 0.85 f_c \,,$$
 (A.1.24)

onde Kc é um adimensional.

As equações (A.1.22) e (A.1.23) foram deduzidas admitindo que toda a seção estava comprimida e, além disto, que a distribuição de tensões na seção apresentava um trecho parabólico e um trecho retangular. Como outros casos podem ocorrer, no programa de computador devem ser feitas as seguintes alterações:

 $1-{\rm Se}~\gamma<0$, significando que só parte da seção está comprimida, deve-se fazer $\gamma=0.$

 $2 - \text{Se } \xi < \alpha$, significando que o trecho retangular inexiste, deve-se fazer $\alpha = \xi$, pois o trecho parabólico estende-se até o topo da secão.

Na figura A.1.5 apresenta-se a resultante de compressão no concreto $R_{\rm CC}$, posicionada a uma distância z da borda menos comprimida e a uma distância $y_{\rm C}$ da linha neutra.

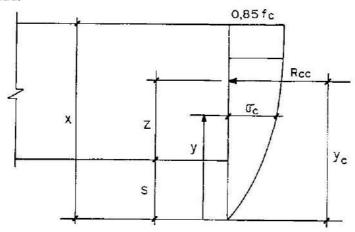


Figura A.1.5 — Posição da resultante de compressão no concreto

De acordo com a figura A.1.5, pode-se escrever

$$R_{CC} y_C = \int_S^X b \sigma_C y dy$$
 (A.1.25)

Resolvendo a integral com as devidas substituições e introduzindo (A.1.24), resulta

$$y_c = (y_{cX} + y_{cS}) d_1$$
, (A.1.26)

onde

$$y_{\rm c\chi} = \frac{1}{K_{\rm c}} \left[\frac{A\phi^2}{4} (\alpha^4 - \gamma^4) + \frac{B\phi}{3} (\alpha^3 - \gamma^3) + \frac{\xi^2 - \alpha^2}{2} \right]$$
 (A.1.27)

$$y_{\text{CS}} = \frac{1}{K_{\text{C}}} \left\{ A \left[\frac{\in_{\text{CS}}^{2}}{2} (\alpha^{2} - \gamma^{2}) - \frac{2\phi \in_{\text{CS}}}{3} (\alpha^{3} - \gamma^{3}) \right] - \frac{B \in_{\text{CS}}}{2} (\alpha^{2} - \gamma^{2}) \right\}$$
(A.1.28)

De um modo geral, pode-se escrever

$$y_c = K_0 d_1$$
 (A.1.29)

onde Ko é um adimensional.

Observando pela figura A.1.5 que

$$z = y_C - s \tag{A.1.30}$$

e substituindo (A.1.16) em (A.1.30), resulta

$$z = K_{c1} d_1$$
 (A.1.31)

onde

$$K_{C1} = K_{O} - \gamma$$
. (A.1.32)

Pelos motivos já expostos, no programa de computador devem ser observadas as seguintes situações:

 $1 - \text{Se } \gamma \le 0$, deve-se fazer $\gamma = 0$ nas equações (A.1.27) e (A.1.28).

 $2 - \text{Se } \xi < \alpha$, deve-se fazer $\alpha = \xi$ nas equações (A.1.27) e (A.1.28).

A.2 - Relações momento fletor-esforço normal-curvatura

Se A_{si} é a área da seção transversal de armadura existente na camada genérica i da figura A.1.1., define-se a taxa geométrica ρ_i de armadura por

$$\rho_{i} = \frac{A_{si}}{bd_{1}} \tag{A.2.1}$$

Analogamente, sendo $A_{\rm S}$ a área total de aço na seção, define-se a taxa geométrica ho como

$$\rho = \frac{A_S}{bd_1} \tag{A.2.2}$$

Se todas as barras são do mesmo diâmetro e n_i é o número de barras da camada i e n' é o número total de barras, é fácil verificar que

$$\rho_{\hat{\mathbf{i}}} = \frac{\mathbf{n}_{\hat{\mathbf{i}}}}{\mathbf{n}'} \rho \tag{A.2.3}$$

Define-se ainda a taxa mecânica ω de armadura, como sendo

$$\omega = \frac{\rho}{2} \frac{f_{yd}}{f_{cd}}$$
 (A.2.4)

Para os esforços solicitantes define-se o esforço normal reduzido ν por (A.2.5), e o momento fletor reduzido μ por (A.2.6)

$$\nu = \frac{Nd}{bd_1 \ 0.85f_{cd}} \tag{A.2.5}$$

$$\mu = \frac{Md}{bd_1^2 \ 0.85 f_{cd}}$$
 (A.2.6)

As equações de equilíbrio são dadas por

$$N_{d} - R_{cc}(x, x) - \sum_{i=1}^{n} A_{si} \sigma_{si}(x, x) = 0$$
 (A.2.7)

$$M_{d} = R_{cc}(x, x) z(x, x) + \sum_{i=1}^{n} A_{si}(h - d_{i}) \sigma_{si}(x, x) - N_{d} C_{2}$$
 (A.2.8)

onde n é o número de camadas de armadura.

Uma vez que as relações M-N-X são utilizadas para o cálculo dos deslocamentos do pilar, a resistência adotada para o concreto deve ser a característica e, como visto anteriormente, pode-se escrever

$$R_{cc} = K_c \, bd_1 \, 0.85 \, f_{ck} \, ;$$
 (A.2.9)

$$z = K_{C1} d_1$$
 (A.2.10)

Substituindo (A.2.1), (A.2.5) e (A.2.9) em (A.2.7), resulta

$$0.85 \ \nu f_{cd} - 0.85 \ K_c \ f_{ck} - \sum_{i=1}^{n} \rho_i \ \sigma_{Si} = 0$$
 (A.2.11)

Lembrando que f_{ck} = 1,4 f_{cd} , e susbtituindo (A.2.3) e (A.2.4) em (A.2.11), resulta finalmente

$$0.85 \nu - 1.19 \text{ K}_{c} - \frac{2\omega}{n^{5} \text{ fyd}} \sum_{i=1}^{n} n_{i} \sigma_{si} = 0$$
 (A.2.12)

Define-se

$$\beta_{\hat{\mathbf{i}}} = \frac{\mathbf{d}_{\hat{\mathbf{i}}}}{\mathbf{d}_{1}} \tag{A.2.13}$$

Procedendo de forma análoga, pode-se expressar a equação (A.2.8) na forma adimensional (A.2.14), lembrando que, para esta seção, C_2 = 0,5h.

$$\mu = 1.4 K_C K_{C1} + \frac{2\omega}{0.85 \text{ n' fyd}} \sum_{i=1}^{n} n_i (1 + a - \beta_i) \sigma_{Si} - 0.5 (1 + a) \nu \quad (A.2.14)$$

Nas expressões (A.2.12) e (A.2.14) os coeficientes K_C e K_{C1} dependem de ξ e ϕ , como já demonstrado. A tensão σ_{S1} nas barras da camada i também dependem de ξ e ϕ . De fato, pela equação (2.5) do capítulo 2, verifica-se que a deformação na camada i é dada por (A.2.15), já feitas as substituições necessárias.

$$\epsilon_{\rm gi} = \phi(\xi - \beta_{\rm i}) \tag{A.2.15}$$

Como a deformação é função de ϕ e ξ , a tensão correspondente também será. Obtém-se assim uma relação momento fletor-esforço normal-curvatura adimensional, na forma $\mu-\nu-\phi$.

Para a determinação de β_i , recorre-se à figura A.2.1, onde admite-se que as barras estão igualmente espaçadas na vertical.

Pela figura é fácil concluir que

$$S_{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{d}_{\mathbf{i}} \rightarrow \mathbf{d}'}{\mathbf{n} - \mathbf{i}}, \tag{A.2.16}$$

onde, de acordo com a notação, n é o número de camadas de armadura. Também verifíca-se que

$$d_i = d' + (n-i) S_V$$
 (A.2.17)

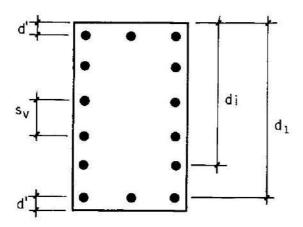


Figura A.2.1 - Seção com barras igualmente espaçadas

Substituindo (A.2.16) em (A.2.17), resulta

$$d_i = d' + \frac{(n-i)}{(n-1)}(d_1 - d')$$
 (A.2.18)

Dividindo (A.2.18) por \mathfrak{d}_1 e introduzindo (A.1.10) e (A.2.13), resulta finalmente

$$\beta_i = a + \frac{(n-i)}{(n-1)}(1-a)$$
 (A.2.19)

A.3 — Determinação da ruptura da seção

A determinação do momento fletor de ruptura da seção é baseada nos domínios de dimensionamento da figura 2.21 do capítulo 2. Para isto trabalha-se com as resistências minoradas dos materiais, ou seja, com $f_{\rm Cd}$ e $f_{\rm yd}$ para o concreto e para o aço , respectivamente. De acordo com estes domínios, verifica-se que, conhecida a posição x da linha neutra da seção, a curvatura X da mesma pode ser escrita em função de x. A expressão de X varia conforme o domínio em que se situa, devendo-se distinguir três casos.

a) Domínio 2

É fácil ver pela figura 2.21 que, neste domínio, x tem a variação dada por (A.3.1), onde φ é o valor do coeficiente de fluência no instante em consideração.

$$0 \le x \le \left[\frac{3,5(1+\varphi)}{10+3,5(1+\varphi)} \right] d_1 \tag{A.3.1}$$

Introduzindo (A.1.9), resulta para este domínio

$$0 \le \xi \le \frac{3,5(1+\varphi)}{10+3,5(1+\varphi)} \tag{A.3.2}$$

A curvatura X é dada em função de x por (A.3.3), ou em forma adimensional, por (A.3.4).

$$X = \frac{0,010}{d_1 - x} \; ; \tag{A.3.3}$$

$$\phi = \frac{0.010}{1 - \xi} \quad . \tag{A.3.4}$$

b) Domínios 3, 4 e 4a

Neste caso as variações de x e ξ são dadas por (A.3.5) e (A.3.6) e as curvaturas X e ϕ por (A.3.7) e (A.3.8).

$$\left[\frac{3,5(1+\varphi)}{10+3,5(1+\varphi)}\right] d_1 < x \le h;$$
(A.3.5)

$$\frac{3.5(1+\varphi)}{10+3.5(1+\varphi)} < \xi \le 1+a;$$
 (A.3.6)

$$X = \frac{0,0035(1+9)}{x}$$
 ; (A.3.7)

$$\phi = \frac{0,0035(1+\varphi)}{\xi} \quad ; \tag{A.3.8}$$

c) Domínio 5

Neste domínio, as expressões em estudo são dadas por (A.3.9) a (A.3.12).

$$h < x < \infty$$
; (A.3.9)

$$(1+a)<\xi<\infty; \tag{A.3.10}$$

$$\chi = \frac{0,002(1+\varphi)}{x-\frac{3}{7}h}$$
 (A.3.11)

$$\phi = \frac{0,002(1+\varphi)}{\xi - \frac{3}{7}(1+a)}$$
 (A.3.12)

Para a determinação do momento de ruptura, utiliza-se o processo da bissecante. A equação (A.2.7) em forma adimensional é função apenas de ξ , uma vez que ϕ é conhecida para cada valor de ξ . Utiliza-se o processo da bissecante para encontrar ξ , no intervalo $[0,\infty)$. Caso não exista a raiz de (A.2.7), significa que a seção não resiste ao esforço normal aplicado. Encontrado ξ , a equação (A.2.8) em forma adimensional fornece diretamente o momento de ruptura $\mu_{\mathbf{U}}$ da seção.

		8

ANEXO

TABELAS PARA DIMENSIONAMENTO DE PILARES DE CONCRETO ARMADO

As tabelas apresentadas neste anexo destinam-se ao dimensionamento de pilares de concreto armado com geometría e carregamento da figura AN.1. A seção transversal do pilar se mantém constante ao longo do seu eixo, inclusive a armadura. As tabelas foram preparadas com o algoritmo alternativo apresentado no capítulo 3.

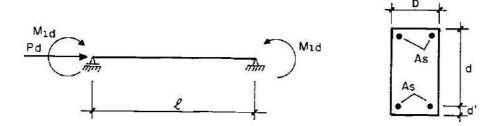


Figura AN.1 - Geometria e carregamento do pilar

Para a utilização das tabelas, deve-se entrar com os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\beta = \frac{\ell}{d} \qquad - \text{relação de esbeltez do pilar:}$$

$$a = \frac{d'}{d} \qquad - \text{parâmetro geométrico da seção;}$$

$$\sigma = \frac{P_d}{0.85 \text{ bd } f_{cd}} \qquad - \text{esforço normal reduzido;}$$

$$\mu = \frac{M_1 d}{0.85 \text{ bd}^2 f_{cd}} \qquad - \text{momento fletor reduzido de primeira ordem.}$$

As tabelas fornecem o valor de ω , com o qual se calcula a seção de armadura $A_{\rm S}$ por

$$A_S = \omega \text{ bd } \frac{f_{cd}}{f_{yd}}$$

Todas as tabelas foram preparadas para cargas de curta duração, φ = 0 e $\in_{\rm CS}$ = 0. O aço utilizado é o CA50B.

SEÇÃO RETANGULAR $\beta = 15$ $a = 0.05$ ϕ 0,60 0,70 0,80 0,90 1,10 1,12 1,30 1,46 0,93 0,97 1,01 1,06 1,10 1,14 1,18 1,23 1,28 0,93 0,97 1,01 1,06 1,10 1,14 1,18 1,23 1,28 0,93 0,97 0,96 0,99 1,04 1,09 1,13 1,18 0,73 0,77 0,81 0,96 0,99 1,04 1,09 1,13 1,18 0,63 0,77 0,81 0,96 0,99 1,04 1,09 1,13 1,18 0,73 0,77 0,81 0,96 0,99 1,04 1,09 1,18 1,18 1,18 1,18 1,18 1,18 1,18 1,18 1,18 1,28 1,28 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99 0,99	FLEXOCOMPRESSÃO NORMAI	7	e P			ARI	ARMADURA SIMÉTRICA	A SIM	ETRIC/	_	
$\beta = 15$ $0,80$ $0,90$ $1,00$ $1,101$ $1,01$ $1,01$ $1,06$ $0,91$ $0,96$ $0,99$ $1,04$ $1,14$ $1,18$ $1,23$ $1,13$ $1,03$ $1,04$ $0,96$ $0,94$ $0,99$ $1,03$ $1,03$ $1,03$ $1,03$ $0,71$ $0,75$ $0,89$ $0,94$ $0,99$ $1,03$ $1,03$ $1,03$ $0,51$ $0,59$ $0,69$ $0,74$ $0,40$ $0,44$ $0,48$ $0,51$ $0,60$ $0,70$ $0,40$	S	S	EÇÃO I	RETANG	BULAR						1001001
0,80 0,90 1,00 1,10 1,20 1,30 1,01 1,01 1,06 1,10 1,14 1,18 1,23 0,91 0,96 0,99 1,04 1,09 1,13 0,71 0,75 0,79 0,84 0,88 0,92 0,61 0,61 0,65 0,69 0,74 0,77 0,82 0,51 0,54 0,44 0,48 0,51 0,56 0,59 0,17 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,17 0,21 0,26	VALORES DE ω AÇO CA 50		æ	_	3 = 15		tl res	90'0		<i>⊕</i>	0
1,01 1,06 1,10 1,14 1,18 1,23 0,91 0,96 0,99 1,04 1,09 1,13 0,81 0,86 0,89 0,94 0,99 1,03 0,71 0,75 0,79 0,84 0,88 0,92 0,61 0,65 0,69 0,74 0,77 0,82 0,51 0,54 0,59 0,67 0,71 0,40 0,44 0,48 0,51 0,56 0,59 0,29 0,33 0,36 0,40 0,44 0,49 0,17 0,21 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,17 0,21 0,26	0,20 0,30 0,40 0,50		0 09'0				1	1,20	1,30	1,40	1,50
0,91 0,96 0,99 1,04 1,09 1,13 0,81 0,86 0,89 0,94 0,99 1,03 0,71 0,75 0,79 0,84 0,88 0,92 0,61 0,65 0,69 0,74 0,77 0,82 0,51 0,54 0,59 0,67 0,71 0,40 0,44 0,48 0,51 0,56 0,59 0,29 0,33 0,36 0,40 0,44 0,49 0,17 0,21 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,33 0,37	06'0 48'0 98'0 98'0		0,93				1,14	1,18	1,23	1,28	1,33
0,81 0,86 0,89 0,94 0,99 1,03 0,71 0,75 0,79 0,84 0,88 0,92 0,61 0,65 0,69 0,74 0,77 0,82 0,51 0,54 0,59 0,67 0,71 0,71 0,40 0,44 0,48 0,51 0,56 0,59 0,29 0,33 0,36 0,40 0,44 0,49 0,17 0,21 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,21 0,21 0,21	0,77 0,75 0,77 0,80		0,83	10000			1,04	1,09	1,13	1,18	1,23
0,71 0,75 0,79 0,84 0,88 0,92 0,61 0,65 0,69 0,74 0,77 0,82 0,51 0,54 0,59 0,63 0,67 0,71 0,40 0,44 0,48 0,51 0,56 0,59 0,29 0,33 0,36 0,40 0,44 0,49 0,17 0,21 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,17 0,21 0,26	0,68 0,66 0,68 0,71	_	0,73 0	1000			0,94	66'0	1,03	1,08	1,11
0,61 0,65 0,69 0,74 0,77 0,82 0,51 0,54 0,59 0,63 0,67 0,71 0,40 0,44 0,48 0,51 0,56 0,59 0,29 0,33 0,36 0,40 0,44 0,49 0,17 0,21 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,17 0,21 0,26	0,58 0,57 0,59 0,61		0,63	#EEE			0,84	0,88	0,92	0,97	1,01
0,51 0,54 0,59 0,63 0,67 0,71 0,40 0,44 0,48 0,51 0,56 0,59 0,29 0,33 0,36 0,40 0,44 0,49 0,17 0,21 0,24 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,17 0,21 0,26	0,49 0,48 0,49 0,51		0,54 0	(10%)			0,74	0,77	0,82	0,85	06'0
0,40 0,44 0,48 0,51 0,56 0,59 0,29 0,33 0,36 0,40 0,44 0,49 0,17 0,21 0,24 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,17 0,21 0,26	0,40 0,39 0,39 0,41		0,43 0	6			0,63	0,67	0,71	0,75	08'0
0,29 0,33 0,36 0,40 0,44 0,49 0,17 0,21 0,24 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,17 0,21 0,26	0,31 0,30 0,30 0,31		0,33 0				0,51	0,56	0,59	0,64	89'0
0,17 0,21 0,24 0,29 0,33 0,37 0,04 0,08 0,12 0,17 0,21 0,26	0,22 0,20 0,20 0,21		0,23 0				0,40	0,44	0,49	0,53	0,57
0,04 0,08 0,12 0,17 0,21 0,26	0,13 0,11 0,10 0,11		0,12 0				0,29	0,33	0,37	0,41	0,46
	0,03 0,01 0,00 0,00		0,00				0,17	0,21	0,26	06,0	0,35

VAI										Ĩ	Aniwabura sime i Mica	5			
VAI						SEÇÃ	O RET,	SEÇÃO RETANGULAR	AR.						
	LORE	VALORES DE ω	_	ΑÇO	AÇO CA 50	B		B == 84	= 15		П	a = 0,10		0 = ø	0
T Z	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	09'0	0,70	0,80	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,93	06'0	06'0	0,93	96'0	66'0	1,02	1,07	1,1	1,16	1,21	1,24	1,29	1,34	1,39
06'0	0,83	0,81	0,80	0,82	0,85	68'0	0,92	96'0	1,01	1,06	1,09	1,14	1,19	1,24	1,29
08'0	0,73	0,71	0,70	0,72	0,75	71,0	0,81	0,85	06'0	0,94	96'0	1,03	1,07	1,12	1,16
0,70	69'0	0,61	09'0	0,62	0,65	0,67	0,70	0,75	82'0	0,83	0,87	0,92	0,97	1,00	1,05
09'0	0,54	0,51	0,51	0,52	0,54	0,56	0,60	0,64	89'0	0,72	0,76	0,80	0,85	0,89	0,93
0,50	0,44	0,42	0,41	0,41	0,43	0,46	0,49	0,53	99'0	0,61	0,64	0,69	0,73	71,0	0,82
0,40	0,35	0,32	0,31	0,31	0,32	0,34	0,38	0,41	0,45	0,49	0,52	0,57	09'0	0,65	69'0
02'0	0,25	0,23	0,21	0,21	0,21	0,23	0,26	0,29	0,33	96'0	0,40	0,44	0,48	0,53	0,57
0,20	0,15	0,13	0,11	0,10	0,10	0,11	0,13	0,16	0,19	0,23	0,27	0,32	96'0	0,40	0,45
0,10	90'0	0,03	00'0	00'0	00'0	00'0	00'0	0,02	90'0	0,10	0,14	0,19	0,24	0,29	0,33

VALORES DE ω VALORES DE ω 0,10 0,20 1,00 0,98 0,96 0,90 0,87 0,86 0,80 0,77 0,75	DE ε													
- ⁻ / 8, 8, 8	DE ω				SEÇĀ() RETA	SEÇÃO RETANGULAR	AR						
0,10 00,00 00,98 0,90 0,87 77,0			AÇO	CA 50	6 0		= θ	15		ب اا	a = 0,15		<i>9</i> =0	_
WHAT	0,20	0,30	0,40	0,50	09'0	0,70	0,80	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
CUES WARE	96'0	76'0	66'0	1,02	1,06	1,10	1,13	1,18	1,23	1,28	1,33	1,36	1,41	1,46
\$28K	98′0	0,86	0,88	0,91	0,95	0,97	1,02	1,07	1,12	1,17	1,20	1,25	1,30	1,34
	0,75	0,76	71,0	08'0	0,83	98'0	06'0	0,95	1,00	1,03	1,09	1,13	1,18	1,23
29'0 02'0	99'0	0,64	99'0	89'0	0,71	0,74	0,79	0,84	0,87	0,92	96'0	1,01	1,06	1,09
99'0 09'0	0,54	0,53	0,55	0,57	69'0	0,63	0,67	0,71	9/'0	0,79	0,84	88'0	0,93	0,98
0,50 0,46	0,44	0,43	0,44	0,46	0,48	0,51	0,55	0,59	0,63	0,67	0,71	92'0	62'0	0,84
0,40 0,36	0,34	0,32	0,32	0,34	0,35	0,39	0,42	0,46	0,50	0,53	0,58	0,63	99'0	0,71
0,30 0,26	0,23	0,22	0,21	0,22	0,23	0,26	0,29	0,33	0,36	0,40	0,44	0,48	0,53	0,57
0,20 0,16	0,13	0,11	0,10	60'0	0,10	0,12	0,15	0,18	0,22	0,26	0,31	0,35	0,39	0,44
0,10 0,06	0,03	00'0	00'0	00'0	00'0	00'00	00'0	0,03	0,07	0,12	0,17	0,22	0,27	0,31

	正	EXOC	FLEXOCOMPRESSÃO NORMAL	SSÃO	NORMA	4				AR	ARMADURA SIMÉTRICA	A SIM	ÉTRIC	-	
						SEÇĀ	O RET	SEÇÃO RETANGULAR	LAR						
>	VALORES DE ω	S DE α	2	AÇO	S	50 B		β =	: 20	5.	us 	a = 0,05		0 = 0	0
2 A	0,10	0,20	06,0	0,40	09'0	09'0	0,70	08'0	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,88	0,87	0,88	0,91	0,95	26'0	1,02	1,06	1,12	1,17	1,22	1,27	1,33	1,36	1,42
06'0	0,79	0,78	0,78	0,81	0,85	0,88	0,93	0,97	1,02	1,06	1,12	1,17	1,21	1,27	1,32
0,80	0,70	0,70	69'0	0,72	0,75	0,78	0,83	0,87	0,91	0,97	1,02	1,06	Ξ	1,17	1,20
0,70	0,62	09'0	09'0	0,62	99'0	69'0	0,72	0,77	0,81	0,87	0,91	96,0	0,99	1,05	1,10
09'0	0,52	0,51	0,50	0,52	0,55	0,59	0,62	99'0	0,71	0,75	0,81	0,85	0,89	0,94	0,98
0,50	0,43	0,42	0,41	0,43	0,45	0,48	0,51	0,56	0,61	0,65	0,69	0,74	0,78	0,82	0,87
0,40	0,34	0,33	0,32	0,33	0,35	0,38	0,41	0,45	0,49	0,53	0,58	0,62	99'0	0,71	0,75
0,30	0,25	0,23	0,23	0,23	0,25	0,27	0,30	0,34	0,38	0,42	0,46	0,50	0,54	0,59	0,63
0,20	0,16	0,14	0,13	0,13	0,14	0,16	0,18	0,22	0,25	0,29	0,33	0,37	0,42	0,46	0,51
0,10	70,0	0,05	0,03	0,02	0,01	0,02	0,04	0,07	0,11	0,15	0,20	0,24	0,29	0,34	0,38

	1	FLEXOCOMPRESSAO NORMAL	MPRE	SSAON	CHEA	_1				Ē.	ARMADORA SIMEL RICA	ASIME	3 2 2 3		
						SEÇĂ	O RET/	SEÇÃO RETANGULAR	AR						
>	LORE	VALORES DE ω	3 <u>2</u> 8	AÇO CA	8 8	9 B		$\beta = 20$	20		11 es	a = 0,10		9	0
1	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	09'0	0,70	08'0	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	0,93	0,92	0,93	0,97	1,01	1,04	1,08	1,14	1,18	1,24	1,28	1,34	1,40	1,43	1,49
06'0	0,83	0,84	0,83	0,86	0,90	0,93	86'0	1,02	1,08	1,13	1,18	1,23	1,27	1,33	1,38
08'0	0,73	0,73	0,74	0,76	08'0	0,83	0,87	0,92	0,97	1,01	1,07	1,1	1,16	1,22	1,27
0,70	99'0	0,64	0,63	99'0	69'0	0,72	92'0	0,81	0,85	0,91	0,95	1,00	1,06	1,09	1,14
09'0	0,55	0,54	0,54	0,55	0,58	0,62	0,65	69'0	0,75	0,79	0,84	68'0	0,93	96'0	1,02
0,50	0,45	0,44	0,43	0,45	0,47	0,50	0,55	0,58	0,63	0,67	0,72	0,76	08'0	98'0	06'0
0,40	0,35	0,34	0,34	0,35	0,37	0,39	0,43	0,47	0,51	0,55	0,59	0,64	89′0	0,73	0,77
0,30	0,26	0,24	0,24	0,24	0,26	0,28	0,31	0,35	0,38	0,42	0,46	0,50	0,55	0,59	0,64
0,20	0,16	0,15	0,14	0,13	0,14	0,15	0,18	0,21	0,24	0,28	0,32	0,37	0,41	0,46	0,51
0,10	0,07	0,05	0,02	00'0	00'0	000	0.01	0,05	60'0	0,13	0,18	0,22	0,27	0,32	0,37

	1	FLEXOCOMPRESSÃO NORMAL	MPRE	SSÃO N	IORMA					ARIV	IADUR	ARMADURA SIMÉTRICA	TRICA		
						SEÇÃ	о вет	SEÇÃO RETANGULAR	AR						
A.V	LORE	VALORES DE ω		AÇO	CA 50	8 0		91 91	20	385)	e2 	a = 0,15		0 = <i>φ</i>	
٦	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	08'0	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	86'0	16'0	1,01	1,04	1,08	1,12	1,15	1,21	1,27	1,31	1,37	1,41	1,47	1,53	1,59
06'0	0,88	0,88	68'0	0,92	96'0	1,01	1,04	1,10	1,14	1,20	1,24	1,30	1,36	1,39	1,45
08'0	0,78	77'0	0,79	0,81	0,85	0,88	0,93	0,97	1,03	1,09	1,13	1,18	1,22	1,28	1,34
0,70	89'0	0,67	19'0	0,70	0,73	0,76	0,81	98'0	0,91	96'0	1,01	1,05	1,	1,16	1,20
09'0	99'0	0,56	0,57	0,58	0,62	0,65	69'0	0,74	82'0	0,84	88'0	0,93	0,97	1,03	1,07
09'0	0,47	0,46	0,46	0,47	09'0	0,53	0,57	0,62	99'0	0,71	0,75	08'0	0,84	68'0	0,94
0,40	0,37	98'0	0,35	98'0	0,38	0,41	0,45	0,48	0,53	0,57	0,62	99'0	0,70	0,74	08'0
02'0	0,27	0,25	0,24	0,25	0,26	0,28	0,32	96'0	0,39	0,43	0,47	0,51	99'0	0,61	0,65
0,20	0,17	0,15	0,14	0,13	0,13	0,15	0,17	0,19	0,23	0,27	0,31	98'0	0,40	0,45	0,50
0,10	90'0	0,04	0,02	0,00	00'0	00'0	00'0	0,02	90'0	0,11	0,15	0,20	0,25	06'0	0,35

4		9	1,40 1,50	1,48 1,55	1,39 1,43	1,27 1,32	1,16 1,22	1,04 1,10	26'0 86'0	0,81 0,85	0,67 0,72	0,54 0,58	0,39 0,44
ÉTRIC			1,30	1,44	1,32	1,21	1,11	1,00	0,88	0,75	0,62	0,49	0,35
A SIM		a= 0,05	1,20	1,38	1,27	1,16	1,05	0,94	0,82	0,71	0,58	0,45	0,30
ARMADURA SIMÉTRICA		(C)	1,10	1,31	1,21	1,11	1,00	68'0	0,78	99'0	0,53	0,40	0,25
ARI			1,00	1,27	1,15	1,06	0,95	0,84	0,73	0,62	0,49	0,36	0,20
	AR	25	06'0	1,20	1,11	1,01	06'0	62'0	89'0	0,57	0,45	0,31	0,16
	NGUL	E B	0,80	1,14	1,04	0,95	0,85	0,74	0,63	0,52	0,40	0,28	0,12
	SEÇÃO RETANGULAR		0,70	1,10	1,00	68'0	0,79	69'0	0,58	0,47	0,36	0,24	60'0
1	SEÇÃ(80	09'0	1,04	0,94	0,85	0,75	0,64	0,54	0,44	0,32	0,21	0,07
ORMAI		CA 50	0,50	1,00	06'0	64'0	02'0	09'0	0,50	0,40	0,29	0,19	90'0
SÃO N		AÇO	0,40	0,95	98'0	92'0	99'0	0,57	0,47	0,37	0,27	0,17	90'0
MPRES		20	0,30	0,91	0,82	0,73	69'0	0,54	0,45	0,35	0,26	0,16	90'0
FLEXOCOMPRESSÃO NORMAL		i DE ω	0,20	06'0	0,81	0,71	0,63	0,53	0,44	0,35	0,26	0,16	70,0
FLE		VALORES DE ω	0,10	06,0	0,81	0,71	0,62	0,54	0,44	0,35	0,26	0,17	80'0
		۸	2/2	00,1	06'0	08'0	0,70	09'0	0,50	0,40	02'0	0,20	0,10

SEÇÃO RETA VALORES DE ω AÇO CA 50 B 0,95 0,95 0,97 1,02 1,06 1,11 1,16 0,85 0,85 0,87 0,91 0,96 1,00 1,06 0,75 0,76 0,77 0,81 0,84 0,90 0,95 0,65 0,66 0,66 0,70 0,74 0,79 0,83 0,66 0,56 0,57 0,60 0,63 0,68 0,73 0,46 0,46 0,48 0,50 0,53 0,57 0,61 0,37 0,37 0,37 0,39 0,41 0,45 0,50 0,17 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24 0,17 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24		FL	FLEXOCOMPRESSÃO NORMAL	MPRE	SÃO N	ORMAI					ARM	IADUR	A SIMÉ	ARMADURA SIMÉTRICA		
VALORES DE ω AÇO CA 50 B VALORES DE ω AÇO CA 50 B y 0,10 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 y 0,90 0,95 0,95 0,97 1,02 1,06 1,11 1,16 y 0,90 0,85 0,85 0,87 0,91 0,96 1,00 1,06 y 0,05 0,76 0,77 0,81 0,84 0,90 0,95 y 0,60 0,66 0,66 0,70 0,74 0,79 0,83 y 0,60 0,66 0,66 0,60 0,63 0,68 0,73 y 0,90 0,96 0,96 0,97 0,90 0,95 0,91 y 0,90 0,97 0,97 0,97 0,99 0,91 y 0,90 0,97 0,97 0,97 0,99 0,91 y 0,90 0,97 0,97 0,97 0,99 0,99 y 0,90 0,97 0,97 0,98 0,90 0,94 0,97 y 0,08 0,97 0,97 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24							SEÇÃ(J RETA	ANGUL	AR						
,00 0,95 0,95 0,97 1,02 1,06 1,11 1,16 ,90 0,85 0,85 0,87 0,91 0,96 1,00 1,06 1,11 1,16 ,90 0,75 0,76 0,77 0,81 0,84 0,90 0,95 ,70 0,56 0,66 0,70 0,74 0,79 0,83 ,60 0,56 0,56 0,57 0,60 0,63 0,68 0,73 ,50 0,46 0,46 0,48 0,50 0,53 0,57 0,61 0,40 0,37 0,37 0,37 0,39 0,41 0,45 0,50 0,40 0,27 0,27 0,27 0,28 0,30 0,34 0,37 0,30 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24 0,00 0,00 0,00 0,00 0,00 0,00 0,00	Α>	LORE	S DE ω	1824	AÇO	క			8	25		e B	a= 0,10		9-	
0,95 0,95 0,97 1,02 1,06 1,11 1,16 0,85 0,85 0,87 0,91 0,96 1,00 1,06 0,75 0,76 0,77 0,81 0,84 0,90 0,95 0,65 0,66 0,60 0,74 0,79 0,83 0,56 0,56 0,57 0,60 0,63 0,68 0,73 0,46 0,46 0,48 0,50 0,53 0,57 0,61 0,27 0,27 0,27 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24 0,95 0,98 0,98 0,98 0,91 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24		0,10	0,20	08'0	0,40	0,50	09'0	0,70	0,80	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
0,85 0,85 0,87 0,91 0,96 1,00 1,06 0,75 0,76 0,77 0,81 0,84 0,90 0,95 0,65 0,66 0,66 0,70 0,74 0,79 0,95 0,56 0,56 0,57 0,60 0,63 0,68 0,73 0,46 0,46 0,48 0,50 0,53 0,57 0,61 0,37 0,37 0,37 0,39 0,41 0,45 0,50 0,17 0,17 0,17 0,17 0,17 0,17 0,17 0,17 0,04 0,04 0,08	1,00	96'0	36'0	16'0	1,02	1,06	1,1	1,16	1,23	1,27	1,34	1,41	1,45	1,52	1,58	1,63
0,75 0,76 0,77 0,81 0,84 0,90 0,95 0,65 0,66 0,70 0,74 0,79 0,83 0,68 0,56 0,56 0,50 0,63 0,68 0,73 0,46 0,46 0,48 0,50 0,53 0,41 0,45 0,50 0,27 0,27 0,27 0,27 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24 0,98 0,98 0,96 0,98 0,98 0,98 0,98 0,98 0,98 0,98 0,98	06'0	0,85	0,85	0,87	0,91	96'0	1,00	1,06	1,10	1,17	1,24	1,28	1,34	1,41	1,46	1,52
0,65 0,66 0,66 0,70 0,74 0,79 0,83 0,56 0,56 0,57 0,60 0,63 0,68 0,73 0,46 0,46 0,48 0,50 0,53 0,57 0,61 0,37 0,37 0,37 0,39 0,41 0,45 0,50 0,27 0,27 0,27 0,27 0,28 0,30 0,34 0,37 0,17 0,17 0,17 0,17 0,17 0,17 0,19 0,24 0,08	08'0	0,75	92'0	0,77	0,81	0,84	06'0	96'0	1,00	1,06	1,11	1,17	1,23	1,28	1,33	1,40
0,56 0,56 0,57 0,60 0,63 0,68 0,73 0,46 0,46 0,48 0,50 0,53 0,57 0,61 0,37 0,37 0,39 0,41 0,45 0,50 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24 0,37 0,08 0,06 0,06 0,06 0,06 0,06 0,06 0,06	0,70	99'0	99'0	99'0	0,70	0,74	6,79	0,83	68'0	0,94	1,00	1,06	1,11	1,16	1,23	1,27
0,46 0,46 0,48 0,50 0,53 0,57 0,61 0,37 0,37 0,39 0,41 0,45 0,50 0,27 0,27 0,28 0,30 0,34 0,37 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24 0,08 0,06 0,05 0,06 0,06 0,06 0,06 0,06 0,06	09'0	99'0	99'0	0,57	09'0	0,63	89'0	0,73	71,0	0,83	0,88	0,94	0,99	1,04	1,10	1,15
0,37 0,37 0,37 0,39 0,41 0,45 0,50 0,27 0,27 0,28 0,30 0,34 0,37 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24 0,08 0,08 0,05 0,05 0,04 0,04 0,06	09'0	0,46	0,46	0,48	0,50	0,53	0,57	0,61	99'0	0,71	92'0	0,82	0,87	0,92	96'0	1,02
0,27 0,27 0,27 0,28 0,30 0,34 0,37 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24 0,08 0.08 0.08 0.08 0.08 0.08 0.08 0.08	0,40	0,37	0,37	0,37	0,39	0,41	0,45	0,50	0,54	0,59	0,64	0,69	0,73	62'0	0,83	0,88
0,17 0,17 0,17 0,17 0,19 0,21 0,24	06,30	0,27	0,27	0,27	0,28	0,30	0,34	0,37	0,41	0,46	0,51	0,55	09'0	0,64	69'0	0,74
0.08 0.08 0.08 0.04 0.04 0.08	0,20	0,17	0,17	0,17	0,17	0,19	0,21	0,24	0,28	0,31	0,35	0,40	0,45	0,49	0,54	0,59
מים בחים בחים בחים בחים מים	0,10	0,08	90'0	0,05	0,04	0,04	0,04	90'0	0,10	0,14	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43

					ì				į	ARIMADORA SIMETRICA	i i			
					SEÇÃ	SEÇÃO RETANGULAR	ANGUL	AB.						
VALORES DE ω	3		AÇO	AÇO CA 50	B C		8	25		il as	0,15		0 ≡ Ø	
o'	0,20	0,30	0,40	0,50	09'0	0,70	08'0	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
-	1,01	1,04	1,09	1,14	1,20	1,24	1,31	1,36	1,43	1,50	1,57	1,62	1,67	1,74
0	06'0	0,94	0,98	1,02	1,07	1,13	1,19	1,24	1,31	1,38	1,43	1,48	1,55	1,60
_	0,80	0,82	0,87	0,91	96'0	1,01	1,06	1,13	1,19	1,25	1,30	1,37	1,42	1,47
_	69'0	0,72	0,75	0,80	0,84	06'0	0,95	1,01	1,06	1,12	1,17	1,24	1,29	1,35
0	69'0	09'0	0,63	0,67	0,72	0,77	0,83	0,88	0,94	0,99	1,05	1,10	1,15	1,22
_	0,48	0,50	0,52	99'0	09'0	0,64	0,70	0,75	0,81	98'0	0,91	26'0	1,02	1,06
_	86'0	0,39	0,41	0,44	0,47	0,52	0,57	0,61	99'0	0,72	0,77	0,81	0,87	0,92
-	0,28	0,28	0,29	0,32	0,35	0,39	0,43	0,48	0,52	0,56	0,62	99'0	0,72	0,77
	0,17	0,17	0,17	0,19	0,21	0,24	0,27	0,31	0,35	0,39	0,45	0,50	0,55	09'0
0	90'0	0,05	0,02	0,00	0,00	0,03	90'0	0,11	0,16	0,21	0,26	0,31	0,37	0,42

	正	FLEXOCOMPRESSÃO NORMAI	OMPRE	SSÃO	NORMA	ļ				ABI	MADUF	3A SIM	ARMADURA SIMÉTRICA	A	
						SEÇĀ	O RET	SEÇÃO RETANGULAR	LAR						
>	ALORE	VALORES DE ω	3	Α¢c	AÇO CA 50	8		β =	30		a = (: 0,05		<i>∂</i> = 0	0
E	0,10	0,20	06,0	0,40	0,50	09'0	0,70	08'0	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	06'0	0,93	96'0	1,01	1,07	1,12	1,19	1,23	1,30	1,38	1,44	1,51	1,57	1,64	1,70
06'0	0,81	0,83	0,87	06'0	76'0	1,02	1,09	1,14	1,20	1,26	1,34	1,40	1,47	1,53	1,60
0,80	0,73	0,75	0,77	0,81	98'0	0,92	0,97	1,03	1,1	1,17	1,23	1,28	1,35	1,41	1,48
0,70	0,64	0,65	0,67	0,71	0,76	0,82	0,88	0,94	1,00	1,05	1,11	1,18	1,24	1,31	1,36
09'0	0,55	99'0	0,58	0,62	99'0	0,71	0,77	0,82	0,88	0,94	1,01	1,07	1,12	1,19	1,23
0,50	0,45	0,47	0,49	0,52	99'0	0,61	99'0	0,71	77,0	0,83	06'0	96'0	1,00	1,06	1,12
0,40	0,36	0,37	0,39	0,42	0,46	0,50	0,56	0,61	99'0	0,71	9,76	0,82	0,88	0,94	0,99
0,30	0,27	0,28	0,30	0,32	0,35	0,39	0,44	0,49	0,54	0,59	0,64	69'0	0,75	08'0	0,84
0,20	0,18	0,19	0,20	0,22	0,24	0,27	0,31	0,36	0,40	0,45	0,50	0,54	0,59	0,65	0,70
0,10	60'0	60'0	60'0	0,11	0,12	0,14	0,17	0,20	0,24	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48	0,54
		-				1			1000000	10 Kill 10 Kill		100	2000		

a = 0,10 0 1,00 1,10 1,20		$\beta = 30$ $0.80 0.9$ $1,34 1,3$ $1,21 1,2$	$\beta = 30$ $0,70 0,80 0,9$ $1,26 1,34 1,3$ $1,15 1,21 1,2$	B $\beta = 3$ 0,60 0,70 0,80 1,19 1,26 1,34 1,08 1,15 1,21 0.97 1,04 1,11	CA 50 B $\beta = 3$ 0,50 0,60 0,70 0,80 1,14 1,19 1,26 1,34 1,03 1,08 1,15 1,21 0,91 0,97 1,04 1,11	50 B β = 3 0,60 0,70 0,80 1 1,19 1,26 1,34 3 1,08 1,15 1,21 1 0,97 1,04 1,11	AÇO CA 50 B β = 3 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 1,08 1,14 1,19 1,26 1,34 0,98 1,03 1,08 1,15 1,21 0,86 0,91 0,97 1,04 1,11	AÇO CA 50 B β = 3 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 1,08 1,14 1,19 1,26 1,34 0,98 1,03 1,08 1,15 1,21 0.86 0.91 0.97 1,04 1,11
90 1,00 1,		V2	β = ξ 0,70 0,80 1,26 1,34 1,15 1,21	B β = 3 0,60 0,70 0,80 1,19 1,26 1,34 1,08 1,15 1,21 0.97 1,04 1,11	CA 50 B $\beta = 3$ 0,50 0,60 0,70 0,80 1,14 1,19 1,26 1,34 1,03 1,08 1,15 1,21 0,91 0,97 1,04 1,11	0,50 0,60 0,70 0,80 1,14 1,19 1,26 1,34 1,03 1,08 1,15 1,21 0,91 0,97 1,04 1,11	AÇO CA 50 B β = 3 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 1,08 1,14 1,19 1,26 1,34 0,98 1,03 1,08 1,15 1,21 0,86 0,91 0,97 1,04 1,11	AÇO CA 50 B β = 3 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 1,02 1,08 1,14 1,19 1,26 1,34 0,92 0,98 1,03 1,08 1,15 1,21 0,82 0,86 0,91 0,97 1,04 1,11
1,00	2, 1, 1, 1,	1	0,70 0,80 1,26 1,34 1,15 1,21	0,70 0,80 1,26 1,34 1,15 1,21 1,04 1,11	0,60 0,70 0,80 1,19 1,26 1,34 1,08 1,15 1,21 0,97 1,04 1,11	0,50 0,60 0,70 0,80 1,14 1,19 1,26 1,34 1,03 1,08 1,15 1,21 0.91 0.97 1.04 1,11	0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 1,08 1,14 1,19 1,26 1,34 0,98 1,03 1,08 1,15 1,21	0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 1,02 1,08 1,14 1,19 1,26 1,34 0,92 0,98 1,03 1,08 1,15 1,21 0.82 0.86 0.91 0.97 1,04 1,11
	1, 1, 1,		1,26 1,34 1,15 1,21	1,26 1,34 1,11 1,04 1,11	1,19 1,26 1,34 1,08 1,15 1,21 0,97 1,04 1,11	1,14 1,19 1,26 1,34 1,03 1,08 1,15 1,21 0,91 0,97 1,04 1,11	1,08 1,14 1,19 1,26 1,34 0,98 1,03 1,08 1,15 1,21 0.86 0.91 0.97 1.04 1,11	1,02 1,08 1,14 1,19 1,26 1,34 0,92 0,98 1,03 1,08 1,15 1,21 0.82 0.86 0.91 0.97 1,04 1,11
1,39 1,46 1,54		1,21	1,15	1,15	1,08 1,15 0,97 1,04	1,03 1,08 1,15	0,98 1,03 1,08 1,15	0,92 0,98 1,03 1,08 1,15
,27 1,35 1,42	-	7		1,04	0,97 1,04	0.97 0.97 1.04	0.86 0.91 0.97 1.04	0.87 0.86 0.91 0.97 1.04
1,17 1,23 1,31								
1,05 1,13 1,19	—	66'0	0,93 0,99		0,93	0,87 0,93	0,81 0,87 0,93	0,76 0,81 0,87 0,93
0,94 1,00 1,06	0	88'0	0,82		0,82	0,75 0,82	0,70 0,75 0,82	0,66 0,70 0,75 0,82
0,82 0,88 0,94	O.	92'0	0,70	0,64 0,70	0,70	0,64 0,70	0,59 0,64 0,70	0,55 0,59 0,64 0,70
0,70 0,75 0,80	o`	0,64	0,58	0,53 0,58	0,58	0,53 0,58	0,48 0,53 0,58	0,45 0,48 0,53 0,58
0,56 0,62 0,66	O	0,51	0,46		0,46	0,41 0,46	0,37 0,41 0,46	0,34 0,37 0,41 0,46
0,41 0,46 0,51	0	0,37	0,33	0,28 0,33	0,33	0,28 0,33	0,25 0,28 0,33	0,22 0,25 0,28 0,33
0,23 0,27 0,32	O	0,19	0,15		0,15	0,13 0,15	0,11 0,13 0,15	0,10 0,11 0,13 0,15

VALORES DE ω A 1,00 1,10 0,20 0,30 0,4 1,00 1,02 1,03 1,09 1,7 0,90 0,92 0,94 0,99 1,7 0,80 0,81 0,83 0,87 0,9 0,70 0,71 0,73 0,77 0,8 0,60 0,60 0,62 0,66 0,7 0,60 0,60 0,61 0,64 0,9 0,40 0,40 0,41 0,43 0,4 0,30 0,30 0,31 0,33 0,3 0,20 0,19 0,20 0,21 0,3		FLEXUCUMPRESSAU NURMAL				ARN	IADUR	ARMADURA SIMÉTRICA	TRICA		
VALORES DE ω VALORES DE ω 0,10 0,20 0,30 0,90 1,02 1,03 1,09 0,92 0,94 0,99 0,77 0,77 0,77 0,77 0,77 0,77 0,70 0,71 0,73 0,77 0,50 0,50 0,51 0,54 0,90 0,30 0,30 0,31 0,33 0,20 0,19 0,20 0,21		SEC	SEÇÃO RETANGULAR	ANGUL	AR						
,00 1,10 0,20 0,30 ,90 0,92 0,94 0,99 ,80 0,81 0,83 0,87 ,70 0,71 0,73 0,77 ,60 0,60 0,62 0,65 ,50 0,50 0,51 0,54 ,40 0,40 0,41 0,43 ,30 0,30 0,31 0,33	AÇO CA	₹ 50 B		$\beta = 30$	30		11	a = 0,15		$0 = \phi$	C
1,02 1,03 1,09 0,92 0,94 0,99 0,81 0,83 0,87 0,71 0,73 0,77 0,60 0,62 0,66 0,50 0,51 0,54 0,40 0,41 0,43 0,30 0,31 0,33 0,19 0,20 0,21	0,40	0,50 0,60	0,70	08'0	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
0,92 0,94 0,99 0,81 0,81 0,83 0,87 0,71 0,73 0,77 0,60 0,62 0,65 0,64 0,40 0,40 0,30 0,30 0,19 0,19 0,20 0,21	1,16	1,22 1,27	1,35	1,42	1,49	1,57	1,64	1,72	1,78	1,86	1,92
0,81 0,83 0,87 0,71 0,73 0,77 0,60 0,62 0,65 0,50 0,51 0,64 0,40 0,41 0,43 0,30 0,31 0,33	1,05	1,10 1,16	1,22	1,30	1,37	1,44	1,52	1,58	1,67	1,72	1,81
0,71 0,73 0,77 0,60 0,60 0,65 0,65 0,65 0,54 0,54 0,43 0,30 0,31 0,33 0,19 0,20 0,21	0,94	0,99 1,05	1,1	1,18	1,24	1,32	1,39	1,47	1,53	1,58	1,66
0,60 0,62 0,65 0,50 0,50 0,50 0,51 0,54 0,43 0,30 0,31 0,33 0,19 0,20 0,21	0,81	0,86 0,92	66'0	1,06	1,13	1,19	1,25	1,33	1,39	1,47	1,52
0,50 0,51 0,64 0,40 0,40 0,30 0,31 0,33 0,19 0,20 0,21	0,70	0,75 0,81	0,87	0,93	1,00	1,06	1,14	1,20	1,25	1,33	1,38
0,40 0,41 0,43 0,30 0,31 0,33 0,19 0,20 0,21	0,58	99'0 69'0	0,74	0,80	0,87	0,93	1,00	1,06	1,12	1,18	1,24
0,30 0,31 0,33 0,19 0,20 0,21	0,47	0,51 0,55	0,61	0,68	0,74	0,79	0,85	0,91	26'0	1,04	1,09
0,19 0,20 0,21	0,35	0,39 0,43	0,48	0,54	0,59	0,65	0,70	0,75	0,81	0,87	0,92
	0,23	0,25 0,29	0,33	0,38	0,43	0,48	0,53	0,58	0,64	89'0	0,74
0,10 80,08 0,08 0,08 0,0	80'0	0,09 0,10	0,12	0,16	0,20	0,25	0,31	98'0	0,42	0,48	0,54

	1	FLEXOCOMPRESSÃO NORMAL	MPRE	SSÃO N	IORMA					AK	ARIMADORA SIMELKICA	ASIME	2017	_	
						SEÇÃ	SEÇÃO RETANGULAR	ANGUL	AR.						
Α>	VALORES DE ω	S DE ω		AÇO CA	CA 50	8 0		ες. =	35		, ro	a = 0,05		$0 = \phi$	0
2	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	09'0	0,70	0,80	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
00,1	0,92	96'0	1,00	1,06	1,14	1,20	1,28	1,35	1,42	1,51	1,58	1,67	1,73	1,82	1,90
06'0	0,84	28'0	06'0	0,97	1,03	1,10	1,17	1,26	1,33	1,41	1,48	1,55	1,63	1,69	1,78
08'0	0,75	0,78	0,82	0,87	0,94	1,00	1,07	1,14	1,23	1,30	1,36	1,45	1,51	1,59	1,65
0,70	0,65	69'0	0,73	0,78	0,84	0,89	26'0	1,04	1,11	1,20	1,26	1,32	1,41	1,46	1,54
09'0	0,56	0,59	0,63	0,68	0,73	08'0	0,86	0,93	1,01	1,08	1,15	1,22	1,29	1,36	1,43
0,50	0,47	0,50	0,54	0,58	0,64	0,69	0,76	0,83	68'0	26'0	1,03	1,10	1,16	1,23	1,29
0,40	0,38	0,41	0,44	0,48	0,63	0,58	0,65	0,71	72,0	0,84	06'0	0,97	1,04	1,10	1,16
0,30	0,29	0,31	0,34	0,38	0,42	0,47	0,53	0,59	99'0	0,71	82'0	0,84	0,91	96'0	1,02
0,20	0,20	0,22	0,24	0,27	0,31	96,0	0,41	0,46	0,52	0,58	0,63	69'0	0,75	0,81	0,87
0,10	0,10	0,11	0,13	0,16	0,19	0,22	0,27	0,31	0,36	0,41	0,46	0,51	0,57	0,62	89'0

SEÇÃO RETANGULAR VALORES DE ω AÇO CA 50 B β = 35 a = 0,10 μ ν 0,10 0,20 0,40 0,50 0,60 0,70 1,00 1,00 1,01 1,11 1,22 1,28 1,36 1,41 1,50 1,77 1,86 1 0,90 0,90 1,01 1,01 1,11 1,12 1,28 1,46 1,53 1,60 1,70 1,71 1,86 1 0,90 0,90 0,01 0,09 0,09 0,09 0,70 0,80 0,70 1,70 1,71 1,22 1,41 1,22 1,41 1,22 1,41 1,23 1,41 1,50 1,72 1,86 1,70 1,72 1,86 1,72 1,90 1,70 1,72 1,86 1,72 1,90 1,70 1,72 1,86 1,72 1,72 1,14 1,23 1,41 1,50 1,72 1,41 1,23 1,41 1,50 <td< th=""><th></th><th>显</th><th>EXOC(</th><th>FLEXOCOMPRESSÃO NORMAL</th><th>SSÃO N</th><th>JORMA</th><th>7</th><th></th><th></th><th></th><th>ARM</th><th>ARMADURA SIMÉTRICA</th><th>A SIMI</th><th>TRICA</th><th></th><th></th></td<>		显	EXOC(FLEXOCOMPRESSÃO NORMAL	SSÃO N	JORMA	7				ARM	ARMADURA SIMÉTRICA	A SIMI	TRICA		
$ \begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$							SEÇĀ	O RET,	ANGUL	AR						
V 0,10 0,20 0,30 0,40 0,50 0,60 0,70 0,80 0,90 1,00 1,10 1,20 1,30 1,30 1,40 1,70 1,11 1,20 1,30 1,40 1,50 1,70 1,77 1,86 ,90 0,88 0,91 0,96 1,03 1,10 1,17 1,26 1,33 1,41 1,50 1,77 1,86 ,90 0,88 0,96 1,03 1,10 1,17 1,26 1,33 1,41 1,50 1,77 1,86 ,90 0,78 0,87 0,93 1,00 1,07 1,14 1,23 1,41 1,50 1,72 1,66 1,72 ,70 0,88 0,98 1,00 1,01 1,11 1,12 1,12 1,13 1,42 1,48 1,53 1,48 1,53 1,48 1,53 1,48 1,53 1,66 1,72 1,48 1,52 1,48 1,52 1,48 1,52	>	ALORE	S DE a	~	AÇO	5	B		β.	35		10 11	0,10		e 0	٥
0,97 1,01 1,07 1,14 1,22 1,29 1,36 1,46 1,53 1,60 1,77 1,86 0,88 0,91 0,96 1,03 1,10 1,17 1,22 1,33 1,41 1,50 1,77 1,86 0,78 0,82 0,87 0,93 1,00 1,07 1,14 1,23 1,30 1,37 1,46 1,53 1,66 1,77 1,86 0,78 0,82 0,83 0,96 1,07 1,14 1,27 1,37 1,49 1,52 1,49 0,69 0,72 0,77 0,83 0,96 1,03 1,10 1,14 1,27 1,33 1,42 1,49 0,59 0,66 0,72 0,78 0,84 0,93 1,00 1,07 1,14 1,27 1,33 1,42 1,49 0,50 0,66 0,72 0,78 0,84 0,93 1,00 1,07 1,14 1,22 1,33 1,49		0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	08'0	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
0,88 0,91 0,96 1,03 1,10 1,17 1,26 1,33 1,41 1,50 1,57 1,66 1,72 0,78 0,82 0,87 0,93 1,00 1,07 1,14 1,23 1,30 1,57 1,66 1,72 1,66 1,67 1,66 1,72 1,46 1,52 1,66 1,62 1,62 1,66 1,03 1,10 1,11 1,12 1,14 1,27 1,48 1,62 1,62 1,62 1,03 1,10 1,11 1,12 1,14 1,27 1,49 1,	1,00	76'0	1,01	1,07	1,14	1,22	1,29	1,36	1,46	1,53	1,60	1,70	1,77	1,86	1,92	2,01
0,78 0,82 0,87 0,93 1,00 1,07 1,14 1,23 1,30 1,37 1,46 1,53 1,62 0,69 0,72 0,77 0,83 0,96 1,09 1,10 1,19 1,27 1,33 1,42 1,49 0,69 0,72 0,78 0,96 1,03 1,10 1,14 1,22 1,33 1,49 0,60 0,63 0,72 0,78 0,84 0,93 1,00 1,14 1,22 1,30 1,37 0,60 0,63 0,66 0,74 0,84 0,89 0,98 1,01 1,09 1,16 1,23 0,40 0,43 0,66 0,66 0,66 0,69 0,75 0,89 0,89 1,10 1,10 0,30 0,43 0,44 0,50 0,69 0,75 0,89 0,75 0,89 0,75 0,89 0,99 0,20 0,23 0,23 0,23 0,23 0,23 <t< td=""><td>06'0</td><td>0,88</td><td>0,91</td><td>96'0</td><td>1,03</td><td>1,10</td><td>1,17</td><td>1,26</td><td>1,33</td><td>1,41</td><td>1,50</td><td>1,57</td><td>1,66</td><td>1,72</td><td>1,82</td><td>1,91</td></t<>	06'0	0,88	0,91	96'0	1,03	1,10	1,17	1,26	1,33	1,41	1,50	1,57	1,66	1,72	1,82	1,91
0,69 0,72 0,77 0,83 0,89 1,03 1,10 1,19 1,27 1,33 1,42 1,49 0,69 0,63 0,66 0,72 0,78 0,84 0,93 1,00 1,01 1,14 1,22 1,30 1,37 0,60 0,63 0,66 0,67 0,67 0,74 0,88 0,98 0,96 1,16 1,23 0,40 0,43 0,47 0,50 0,66 0,69 0,75 0,88 0,98 1,10 1,10 0,30 0,43 0,47 0,50 0,66 0,69 0,75 0,88 0,98 1,10 1,10 0,30 0,33 0,36 0,40 0,44 0,50 0,56 0,69 0,75 0,89 0,79 0,89 0,94 0,20 0,23 0,23 0,37 0,43 0,43 0,43 0,49 0,60 0,66 0,75 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79	0,80	0,78	0,82	0,87	0,93	1,00	1,07	1,14	1,23	1,30	1,37	1,46	1,53	1,62	1,68	1,77
0,69 0,63 0,66 0,72 0,78 0,84 0,93 1,00 1,01 1,14 1,22 1,30 1,37 0,60 0,56 0,66 0,67 0,74 0,80 0,88 0,96 1,01 1,09 1,16 1,23 0,40 0,53 0,65 0,66 0,66 0,69 0,75 0,88 0,96 1,03 1,10 0,30 0,33 0,47 0,50 0,56 0,69 0,75 0,89 0,75 0,89 1,03 1,10 0,20 0,33 0,36 0,40 0,44 0,50 0,56 0,69 0,75 0,89 0,89 0,94 0,20 0,23 0,23 0,37 0,43 0,48 0,56 0,66 0,75 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79 0,79	0,70	69'0	0,72	0,77	0,83	0,89	96'0	1,03	1,10	1,19	1,27	1,33	1,42	1,49	1,57	1,64
0,60 0,63 0,56 0,62 0,67 0,74 0,80 0,88 0,95 1,01 1,09 1,16 1,23 0,40 0,43 0,43 0,56 0,56 0,69 0,75 0,88 0,96 1,03 1,10 0,30 0,43 0,43 0,56 0,56 0,56 0,69 0,75 0,89 0,94 0,20 0,33 0,36 0,44 0,50 0,56 0,69 0,75 0,89 0,94 0,20 0,23 0,23 0,33 0,43 0,43 0,44 0,60 0,75 0,79 0,79 0,10 0,11 0,13 0,16 0,19 0,23 0,27 0,31 0,36 0,47 0,47 0,59 0,59	09'0	0,59	0,63	99'0	0,72	0,78	0,84	0,93	1,00	1,07	1,14	1,22	1,30	1,37	1,44	1,5
0,40 0,43 0,47 0,50 0,56 0,62 0,69 0,75 0,82 0,88 0,96 1,03 1,10 0,30 0,33 0,40 0,44 0,50 0,56 0,65 0,69 0,75 0,89 0,94 0,94 0,10 0,11 0,13 0,16 0,19 0,23 0,23 0,23 0,23 0,23 0,23 0,23 0,23	0,50	09'0	0,53	95'0	0,62	0,67	0,74	08'0	0,88	0,95	1,01	1,09	1,16	1,23	1,30	1,37
0,30 0,33 0,36 0,40 0,44 0,50 0,56 0,62 0,69 0,75 0,82 0,89 0,94 0,20 0,23 0,26 0,32 0,37 0,43 0,48 0,54 0,60 0,66 0,72 0,79 0,10 0,11 0,13 0,16 0,19 0,23 0,27 0,31 0,36 0,42 0,47 0,53 0,59	0,40	0,40	0,43	0,47	0,50	0,56	0,62	69'0	0,75	0,82	0,88	96'0	1,03	1,10	1,16	1,22
0,20 0,23 0,25 0,28 0,32 0,37 0,43 0,48 0,54 0,60 0,66 0,72 0,79 0,10 0,11 0,13 0,16 0,19 0,23 0,27 0,31 0,36 0,42 0,47 0,53 0,59	06'0	06,0	0,33	96'0	0,40	0,44	0,50	0,56	0,62	69'0	0,75	0,82	68'0	0,94	00,1	1,09
0,10 0,11 0,13 0,16 0,19 0,23 0,27 0,31 0,36 0,42 0,47 0,53 0,59	0,20	0,20	0,23	0,25	0,28	0,32	0,37	0,43	0,48	0,54	09'0	99'0	0,72	0,79	0,85	0,91
	0,10	0,10	0,11	0,13	0,16	0,19	0,23	0,27	0,31	0,36	0,42	0,47	0,53	0,59	0,65	0,70

	교	EXOC	OMPRE	FLEXOCOMPRESSÃO NORMAI	JORMA					ARN	AADUR	ARMADURA SIMÉTRICA	€TRIC⁄	~	
						SEÇÃ	O RET,	SEÇÃO RETANGULAR	AR.						
>	ALORE	VALORES DE ω	^	AÇO	CA 50	B C		$\beta = 35$	35		co 	a = 0,15		$\phi = 0$	0
2 2	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	1,04	1,07	1,15	1,24	1,31	1,38	1,48	1,55	1,63	1,73	1,81	1,91	1,98	2,08	2,17
06'0	0,93	86'0	1,04	1,11	1,19	1,27	1,34	1,44	1,52	1,60	1,70	1,77	1,86	1,93	2,02
08'0	0,82	0,87	0,93	66'0	1,06	1,15	1,23	1,31	1,41	1,48	1,55	1,65	1,72	1,81	1,91
0,70	0,73	92'0	0,82	68'0	0,95	1,02	1,12	1,19	1,27	1,34	1,44	1,51	1,60	1,67	1,77
09'0	0,62	99'0	0,71	0,78	0,84	0,91	86'0	1,06	1,13	1,22	1,30	1,38	1,46	1,54	1,61
0,50	0,52	0,56	09'0	0,65	0,71	0,78	98′0	0,93	1,01	1,08	1,16	1,24	1,31	1,39	1,46
0,40	0,41	0,45	0,49	0,54	0,59	99'0	0,73	08'0	0,87	0,94	1,02	1,09	1,16	1,24	1,32
0,30	0,31	0,34	0,38	0,42	0,47	0,53	09'0	99'0	0,73	08'0	0,87	0,94	1,01	1,08	1,15
0,20	0,21	0,23	0,26	0,29	0,33	66,0	0,45	0,51	0,57	0,63	0,70	0,76	0,83	06,0	0,96
0,10	0,10	0,11	0,12	0,16	0,18	0,21	0,25	06'0	96'0	0,42	0,48	0,55	0,61	0,67	0,74
							-							ı	

VALORE	VALORES DE ω													
	SES DE				SEÇÃ	O RET/	SEÇÃO RETANGULAR	AR						
2		3	Αζο	CA 50	9 B]I	= 40		æ 	a = 0,05		<i>•</i> □	0
	0 0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00 0,94	4 1,00	1,06	1,13	1,23	1,30	1,40	1,48	1,56	1,67	1,77	1,84	1,95	2,01	2,12
98'0 06'0	5 0,91	0,97	1,04	1,12	1,20	1,28	1,38	1,46	1,57	1,64	1,75	1,82	1,92	1,99
0,80 0,76	6 0,81	0,87	96'0	1,02	1,1	1,19	1,27	1,37	1,44	1,55	1,62	1,71	1,79	1,89
0,70 0,67	7 0,72	11.0	0,84	0,91	66'0	1,09	1,17	1,25	1,34	1,43	1,51	1,59	1,67	1,77
89'0 09'0	8 0,62	69'0	0,76	0,82	0,89	76,0	1,05	1,14	1,23	1,31	1,40	1,48	1,56	1,63
0,50 0,49	9 0,53	69'0	99'0	0,72	0,78	0,87	0,94	1,03	1,12	1,20	1,28	1,36	1,44	1,51
0,40 0,40	0 0,44	0,50	0,55	09'0	0,68	0,76	0,83	16'0	66'0	1,07	1,15	1,23	1,30	1,39
0,30 0,30	0 0,35	0,40	0,44	0,50	0,57	0,64	0,71	62'0	98'0	0,94	1,02	1,09	1,16	1,23
0,20 0,21	1 0,25	0,29	0,33	0,38	0,45	0,52	0,59	99'0	0,73	0,79	98'0	0,94	1,01	1,07
0,10 0,11	1 0,14	0,17	0,22	0,27	0,32	0,38	0,44	0,50	99'0	0,62	69'0	0,75	0,82	0,89

	•	2	MINIT	2 O A C	FLEXUCOMPRESSAO NURMAL	.				ARI	ARMADURA SIMETRICA	AVIME	Z	·S	
						SEÇÃ	O RET/	SEÇÃO RETANGULAR	AR						
1/	LORE	VALORES DE ω		AÇO	CA 50	B		β =	= 40		6	a= 0,10		<i>e</i> = 0	0
-/	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	09'0	0,70	0,80	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
00,1	66'0	1,06	1,13	1,21	1,31	1,40	1,49	1,58	1,69	1,77	1,88	1,99	2,07	2,18	2,24
06'0	06'0	96'0	1,03	1,12	1,19	1,28	1,39	1,47	1,58	1,67	1,78	1,85	1,96	2,04	2,15
08'0	08'0	0,87	0,92	1,01	1,09	1,18	1,26	1,37	1,45	1,56	1,64	1,74	1,83	1,91	2,02
0,70	0,71	92'0	0,83	06'0	66'0	1,07	1,16	1,24	1,35	1,43	1,53	1,62	1,70	1,79	1,89
09'0	0,61	0,67	0,73	08'0	0,87	0,95	1,05	1,13	1,22	1,31	1,40	1,49	1,58	1,66	1,74
0,50	0,51	99'0	0,63	69'0	92'0	0,84	0,92	1,01	1,10	1,18	1,27	1,35	1,45	1,53	1,61
0,40	0,42	0,47	0,52	0,58	99'0	0,72	08'0	0,89	0,97	1,06	1,14	1,23	1,31	1,38	1,48
0,30	0,32	0,37	0,41	0,47	0,53	09'0	0,67	0,76	0,83	0,92	1,00	1,08	1,16	1,23	1,31
0,20	0,22	0,26	0,30	0,35	0,41	0,47	0,54	0,62	69'0	77,0	0,84	0,92	1,00	1,07	1,14
0,10	0,12	0,14	0,17	0,23	0,28	0,33	0,39	0,46	0,52	0,59	0,66	0,73	0,81	0,87	0,95

	FL	FLEXOCOMPRESSÃO NORMAL	MPRE	SSÃO N	ORMA	ر ا				ARIV	ADOR	ARMADURA SIMÉTRICA	TRICA		
						SEÇÃ	O RETA	SEÇÃO RETANGULAR	AR						30
>	VALORES DE ω	S DE ω)))	AÇO	CA 50	B C		8	= 40		in in	a = 0,15		<i>⊕</i> = 0	0
¥	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	06'0	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
1,00	1,06	1,12	1,22	1,30	1,41	1,50	1,62	1,71	1,80	1,92	2,01	2,13	2,24	2,32	2,43
06'0	0,95	1,03	1,10	1,20	1,30	1,39	1,48	1,60	1,69	1,81	1,89	2,01	2,09	2,19	2,31
08'0	0,85	0,92	66'0	1,09	1,17	1,28	1,37	1,46	1,58	1,66	1,78	1,87	1,96	2,06	2,17
0,70	0,75	0,81	0,89	76'0	1,05	1,14	1,25	1,34	1,43	1,54	1,64	1,74	1,83	1,92	2,03
09'0	0,64	0,70	0,78	0,85	0,94	1,03	1,12	1,21	1,31	1,41	1,51	1,60	1,69	1,78	1,89
0,50	0,54	09'0	29'0	0,74	0,81	06'0	66'0	1,08	1,18	1,28	1,36	1,47	1,56	1,64	1,73
0,40	0,44	0,49	0,55	0,62	69'0	110	98'0	96'0	1,04	1,13	1,22	1,31	1,40	1,48	1,58
06'0	0,33	0,38	0,44	0,50	99'0	0,64	0,72	0,81	0,89	86'0	1,07	1,15	1,24	1,34	1,42
0,20	0,22	0,27	0,31	0,37	0,43	09'0	0,58	0,66	0,74	0,82	0,91	1,00	1,07	1,16	1,24
0,10	0,12	0,14	0,18	0,23	0,29	0,34	0,40	0,47	0,55	0,62	69'0	0,78	98'0	0,94	1,01

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 ALLEN, H.G., BULSON, P. S. Background to buckling. London: McGraw-Hill, 1980.
- 2 AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building code requeriments for reinforced concrete. Detroit, 1971 (ACI Standard, 318-71).
- 3 ARAÚJO, J. M. Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado. Porto Alegre: UFRGS, 1984 (Dissertação de Mestrado).
- 4 _______ . Análise de pilares esbeltos de concreto armado pelo método das diferenças finitas. In: SEMINÁRIO DE COMPUTAÇÃO E MATEMÁTICA APLICA-DAS, 2, Anais... Curitiba, junho 1986. v. 1. p.64-75.
- Fórmulas de extrapolação para análise não-linear de estruturas de concreto armado. Vetor. Rio Grande, v. 2, 1988.
- 6 ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de obras de concreto armado: NBR-6118. Rio de Janeiro, 1980.
- 7 BERGAN, P. G., HOLAND, I. Nonlinear finite element analysis of concrete structures. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Amsterdam, n. 17-18, p.443-467, 1979.
- 8 BREBBIA, C. A., FERRANTE, A. J. The finite element technique. Porto Alegre: Ed. da UFRGS, 1975.
- 9 CAMPOS, F. A. Análise de pilares de concreto armado submetidos a flexocompressão oblique. Porto Alegre: UFRGS, 1982 (Dissertação de Mestrado).
- 10 CHEN, Wai-Fah, ATSUTA, Toshio. Theory of beam-columns. New York: McGraw-Hill, 1976. v.1.
- 11 COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON CEB/FIP. Manual of buckling and instability. Paris, 1978 (Bulletin d'Information 123).
- 13 ---- . Cracking and deformations. Paris, 1981 (Bulletin d'Information 143).
- 14 —————. CEB design manual on structural effects of time-dependent behaviour of concrete. Paris, 1984.
- 15 FUSCO, P. B. Estrutures de concreto. Solicitações normais. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.
- 16 GLOSH, S. K., CHANDRASEKHAR, C. S. Analysis of deformation in structural concrete flexural members. ACI publication SP-43, 249-277, Detroit, 1974.
- 17 GOYAL, Brij B., JACKSON, Neil. Slender concrete columns under sustained load. *Journal of the Structural Divison*. New York, ASCE, v. 97, n. 11, p.2729-50, Nov. 1971.
- 18 HALVORSEN, H. F. Beregning av rissdannelse i betong (Analysis of crack formation in concrete), Master Thesis. Div. Struct., Trondheim: The Norwegian Institute of Technology, 1976.
- 19 KULICKI, J. H., KOSTEM, C. N. The inelastic analysis of reinforced and prestressed concrete beams, Rep. nº 378 B.1. Bethlehem: Fritz Eng. Lab., Lehigh Univ., 1972.
- 20 LEONHARDT, F., MÖNNIG, E. Construções de concreto. Rio de Janeiro: Interciência, 1977. v. 1.
- 21 LEONHARDT, F. Construções de concreto. Rio de Janeiro: Interciência, 1979. v. 4.
- 22 LIN, C. S., SCORDELIS, A. C. Nonlinear analysis of RC shells of general form. *Journal of Scitructural Division*. New York, ASCE, 101 (STS), Mar. 1975.
- 23 MAESTRINI, S. R. Membrane behavior of reinforced concrete shell elements including tension-stiffening. Raleigh: North Carolina State University, Department of Civil Engineering, 1987 (Doctor Thesis).

- 24 NEVILLE, A. M. Properties of concrete. 2. ed. London: Pitman, 1975.
- 25 RAO, P. S., SUBRAHMANYAM, B. V. Trisegmental moment-curvature relations for reinforced concrete members. *Journal of the American Concrete Institute*. Detroit, v. 70, n. 5, p. 346-51, May 1973.
- 26 RÜSCH, H. Researches toward a general flexural theory for structural concrete. *Journal of the American Concrete Institute.* Detroit, v. 57, 1-28, July 1960.
- 27 SANTOS, L. M. dos. Cálculo de concreto armado. São Paulo: Ed. LMS, 1983. v. 1.
- 28 SILVA JR., J. F. da. Concreto armado: flexão composta no estádio III. 2. ed. Belo Horizonte: Ed. Arquitetura e Engenharia, 1975.
- 29 SPILKA, F. L. S., ARAŬJO, J. M. Análise de pilares esbeltos de concreto armado sob flexão composta oblíqua.CONGRESSO REGIONAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA EM ENGENHARIA, 3. Anais... Rio Grande, 1987, v. 2, p.48-65.
- 30 TIMOSHENKO, Stephen P. History of strength of materials. New York: McGraw-Hill, 1953.
- 31 TIMOSHENKO, S., GOODIER, I. N. *Teoria da elasticidade*, Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.
- 32 VIANA, M. L. S. Análise não-linear de pórticos de concreto armado ou protendido para cargas de curte duração. Porto Alegre: UFRGS, 1984 (Dissertação de Mestrado).

