

CURSO DE
CONCRETO ARMADO

Volume 2

JOSÉ MILTON DE ARAÚJO

**CURSO DE
CONCRETO ARMADO**

Volume 2

Editora DUNAS

CURSO DE CONCRETO ARMADO

© Copyright Editora DUNAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

Araújo, José Milton de
A663c Curso de concreto armado / José Milton de Araújo. – 5. ed. –
Rio Grande, RS: Editora Dunas, 2023.
4 v. : il. ; 14 x 21 cm

Inclui bibliografia
ISBN 978-85-86717-21-5 (Coleção)
ISBN 978-85-86717-23-9 (V. 1)
ISBN 978-85-86717-22-2 (V. 2)
ISBN 978-85-86717-25-3 (V. 3)
ISBN 978-85-86717-24-6 (V. 4)

1. Engenharia civil. 2. Concreto armado. 3. Construção de
concreto armado. 4. Projeto estrutural. I. Título.

CDD 624.1834

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Editora DUNAS
Rua Tiradentes, 105 - Cidade Nova
96211-080 RIO GRANDE - RS - Brasil

www.editoradunas.com.br
e-mail: contato@editoradunas.com.br

5^a edição, Setembro/2023

APRESENTAÇÃO

Este Curso de Concreto Armado é dirigido aos estudantes de graduação e pós-graduação em Engenharia Civil, bem como aos profissionais ligados à área de projeto estrutural. Para uma melhor apresentação, a obra foi dividida em quatro volumes, com uma sequência que nos parece apropriada do ponto de vista didático.

Não é nossa intenção abordar todos os aspectos relativos ao tema, o que seria impraticável em virtude de sua abrangência. Nosso único objetivo é apresentar um curso completo e atualizado sobre os métodos de cálculo das estruturas usuais de concreto armado. Em particular, o Curso é dedicado ao projeto das estruturas dos edifícios.

Nesta quinta edição de Curso de Concreto Armado, fizemos diversas alterações para acompanhar as atualizações introduzidas pelas normas NBR-6120 de 2019 e NBR-6118 de 2023. A norma NBR-6120/2019 alterou diversos valores referentes às cargas a serem consideradas nos edifícios, especialmente em relação às cargas variáveis.

A nova NBR-6118/2023 também introduziu modificações em alguns aspectos do projeto, com destaque para os diagramas tensão-deformação do concreto: diagrama parábola-retângulo e diagrama retangular. Esses diagramas foram alterados para acompanhar os novos diagramas constantes no projeto de revisão do Eurocode 2. Entretanto, a adaptação foi feita de maneira equivocada, o que pode levar a resultados totalmente inconsistentes, especialmente no dimensionamento dos pilares. Esse problema é mostrado em detalhes no capítulo 4 do Volume 1 e no capítulo 2 do Volume 3. Por isso, recomendamos manter o procedimento de dimensionamento à flexão simples e composta da NBR-6118/2014, enquanto se aguarda uma Emenda da NBR-6118/2023 corrigindo esse equívoco.

José Milton

PLANO DA OBRA

Volume 1: Propriedades dos materiais para concreto armado. Durabilidade das estruturas de concreto. Fundamentos de segurança. Flexão normal simples: dimensionamento e verificação de seções retangulares e seções T. Esforço cortante. Ancoragem e emendas das armaduras.

Volume 2: Cálculo e detalhamento de lajes maciças. Cálculo e detalhamento de vigas. Estados limites de utilização.

Volume 3: Flexo-compressão normal e oblíqua: dimensionamento e verificação de seções. Cálculo de pilares curtos e moderadamente esbeltos. Pilares-parede. Pilares esbeltos. Ações horizontais nas estruturas de contraventamento.

Volume 4: Dimensionamento à torção. Flexo-tração. Escadas. Vigas-parede e consolos. Reservatórios. Lajes nervuradas. Lajes cogumelo. Fundações. Projeto em situação de incêndio.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DAS LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO.....	1
1.1 - Tipos usuais de lajes dos edifícios	1
1.2 - Vãos teóricos das lajes	3
1.3 - Classificação das lajes quanto à armação.....	5
1.4 - Procedimento tradicional para cálculo das lajes dos edifícios .	8
1.5 - Cálculo das lajes armadas em uma direção	12
1.6 - Lajes contínuas armadas em uma direção	20
1.7 - Cargas nas lajes maciças	24
1.8 - Cálculo de marquises e sacadas	31
1.9 - Cálculo de lajes armadas em cruz	36
2. TEORIA DE FLEXÃO DE PLACAS.....	39
2.1 - Algumas relações da teoria da elasticidade	39
2.2 - Equação diferencial da placa	42
2.3 - Condições de contorno.....	50
2.4 - Solução da equação diferencial da placa	54
2.5 - Tabelas para o cálculo de placas	63
2.6 - Exemplos de cálculo	64
2.7 - Restrições ao emprego da teoria de placas.....	78
3. MÉTODOS SIMPLIFICADOS E MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O CÁLCULO DE LAJES	81
3.1 - A teoria das grelhas para lajes sobre apoios rígidos.....	81
3.2 - Métodos simplificados para cálculo de lajes sobre apoios deformáveis	88
3.3 - O método de Marcus	106
3.4 - Teoria das linhas de ruptura	108
3.5 - A analogia da grelha equivalente	118
3.6 - O método das diferenças finitas	123
3.7 - O método dos elementos finitos	132
3.8 - Aplicações do método dos elementos finitos	141
3.9 - Considerações finais.....	160

4. DETALHAMENTO DAS LAJES MACIÇAS	169
4.1 - Introdução	169
4.2 - Espessura mínima das lajes maciças	169
4.3 - Cálculo de flechas em lajes	170
4.4 - Cálculo das armaduras de flexão	173
4.5 - Cobrimento da armadura	178
4.6 - Outras prescrições da NBR-6118	179
4.7 - Detalhamento das armaduras de flexão	181
4.8 - Considerações adicionais sobre o detalhamento	190
5. CÁLCULO DE VIGAS	201
5.1 - Cargas nas vigas dos edifícios	201
5.2 - Vãos teóricos	202
5.3 - Cálculo dos esforços	203
5.4 - Cálculo das armaduras das vigas	215
5.5 - Escalonamento da armadura longitudinal	219
5.6 - Armadura mínima nos apoios	226
5.7 - Disposições construtivas da NBR-6118	227
5.8 - Exemplo de cálculo	234
5.9 - Aberturas em vigas	247
6. ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO	
Deformações.....	251
6.1 - Introdução	251
6.2 - Combinações das ações de serviço.....	252
6.3 - Deformações das vigas de concreto armado	256
6.4 - Análise não linear de vigas de concreto armado	259
6.5 - Modelo simplificado para o cálculo de flechas em vigas	269
6.6 - Consideração das deformações diferidas do concreto.....	281
6.7 - Exemplo de cálculo de flechas em vigas pelo método bilinear	296
6.8 - Cálculo prático de flechas em vigas	300
6.9 - Cálculo de flechas em vigas segundo a NBR-6118	303
6.10- Cálculo de flechas em vigas segundo o Eurocode 2	306
7. ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO	
Fissuração.....	311

7.1 - A colaboração do concreto entre fissuras	311
7.2 - Determinação da abertura das fissuras	321
7.3 - Verificação do estado limite de abertura das fissuras	326
7.4 - Verificação da abertura das fissuras através da limitação das tensões na armadura	331
7.5 - Armadura mínima para limitação das fissuras provocadas por deformações impostas	337
7.6 - Abertura das fissuras de acordo com a NBR-6118	346
7.7 – Modelos do MC-FIB 2010 e do EC2	349

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	351
----------------------------------	-----

APÊNDICE 1: CARGAS NAS EDIFICAÇÕES	355
--	-----

APÊNDICE 2: TABELAS PARA O CÁLCULO DE LAJES	361
---	-----

APÊNDICE 3: TABELAS PARA DETALHAMENTO DAS ARMADURAS.....	411
---	-----

Capítulo 1

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DAS LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO

1.1 - Tipos usuais de lajes dos edifícios

As lajes são os elementos estruturais que têm a função básica de receber as cargas de utilização das edificações, aplicadas nos pisos, e transmiti-las às vigas. As vigas transmitem as cargas aos pilares e, a partir destes, o carregamento é transferido para as fundações. Apesar de haver outras possibilidades de concepção, este é o modelo estrutural básico das edificações.

As lajes também servem para distribuir as ações horizontais entre os elementos estruturais de contraventamento, além de funcionarem como mesas de compressão das vigas T.

As lajes são elementos bidimensionais planos, cuja espessura h é bem inferior às outras duas dimensões (l_x, l_y), e são solicitadas, predominantemente, por cargas perpendiculares ao seu plano médio, conforme indicado na Fig. 1.1.1.

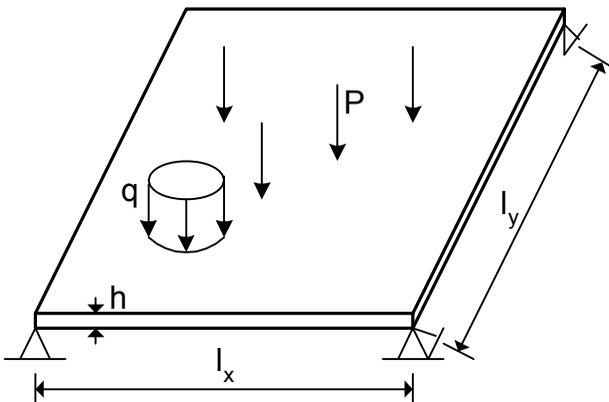


Fig. 1.1.1 - Carregamento das lajes

Os pisos das edificações podem ser executados com diferentes tipos de lajes, como as lajes maciças, as lajes nervuradas, as lajes cogumelo, além de diversos tipos de lajes pré-moldadas. A definição do tipo de laje a ser utilizado depende de considerações econômicas e de segurança, sendo uma função do projeto arquitetônico em análise.

As lajes maciças são placas de espessura uniforme, apoiadas ao longo do seu contorno. Os apoios podem ser constituídos por vigas ou por alvenarias, sendo este o tipo de laje predominante nos edifícios residenciais onde os vãos são relativamente pequenos.

Nota-se que o termo "laje" é empregado para designar as "placas" de concreto armado. Esses dois termos são utilizados indistintamente ao longo deste livro.

Na Fig. 1.1.2, representa-se um corte em um piso de concreto armado constituído por laje maciça apoiada em vigas.

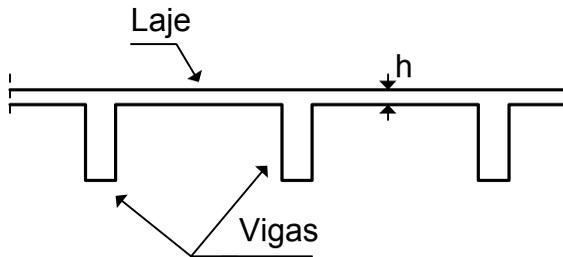


Fig. 1.1.2 - Laje maciça

As lajes nervuradas são empregadas para vencer grandes vãos, geralmente superiores a 8 m, sendo constituídas por nervuras, onde são colocadas as armaduras longitudinais de tração. Dessa maneira, consegue-se uma redução do peso próprio da laje, já que se elimina uma parte do concreto que ficaria na zona tracionada, caso fosse adotada a solução em laje maciça. Neste caso, as nervuras ficam aparentes, a menos que a face inferior da laje seja revestida com um forro. Alternativamente, o espaço entre as nervuras pode ser preenchido com algum material inerte de baixo peso específico, para tornar plana a superfície inferior da laje. As duas soluções são representadas na Fig. 1.1.3.

Lajes cogumelo são lajes apoiadas diretamente em pilares, resultando um piso sem vigas. Nessas lajes, o topo do pilar possui um

aumento de seção, denominado capitel, para aumentar a resistência à punção da laje. Quando o capitel não está presente, a laje é denominada de laje lisa. Essas duas situações são indicadas na Fig. 1.1.4.

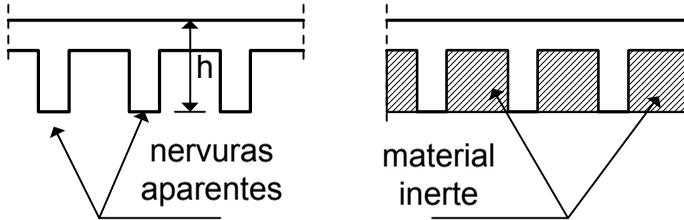


Fig. 1.1.3 - Lajes nervuradas

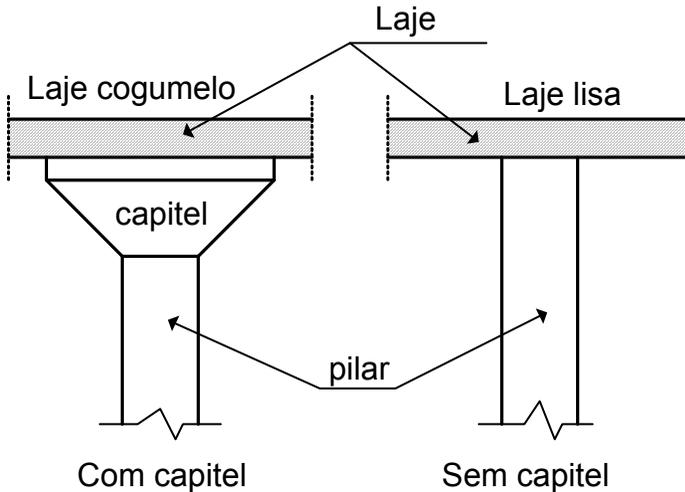


Fig. 1.1.4 - Laje cogumelo e laje lisa

Neste Volume 2, são consideradas apenas as lajes maciças dos edifícios. Os procedimentos de cálculo das lajes nervuradas, das lajes cogumelo e das lajes lisas são abordados no Volume 4.

1.2 - Vãos teóricos das lajes

Vão teórico ou vão de cálculo, l , é a distância entre os centros dos apoios. Nas lajes em balanço, o comprimento teórico é o comprimento da extremidade livre até o centro do apoio. Entretanto, de

mentos fletores nas duas direções são importantes e devem ser calculados. Para cada um deles, deve-se realizar o dimensionamento e dispor as armaduras nas direções correspondentes, conforme mostrado na Fig. 1.3.2.

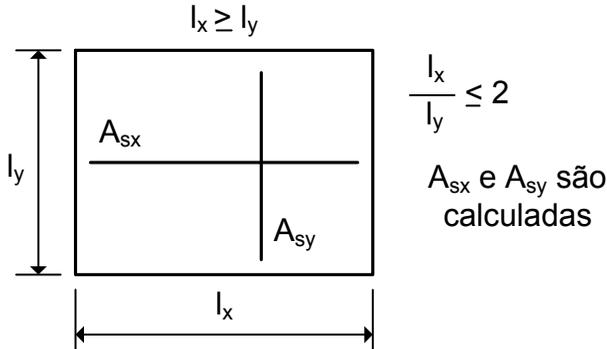


Fig. 1.3.2 - Laje armada em cruz (apoios rígidos)

2) Lajes armadas em uma direção

As lajes armadas em uma direção são aquelas em que a relação entre os vãos é superior a 2. Nesses casos, o momento fletor na direção do vão maior é pequeno e não necessita ser calculado, bastando adotar uma armadura de distribuição segundo essa direção.

Observa-se que, mesmo neste caso, a laje será armada nas duas direções. A diferença é que uma das armaduras é calculada e a outra (na direção do vão maior) é arbitrada. Assim, a rigor, o que se tem é uma laje *calculada em uma direção*. Entretanto, a denominação anterior já está consagrada [2,3] e, por isso, será mantida aqui.

Na Fig. 1.3.3, indica-se uma laje armada em uma direção, juntamente com a disposição das armaduras.

A rigor, essas considerações somente são verdadeiras para lajes apoiadas em apoios rígidos. Se a laje estiver apoiada em vigas flexíveis, como ocorre usualmente nos edifícios residenciais e de escritórios, a distribuição dos momentos fletores na laje depende da rigidez das vigas de apoio. Em alguns casos, o maior momento fletor na laje pode ocorrer segundo a direção do vão maior. Em outros, os dois momentos fletores podem ser da mesma ordem de grandeza, apesar de os vãos da laje serem muito diferentes. Logo, deve-se ter em mente que essa classificação das lajes pressupõe que as mesmas estejam apoiadas em apoios rígidos ou quase rígidos.

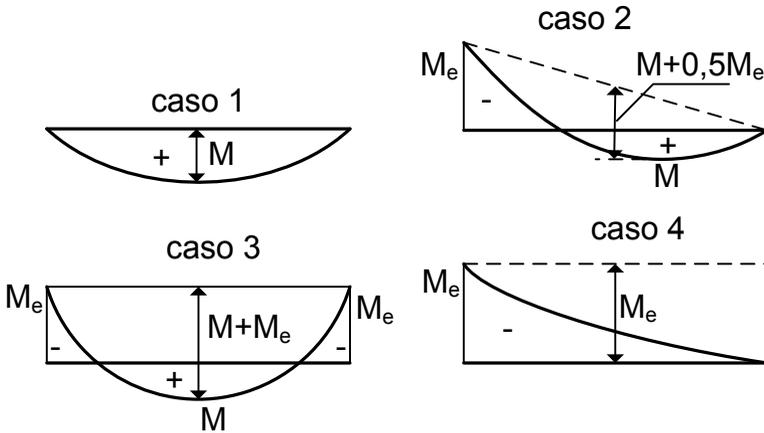


Fig. 1.5.4 – Momento total nas lajes, segundo a direção x

Entretanto, se as vigas V1 e V2 existirem, é usual considerar algum carregamento para o dimensionamento das mesmas. Assim, as reações de apoio R_x , nos lados menores das lajes armadas em uma direção, podem ser avaliadas como

$$R_x = \frac{pl_x}{4} \quad (1.5.8)$$

para todos os casos da Fig. 1.5.1.

A reação R_x , considerada como uma carga uniformemente distribuída sobre as vigas de apoio, pode ser ignorada para o cálculo dos pilares, pois ela representa uma carga adicional.

Deve ser salientado que o procedimento sugerido pode ser empregado para lajes apoiadas em vigas rígidas e em vigas flexíveis. Se as vigas forem rígidas, as reações de apoio não serão uniformes, mas o equilíbrio do pavimento fica garantido, como foi demonstrado.

No caso de lajes sobre apoios rígidos, também se pode lançar mão da teoria das linhas de ruptura para o cálculo das reações de apoio. Os princípios básicos dessa teoria são apresentados no capítulo 3, sendo aqui apenas indicado o esquema de distribuição das cargas da laje para os apoios.

De acordo com essa teoria, no momento da ruptura a laje fica dividida em dois trapézios e dois triângulos, como indicado na Fig.

1.5.5 para o caso 1. Esses quatro pedaços da laje ficam pendurados nas vigas de borda, como se fossem quatro lajes em balanço. As reações de apoio também apresentam variações trapezoidais e triangulares, como está representado na Fig. 1.5.5.

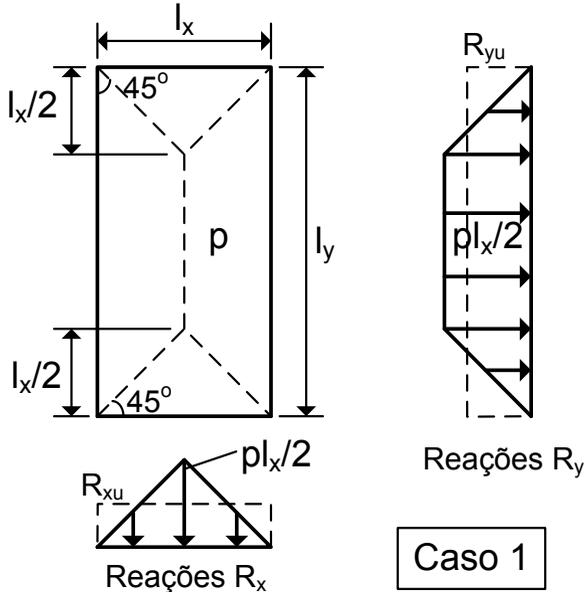


Fig. 1.5.5 - Reações de apoio segundo a teoria das linhas de ruptura

No caso das lajes armadas segundo a direção x ($l_y > 2l_x$), a laje sozinha resiste ao momento total $M_{x,tot}$, o que já se comprovou. Neste caso, a forma como se consideram as reações R_x distribuídas sobre os lados menores não tem importância. Assim, pode-se considerar a reação uniforme R_{xu} , cujo valor é dado na equação (1.5.8).

Entretanto, o momento total $M_{y,tot}$ deve ser resistido, quase que exclusivamente, pelas vigas da direção y . Isto é necessário porque a laje terá uma armadura reduzida segundo a direção y , a denominada armadura de distribuição. Neste caso, as vigas da direção y devem ser calculadas considerando a carga trapezoidal indicada na Fig. 1.5.5. Se for considerada a carga uniforme R_{yu} , como é usual

onde P_a é o peso de 1 m de parede, dado na equação (1.7.2).

Além disso, deve-se prever uma armadura transversal adicional para o momento transversal M_y , o qual, em $l_x/2$, é aproximadamente igual a M_x . Essa armadura deve ser disposta em todo o vão, podendo ter um comprimento de $0,6l_x$. Assim, na região da parede deve ser disposta uma armadura adicional, em malha, para o momento dado na equação (1.7.3).

Na Fig. 1.7.6, indica-se a faixa de reforço e a distribuição da armadura [5].

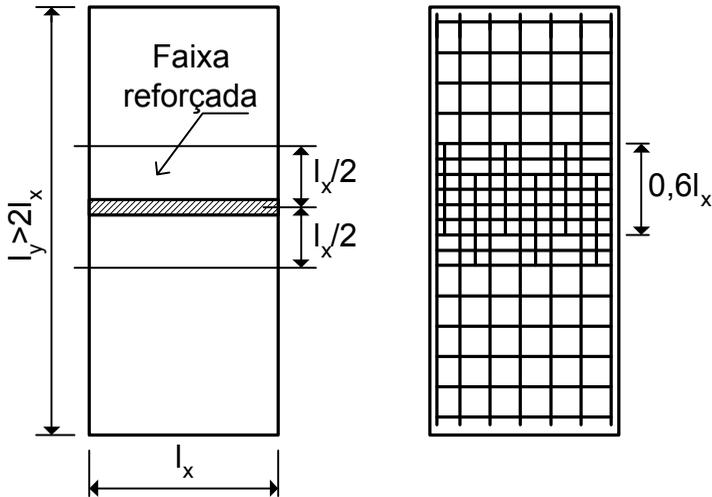


Fig. 1.7.6 - Distribuição da armadura de reforço

B) Cargas variáveis

As cargas variáveis são aquelas que atuam nas estruturas das edificações em função do seu uso. As cargas verticais que se consideram atuando nos pisos das edificações referem-se ao peso de pessoas, móveis, utensílios e veículos, além daquelas que se aplicam em caráter especial, sendo supostas uniformemente distribuídas. Os valores mínimos dessas cargas são fornecidos na NBR-6120 e constam na Tabela A1.2 do Apêndice 1.

Capítulo 2

TEORIA DE FLEXÃO DE PLACAS

2.1 - Algumas relações da teoria da elasticidade

Antes de demonstrar a equação de equilíbrio das placas, é conveniente apresentar algumas importantes relações da teoria da elasticidade [6]. Essas relações são apresentadas para um corpo tridimensional, submetido às ações externas. Posteriormente, elas são particularizadas para as placas finas. Apenas o caso de deformações infinitesimais é considerado.

Para descrever o estado tridimensional de tensões em um corpo, considera-se o elemento infinitesimal em forma de um paralelepípedo de dimensões dx , dy , dz , cujas faces são paralelas aos planos de coordenadas, como representado na Fig. 2.1.1. Nessa figura, são indicadas as componentes das tensões nas três faces visíveis do elemento.

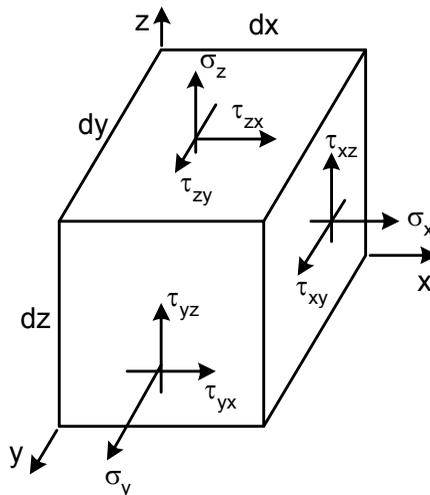


Fig. 2.1.1 - Tensões em um elemento tridimensional

As componentes das tensões normais nas direções x , y e z são designadas por σ_x , σ_y e σ_z , respectivamente. As tensões tangenciais, τ , são identificadas através de dois índices. O primeiro índice refere-se à direção da normal à superfície onde atua a tensão, enquanto o segundo índice indica a direção da tensão. Por exemplo, a componente τ_{xy} tem a direção do eixo y e atua na face cuja normal tem a direção x . Todas as componentes das tensões são consideradas positivas quando atuarem na direção positiva do sistema de eixos de coordenadas.

O estado de tensões em um ponto do corpo é definido pelas nove componentes do tensor de tensões, dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Uma vez que o tensor de tensões é simétrico, resulta

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.1.2)$$

que é a denominada lei da reciprocidade das tensões de cisalhamento.

Os deslocamentos de um ponto genérico do corpo são designados por suas componentes u , v e w , segundo as direções x , y e z , respectivamente. Para relacionar os deslocamentos com as deformações, considera-se a Fig. 2.1.2, onde se apresenta apenas a projeção do elemento tridimensional no plano $x - y$.

Em decorrência das tensões tangenciais, as faces do elemento sofrem rotações. A face AB sofre uma rotação γ_1 , passando para a posição A'B'. A face AC sofre uma rotação γ_2 , passando para a posição A'C'. Além disso, as dimensões iniciais do elemento, dx e dy , ficam alteradas por causa das tensões normais.

O comprimento dx' da projeção de A'B' sobre o eixo x é igual a

$$dx' = (1 + u_{,x})dx \quad (2.1.3)$$

onde

$$u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1.4)$$

Por definição, a deformação normal na direção x é igual a

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1.5)$$

A deformação por corte γ_{xy} é igual à distorção do elemento, dada por

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = v_{,x} + u_{,y} \quad (2.1.6)$$

A equação (2.1.6) é escrita na forma

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1.7)$$

quando se emprega a notação clássica para as derivadas parciais.

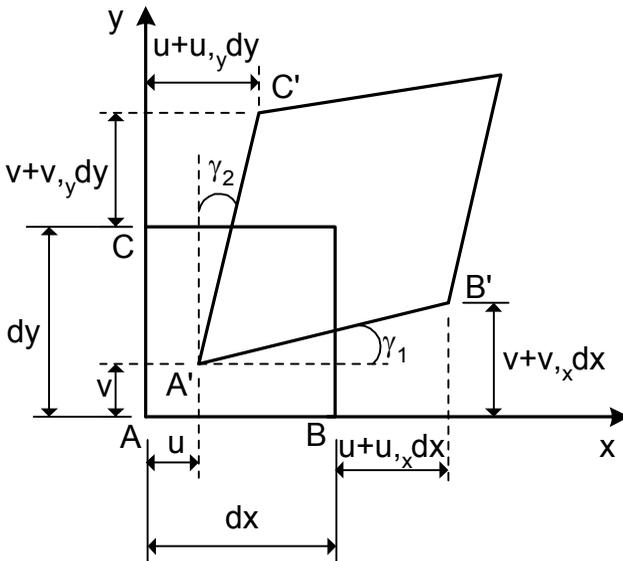


Fig. 2.1.2 - Deformações do elemento no plano $x-y$

Considerando as três componentes de deslocamentos, obtêm-se as seguintes relações deformações-deslocamentos:

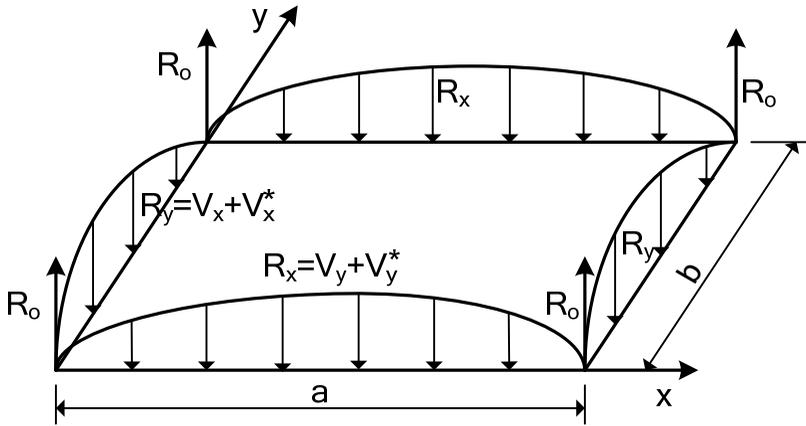


Fig. 2.4.3 – Carregamento nas vigas de apoio da placa

As expressões das reações de apoio R_x e R_y , bem como das forças R_o concentradas nos cantos, podem ser facilmente obtidas empregando-se a solução de Navier.

Com a distribuição do carregamento indicado na Fig. 2.4.3, podem-se determinar os momentos fletores máximos M_{vx} e M_{vy} nas vigas das direções x e y , respectivamente. Essas vigas são consideradas simplesmente apoiadas nos pilares situados nos cantos da laje.

Substituindo $x = a/2$ na expressão do momento fletor M_x , dada em (2.4.5), obtém-se a função $M_x(y)$, que fornece a variação do momento fletor M_x ao longo do vão b , no centro da laje. Integrando $M_x(y)$ de 0 a b , obtém-se o momento total na laje M_{lx} , segundo a direção x . De forma análoga, pode-se obter o momento total na laje M_{ly} , segundo a direção y .

Pode-se comprovar que

$$M_{lx} + 2M_{vx} = pb \frac{a^2}{8} ; M_{ly} + 2M_{vy} = pa \frac{b^2}{8} \quad (2.4.11)$$

$$M_{y,tot} = M_{ly} + 2M_{vy} = 12,28 + 2 \times 5,11 = 22,50 \text{ kNm}$$

ficando garantido o equilíbrio do pavimento.

2) Laje retangular engastada em um lado, submetida a uma carga uniformemente distribuída

Considere-se a laje anterior engastada no lado $l = 4 \text{ m}$. Esta laje pode ser calculada empregando-se a Tabela A2.2 do Apêndice 2.

Neste caso, l_x será sempre o vão perpendicular ao lado engastado, conforme está indicado na tabela. Portanto, os vãos de cálculo são $l_x = 3 \text{ m}$ e $l_y = 4 \text{ m}$, como mostrado na Fig. 2.6.4, devendo-se utilizar a parte superior da Tabela A2.2.

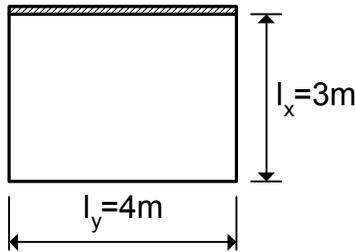


Fig. 2.6.4 - Laje retangular engastada em um lado e simplesmente apoiada nos demais (carga uniforme)

Entrando na tabela com a relação $l_x/l_y = 0,75$, obtêm-se os coeficientes, com os quais são calculados:

$$W_o = 0,001w_c \frac{pl_x^4}{D} = 0,001 \times 3,86 \times \frac{5,0 \times 3^4}{2475} \Rightarrow W_o = 0,06 \text{ cm}$$

$$M_{xe} = 0,001m_{xe} pl_x^2 = 0,001(-105,0) \times 5,0 \times 3^2 = -4,73 \text{ kNm/m}$$

$$M_x = 0,001m_x pl_x^2 = 0,001 \times 49,1 \times 5,0 \times 3^2 = 2,21 \text{ kNm/m}$$

$$M_y = 0,001m_y pl_x^2 = 0,001 \times 25,9 \times 5,0 \times 3^2 = 1,17 \text{ kNm/m}$$

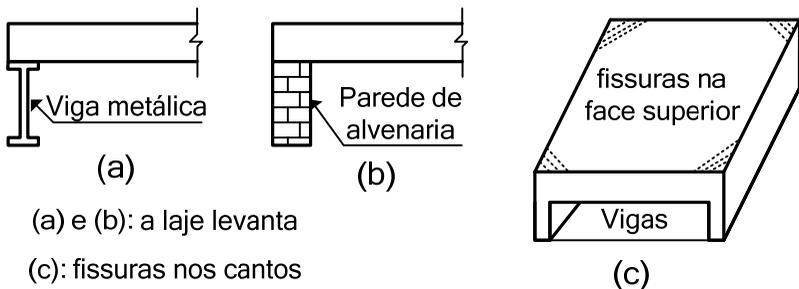
$$M_{xy} = 0,001m_{xy} pl_x^2 = 0,001 \times 34,2 \times 5,0 \times 3^2 = 1,54 \text{ kNm/m}$$

Capítulo 3

MÉTODOS SIMPLIFICADOS E MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O CÁLCULO DE LAJES

3.1 – A teoria das grelhas para lajes sobre apoios rígidos

O cálculo das lajes armadas em cruz que não possuam rigidez à torção, ou que não sejam suficientemente ancoradas nos cantos para evitar o seu levantamento, pode ser feito de maneira simplificada por meio da denominada “Teoria das Grelhas”. Esse método também pode ser empregado para as lajes usuais, concretadas monoliticamente com as vigas, quando não são usadas armaduras de canto na face superior da laje. Esses casos são ilustrados na Fig. 3.1.1.



(a) e (b): a laje levanta

(c): fissuras nos cantos

Fig. 3.1.1 – Situações onde se aplica a teoria das grelhas

Nas lajes concretadas monoliticamente com as vigas, deve-se verificar se a ocorrência de eventuais fissuras nos cantos simplesmente apoiados, como consequência da ausência das armaduras de canto na face superior da laje, pode comprometer a durabilidade da estrutura. Isto é particularmente importante quando a laje está ao ar livre, sujeita à ação da chuva.

Para as lajes situadas no interior dos edifícios residenciais e de escritório, essas fissuras, quando existem, ficam protegidas pelo piso. Nesses casos, podem-se omitir as armaduras de canto, para simplifi-

car a execução. De todo modo, em lajes com grandes vãos, é recomendável empregar uma armadura mínima nos cantos simplesmente apoiados para controle da fissuração.

Considere-se, para exemplificar, a laje simplesmente apoiada nos quatro lados, indicada na Fig. 3.1.2. A laje é submetida a uma carga p , uniformemente distribuída por unidade de área. Os vãos são l_x e l_y e os apoios são considerados indeformáveis.

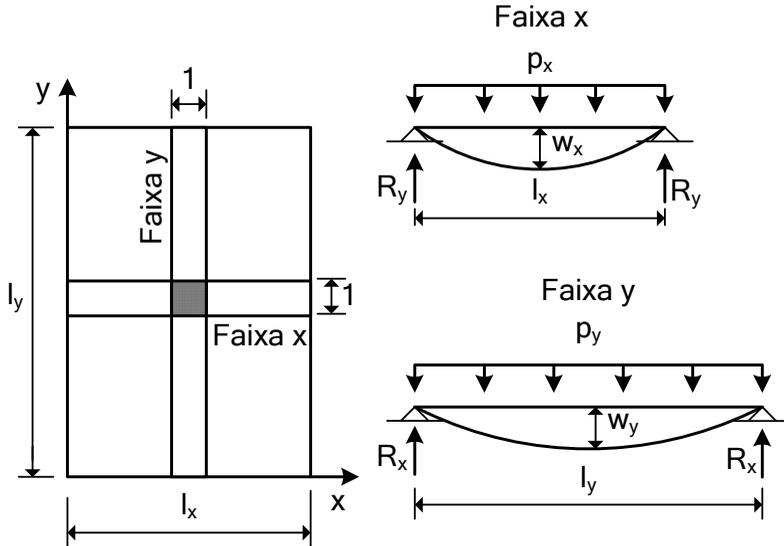


Fig. 3.1.2 - Laje simplesmente apoiada nos quatro lados

Inicialmente, consideram-se duas faixas de largura unitária, uma em cada direção, as quais se cruzam no centro da laje. A carga total p é dividida nos quinhões de carga p_x e p_y , correspondentes às direções x e y , respectivamente.

Os quinhões de carga devem obedecer à relação

$$p = p_x + p_y \quad (3.1.1)$$

A flecha no centro da faixa da direção x , sob a ação da carga p_x , é dada por

$$W_x = \frac{5}{384} \frac{p_x l_x^4}{D} \quad (3.1.2)$$

onde D é a rigidez à flexão da faixa de largura unitária.

Analogamente, a flecha no centro da faixa da direção y é dada por

$$W_y = \frac{5}{384} \frac{p_y l_y^4}{D} \quad (3.1.3)$$

sendo p_y o quinhão de carga correspondente.

Uma vez que a flecha no centro da laje tem um valor único, a condição de continuidade é escrita na forma

$$W_x = W_y \quad (3.1.4)$$

Introduzindo (3.1.2) e (3.1.3) na equação (3.1.4), chega-se a

$$p_x l_x^4 = p_y l_y^4 \quad (3.1.5)$$

Da equação (3.1.1), tem-se que

$$p_y = p - p_x \quad (3.1.6)$$

Substituindo (3.1.6) em (3.1.5), resulta

$$p_x = \left(\frac{l_y^4}{l_x^4 + l_y^4} \right) p \quad (3.1.7)$$

As equações (3.1.6) e (3.1.7) permitem calcular os quinhões de carga.

Definindo a relação entre os vãos como

$$\lambda = l_y / l_x \quad (3.1.8)$$

pode-se escrever

$$p_x = k_x p \quad ; \quad p_y = k_y p \quad (3.1.9)$$

onde

$$k_x = \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} \quad ; \quad k_y = 1 - k_x \quad (3.1.10)$$

aumento dos momentos fletores positivos e das flechas das lajes. Por outro lado, ocorre uma redução dos momentos negativos, como é ilustrado na Fig. 3.2.1.

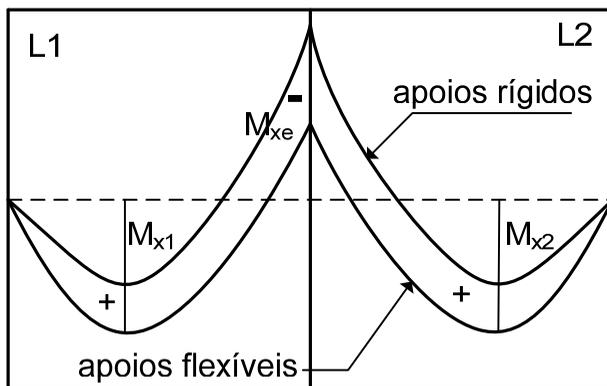


Fig. 3.2.1 - Redistribuição dos momentos fletores nas lajes devido às deformações das vigas de apoio

Os valores corretos dos momentos fletores e da flecha da laje dependem da relação entre a rigidez das vigas e a rigidez da laje. Esses valores só podem ser obtidos através de uma análise acoplada do pavimento, empregando-se, por exemplo, o método dos elementos finitos. Quando o projeto é feito separando-se as lajes das vigas, é necessário estabelecer uma relação entre os momentos negativos e os momentos positivos, para levar em conta as deformações das vigas de apoio. Essa relação deve ser menor do que a que ocorre para lajes sobre apoios rígidos (de 1,78 a 2,00 como foi visto anteriormente).

Há diversas alternativas para se obter a distribuição de esforços na laje, considerando, de maneira aproximada, a influência das deformações das vigas de apoio. Algumas dessas alternativas são apresentadas a seguir.

1) Teoria das grelhas com redistribuição de momentos

As soluções da teoria das grelhas, apresentadas anteriormente, podem ser modificadas para levar em conta as deformações das vigas, fazendo-se uma redistribuição de momentos. Para isso, deve-se estabelecer um grau de redistribuição $\beta < 1$, de modo que os mo-

5,83	5,22	7,10	5,22	5,83
5,83	5,22	7,10	5,22	5,83
3,95	4,54	5,49	4,54	3,95
3,95	4,54	5,49	4,54	3,95
5,00	5,00	6,46	5,00	5,00
5,00	5,00	6,46	5,00	5,00

Reações de apoio em kN/m

Fig. 3.2.7 – Reações de apoio das lajes
(teoria de placas – método alternativo)

Tabela 3.2.2 – Flechas das lajes do pavimento (em mm)
(teoria de placas – método alternativo)

Laje	W_o	W_∞	W_{adm}
L1	2,4	8,4	16,0
L2	5,6	19,6	20,0
L3	2,4	8,4	16,0
L4	0,9	3,2	12,0
L5	1,3	4,6	12,0
L6	0,9	3,2	12,0
L7	1,6	5,6	16,0
L8	3,1	10,9	16,0
L9	1,6	5,6	16,0

3) Método da norma espanhola

De acordo com a norma espanhola EH-91 [14], os momentos fletores das lajes semiengastadas podem ser obtidos pela teoria de placas, de acordo com o seguinte procedimento:

3.4 - Teoria das linhas de ruptura

A teoria das linhas de ruptura, introduzida por K. W. Johansen, é uma alternativa para o cálculo de esforços e reações em lajes. Empregando esse método, é possível determinar os momentos de ruína que serão utilizados para o dimensionamento das lajes de diferentes formas, condições de contorno e carregamentos.

Em seu surgimento, o método teve uma grande aceitação pela possibilidade de se calcular lajes de formas irregulares, o que era praticamente impossível à época. Atualmente, a teoria das linhas de ruptura perdeu importância, em virtude da disponibilidade de recursos computacionais e de métodos numéricos mais avançados, como o método dos elementos finitos.

A teoria das linhas de ruptura, também denominada de teoria das charneiras plásticas [15], considera o equilíbrio da laje no momento que antecede a ruína, ou seja, no estado limite último. A teoria não permite analisar o comportamento da laje nas condições de serviço, o que é uma das desvantagens em relação às soluções elásticas. Além disso, é necessário preestabelecer relações entre os momentos de ruína. Se essas relações forem muito diferentes daquelas obtidas pela teoria elástica, o comportamento da laje sob as cargas de serviço será insatisfatório. Entretanto, alguns resultados dessa teoria ainda são bastante empregados, principalmente para o cálculo das reações de apoio das lajes.

A NBR-6118 permite o emprego da teoria das linhas de ruptura quando as deformações das seções da laje estiverem nos domínios 2 ou 3 (peças subarmadas ou normalmente armadas).

Para a garantia de uma ductilidade apropriada, deve-se ter $x/d \leq 0,30$, onde x é a profundidade da linha neutra e d é a altura útil das seções da laje. Essas seções apresentam uma relação momento fletor-curvatura conforme indicado na Fig. 3.4.1.

A relação momento-curvatura é linear, enquanto a seção estiver no Estádio I. Após a fissuração, ocorre uma queda de rigidez, mas o diagrama permanece aproximadamente linear até o escoamento da armadura. A partir deste ponto, o momento fletor praticamente não se altera, apesar do crescimento da curvatura. O momento de ruína da seção vale M_u .

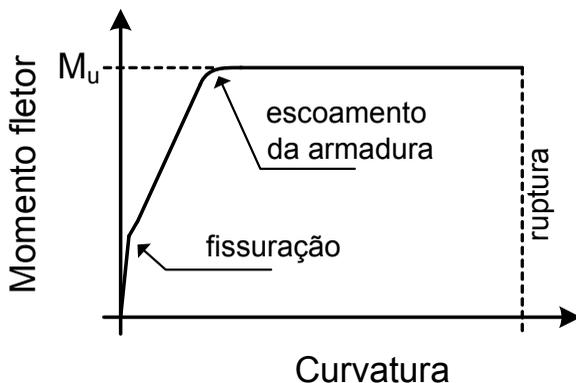


Fig. 3.4.1 - Relação momento-curvatura para seções subarmadas ou normalmente armadas

Conforme se observa, a curvatura elástica, acumulada até o início do escoamento da armadura, é pequena em relação à curvatura de ruína. Assim, na teoria das linhas de ruptura as deformações elásticas são desprezadas, adotando-se o comportamento rígido-plástico da Fig. 3.4.2.

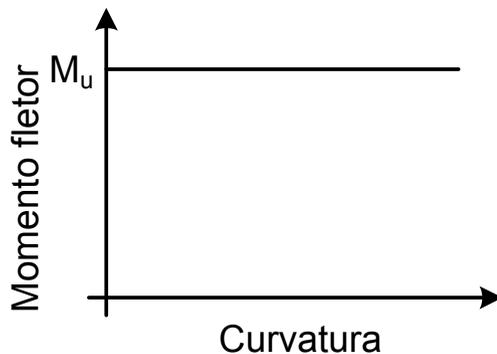


Fig. 3.4.2 - Modelo rígido-plástico idealizado

O momento de ruína de uma seção de concreto armado em flexão simples é aproximadamente proporcional à área da armadura longitudinal de tração. Assim, se as áreas das armaduras por unidade de comprimento nas direções x e y da laje são A_{sx} e A_{sy} , os momentos de ruína correspondentes são dados por

O momento fletor na direção y é dado por $M_y = kM_x$.

Observa-se que os resultados são dependentes do parâmetro k . Para que a relação entre os dois momentos seja próxima daquela obtida no cálculo elástico, deve-se adotar [2]

$$k = (l_x/l_y)^2 \tag{3.4.19}$$

As resultantes das reações de apoio são iguais ao produto da carga pelas áreas dos painéis em que a laje se divide. Se as vigas de apoio forem rígidas, essas reações apresentarão as distribuições triangulares e trapezoidais, como está indicado na Fig. 3.4.6. Assim como ocorre na teoria de placas, a uniformização dessas reações não garante o equilíbrio dos momentos totais.

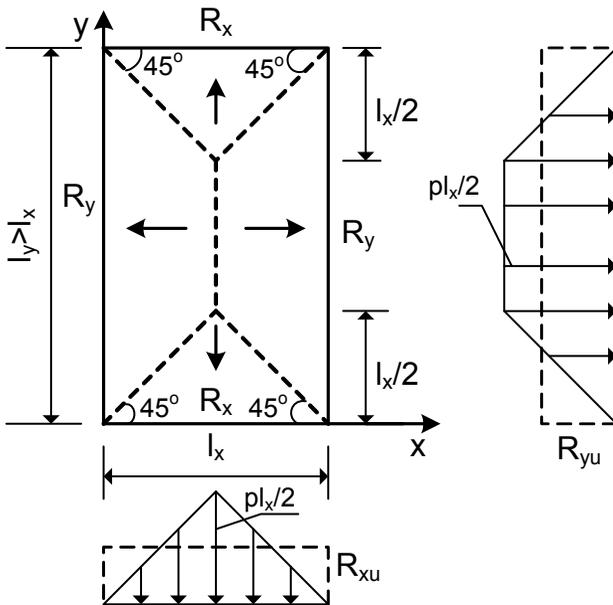


Fig. 3.4.6 - Cálculo das reações de apoio

A área dos triângulos indicados na Fig. 3.4.6 é dada por

$$A_{II} = l_x^2 / 4 \tag{3.4.20}$$

3.5 – A analogia da grelha equivalente

A analogia da grelha equivalente é um dos métodos numéricos mais utilizados para análise de lajes de concreto armado, estando implementado em diversos softwares comerciais. O método pode ser utilizado para a análise de lajes poligonais de formas diversas, incluindo também as vigas de apoio. Desse modo, podem-se calcular os esforços no pavimento como um todo, levando-se em conta as deformações das vigas. Para o caso de lajes poligonais isoladas sobre apoios rígidos, o método foi implementado em um dos módulos do software PACON*.

Inicialmente, a laje poligonal é discretizada através de dois conjuntos de linhas uniformemente espaçadas, como mostrado na Fig. 3.5.1. Essas linhas formam uma grelha equivalente que substitui a laje maciça de forma aproximada.

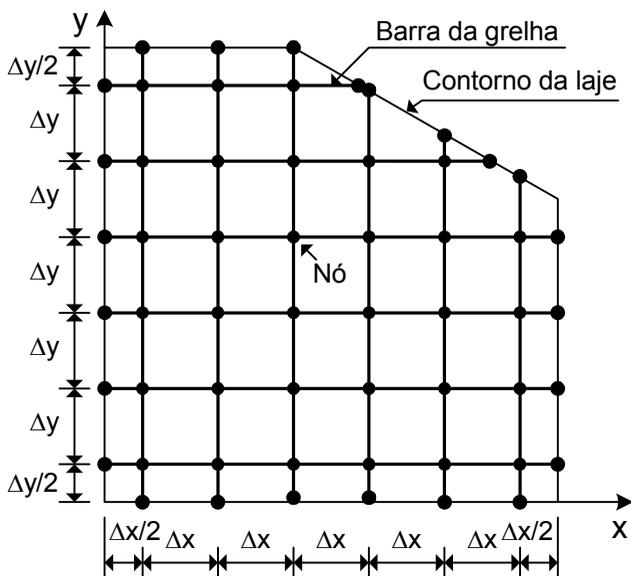


Fig. 3.5.1 – Discretização da laje poligonal

* Programa auxiliar para projeto de estruturas de concreto. Desenvolvido pelo Autor. Informações disponíveis em: <www.editoradunas.com.br>.

Observa-se que os resultados obtidos com o método numérico (grelha equivalente) para $\beta = 1$ concordam muito bem com a teoria de placas. Reduzindo-se o valor de β , os resultados se aproximam daqueles fornecidos pela teoria das grelhas, apresentada na seção 3.1. Entretanto, pode-se verificar que o único método que garante o equilíbrio dos momentos totais nas duas direções é a teoria das grelhas, já que na teoria de placas as reações não podem ser consideradas uniformemente distribuídas.

Na Tabela 3.5.2, indicam-se as cargas reais (V e T) transferidas para as vigas da direção x , obtidas com a analogia da grelha equivalente. Analisando-se as vigas submetidas a essas duas cargas concentradas, pode-se calcular o momento total resistente do pavimento e comprovar que o equilíbrio é garantido.

Tabela 3.5.2 – Ações da grelha sobre as vigas da direção x

x (m)	$\beta = 1,00$		$\beta = 0,50$		$\beta = 0,01$	
	V (kN)	T (kNm)	V (kN)	T (kNm)	V (kN)	T (kNm)
0,29	1,31	1,21	1,30	0,75	1,30	0,02
0,86	2,75	0,85	2,83	0,54	2,96	0,01
1,43	3,38	0,43	3,56	0,27	3,84	0,01
2,00	3,56	0,00	3,78	0,00	4,12	0,00
2,57	3,38	-0,43	3,56	-0,27	3,84	-0,01
3,14	2,75	-0,85	2,83	-0,54	2,96	-0,01
3,71	1,31	-1,21	1,30	-0,75	1,30	-0,02

3.6 - O método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas é um método numérico que leva a uma solução aproximada da equação diferencial da placa [7,8]. Neste método, as derivadas que aparecem na equação diferencial são substituídas por aproximações em diferenças, tomadas em alguns pontos previamente selecionados, denominados pontos nodais. Esses pontos são localizados nos nós de uma malha retangular, triangular ou de outra forma, denominada malha de diferenças finitas. Alguns tipos de malhas de diferenças finitas são mostrados na Fig. 3.6.1.

A função $w(x, y)$, que representa a superfície deformada da placa, é descrita por valores aproximados da deflexão nos diversos

pontos nodais. Quanto mais refinada for a malha, ou seja, quanto maior o número de pontos nodais, menor será o erro obtido.

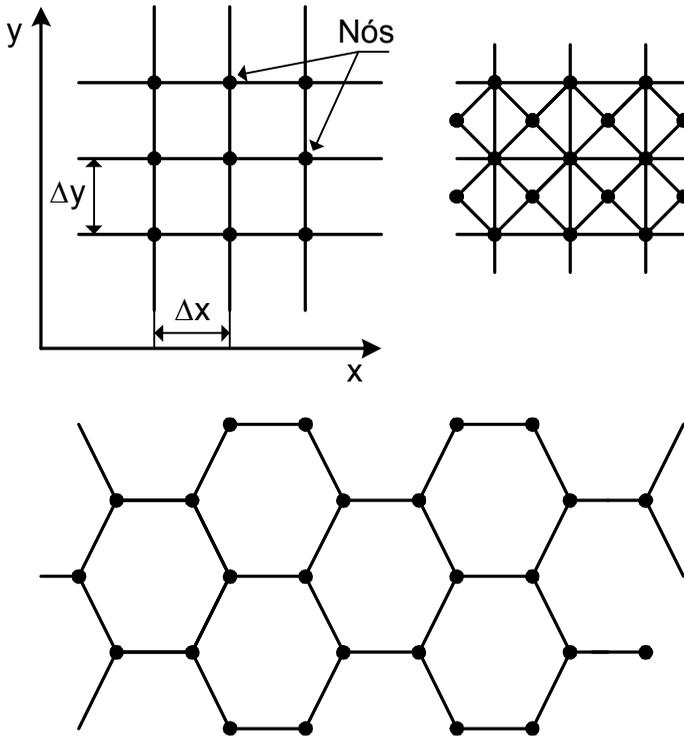


Fig. 3.6.1 - Tipos de malhas de diferenças finitas

Antes de apresentar as equações de diferenças finitas para a placa, é conveniente analisar o caso unidimensional indicado na Fig. 3.6.2. Nessa figura, representa-se uma função $f(x)$ cujos valores são conhecidos em um conjunto de pontos discretos.

A função $f(x)$ pode ser interpolada através do polinômio

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i \quad (3.6.1)$$

onde os coeficientes a_i são determinados de forma que $\phi(x) = f(x)$ nos pontos em que a função original é conhecida.

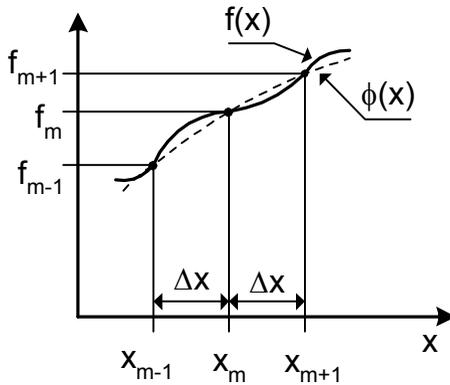


Fig. 3.6.2 - Aproximação de função

Por exemplo, se $k = 1$, a função original será substituída por segmentos de reta. Adotando $k = 2$, a função será aproximada por várias parábolas do segundo grau, na forma

$$\phi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \tag{3.6.2}$$

Adotando-se o método das diferenças finitas centrais, as parábolas são construídas tendo como origem da coordenada x os pontos $x_1, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \dots, x_r$ em que a função é conhecida. Se os pontos forem igualmente espaçados, como indicado na Fig. 3.6.2, a parábola centrada no ponto m é dada por

$$\phi(x) = f_m + \left(\frac{f_{m+1} - f_{m-1}}{2\Delta x} \right)x + \left(\frac{f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}}{2\Delta x^2} \right)x^2 \tag{3.6.3}$$

e $\phi(-\Delta x) = f_{m-1}$; $\phi(0) = f_m$; $\phi(\Delta x) = f_{m+1}$.

A primeira derivada da função original $f(x)$ no ponto m é aproximada por

$$f'(x)_m \cong \phi'(0) = \frac{1}{2\Delta x} (f_{m+1} - f_{m-1}) \tag{3.6.4}$$

e a segunda derivada é dada por

3.7 - O método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos [16] é um método numérico que também pode ser empregado para a análise de placas. Atualmente, esse método é bastante utilizado para resolver diversos problemas de interesse da Engenharia, como análise estrutural, fluxo de fluidos, condução de calor, dispersão de poluentes, etc. O grande atrativo do método é a generalidade da formulação, o que permite que um conjunto de rotinas de cálculo possa ser utilizado para resolver problemas diferentes.

No caso da análise estrutural, o método pode ser empregado tanto na formulação em deslocamentos quanto na formulação em forças. Essas duas formulações são análogas aos bem conhecidos método da rigidez e método das forças, utilizados na análise de estruturas reticuladas.

A formulação em deslocamentos tem sido preferida em virtude da facilidade de implementação computacional. Assim, em análise estrutural utiliza-se, quase que exclusivamente, a formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos. Essa formulação é baseada no princípio dos trabalhos virtuais, apresentado a seguir para o caso bidimensional.

O primeiro passo do método dos elementos finitos consiste na subdivisão do domínio do problema em um conjunto de pequenos elementos, denominados elementos finitos. O domínio discretizado forma uma malha de elementos finitos. No caso bidimensional (placas e chapas), podem ser empregados os elementos mostrados na Fig. 3.7.1.

Cada elemento é definido por sua geometria e pelo número de nós. Assim, têm-se os elementos triangulares de três e de seis nós, os elementos retangulares de quatro e de oito nós e os elementos isoparamétricos. Esses últimos são elementos distorcidos, que permitem uma boa modelagem de domínios irregulares.

Em geral, um aumento progressivo do número de nós melhora as características de precisão do elemento. Conseqüentemente, a malha terá que ser mais refinada, quando for utilizado um elemento com poucos nós.

Na Fig. 3.7.2, representa-se um corpo bidimensional discretizado em elementos triangulares de três nós. O corpo é submetido às

forças t_x e t_y por unidade de área e às forças b_x e b_y por unidade de volume.

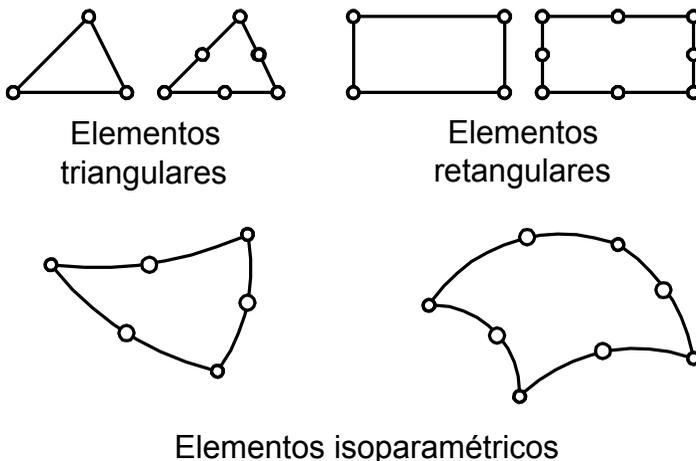


Fig. 3.7.1 - Elementos finitos para análise bidimensional

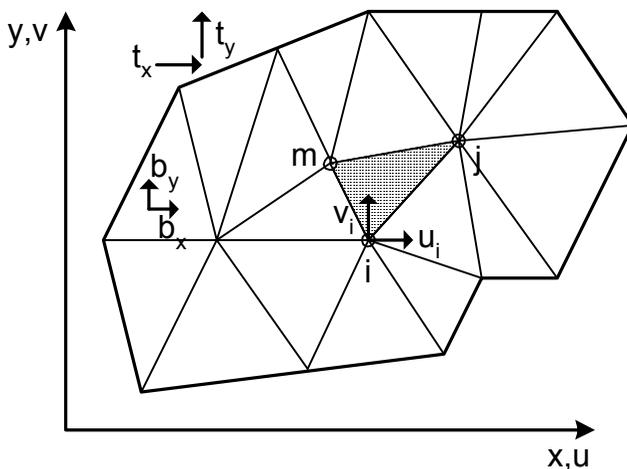


Fig. 3.7.2 - Malha de elementos finitos

Os deslocamentos de um ponto genérico dentro de um elemento finito são dados por

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.7.1)$$

onde u e v são as componentes do deslocamento nas direções x e y , respectivamente.

Esses deslocamentos podem ser obtidos, aproximadamente, através de uma interpolação dos deslocamentos nodais, na forma

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \cong \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (3.7.2)$$

onde u_i, v_i, \dots representam os deslocamentos nodais e N_i, N_j, N_m são as funções de interpolação do elemento.

Usualmente, as funções de interpolação são polinômios das coordenadas cartesianas x e y .

Substituindo (3.7.2) em (3.7.1), tem-se a aproximação

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U}_e \quad (3.7.3)$$

onde \mathbf{N} é uma matriz com as funções de interpolação e \mathbf{U}_e é o vetor com os deslocamentos nodais do elemento.

As deformações em um ponto do elemento são obtidas por diferenciação dos deslocamentos (ver equações (2.1.8) e (2.1.9) do capítulo 2). No caso bidimensional, pode-se escrever

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.7.4)$$

Mindlin, sendo empregado o elemento isoparamétrico quadrático de oito nós mostrado na Fig. 3.7.1. Em cada nó, consideram-se os cinco graus de liberdade mencionados anteriormente.

Nos exemplos seguintes, admite-se que o material seja elástico linear, tendo um módulo de elasticidade $E = 2880 \text{ kN/cm}^2$ e um coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$.

Exemplo 1) Laje com engastamento parcial

Na Fig. 3.8.1, representa-se uma laje com continuidade parcial ao longo de um bordo. A laje L1 possui continuidade com a laje L2 no trecho de comprimento a . Porém, não há continuidade no restante do bordo, porque a laje L3 é rebaixada ou inexistente. A carga é uniformemente distribuída.

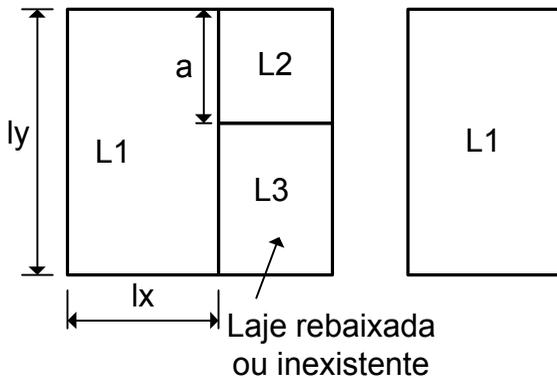


Fig. 3.8.1 - Laje com continuidade parcial em um bordo

Fazendo o cálculo da laje L1 isoladamente, ela será engastada no trecho de comprimento a e simplesmente apoiada no restante do bordo. Empregando o método dos elementos finitos, podem-se calcular os momentos fletores M_x e M_y no centro da laje L1, considerando esse engastamento parcial.

Interessa saber para que valores de a a laje pode ser calculada como se todo o bordo fosse engastado. Os momentos fletores obtidos com essa hipótese são designados por M_{xt} e M_{yt} .

Nas figuras 3.8.2 e 3.8.3, são representadas as variações dos coeficientes $C_x = M_x/M_{xt}$ e $C_y = M_y/M_{yt}$ em função da relação a/l_y . Observa-se que, para $a/l_y \geq 2/3$, os coeficientes são próximos da unidade.

Logo, para efeito de cálculo dos momentos positivos, o bordo da laje, onde há continuidade parcial, pode ser considerado como:

- apoio simples, se $a/l_y < 2/3$;
- engaste perfeito, se $a/l_y \geq 2/3$.

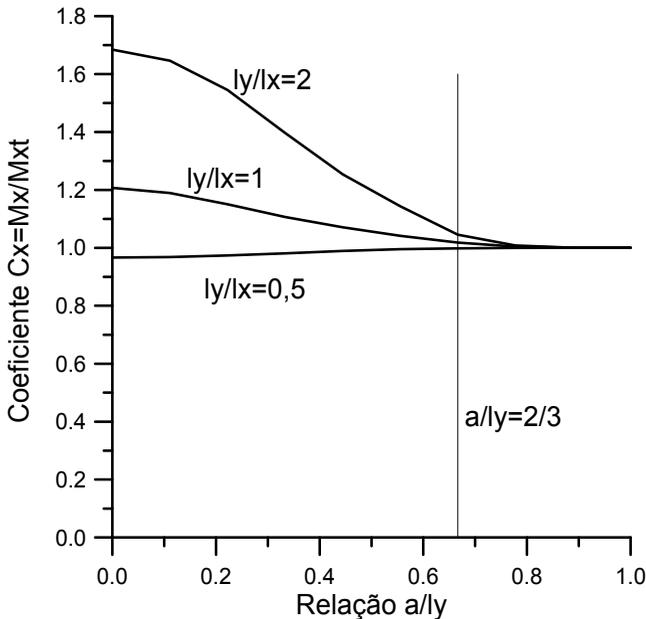


Fig. 3.8.2 - Variação do coeficiente C_x

Exemplo 2) Laje com um bordo parcialmente apoiado

Considere-se, agora, uma laje com um bordo parcialmente apoiado, como indicado na Fig. 3.8.4. A laje é simplesmente apoiada, exceto no trecho de comprimento a . Nessa figura, M_x e M_y representam os momentos fletores no centro da laje e M_{y0} é o momento fletor no bordo livre. A carga é uniformemente distribuída.

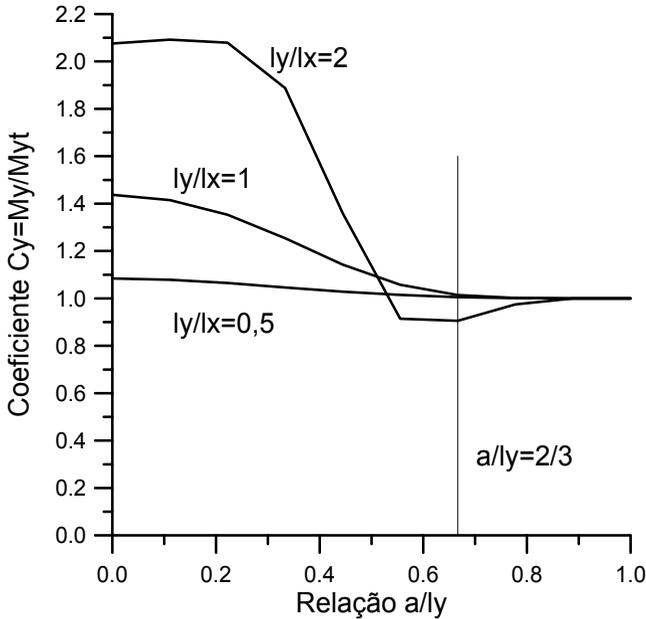


Fig. 3.8.3 - Variação do coeficiente C_y

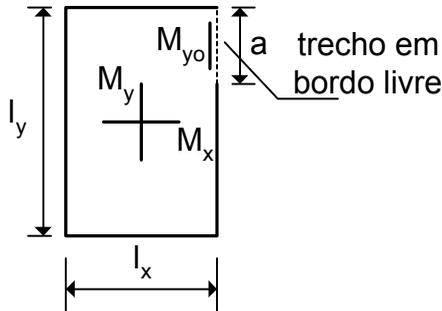


Fig. 3.8.4 - Laje com apoio parcial em um dos bordos

Nesse caso, interessa saber para que valores de a a laje poderá ser calculada como se todo o bordo fosse apoiado. Os momentos no centro da laje, calculados com essa hipótese, são designados por M_{xt} e M_{yt} .

Nas figuras 3.8.5 e 3.8.6, são representadas as variações dos coeficientes $C_x = M_x/M_{xt}$ e $C_y = M_y/M_{yt}$ em função da rela-

Comparando esses resultados com a teoria das grelhas, constata-se que aquela teoria fornece momentos fletores e flecha um pouco maiores. Logo, em vista da sua simplicidade, a teoria das grelhas pode ser empregada para o cálculo das lajes sem armadura de canto, como já foi discutido na seção 3.1. Outra vantagem da teoria das grelhas é que as reações de apoio podem ser consideradas uniformemente distribuídas sobre as vigas, como já foi demonstrado.

O procedimento indicado garante apenas que a armadura do vão será suficiente para manter o equilíbrio. Entretanto, não ficam eliminadas as fissuras nos cantos da laje (ver Fig. 3.1.1). Se a laje estiver ao ar livre ou em ambiente agressivo, a abertura dessas fissuras poderá ser nociva à durabilidade. Essa preocupação aumenta no caso do concreto aparente. Assim, a alternativa escolhida, além de facilitar a execução, deve levar em conta os aspectos da durabilidade e da aparência da estrutura.

Exemplo 6) Influência da flexibilidade dos apoios

Em todos os exemplos apresentados anteriormente, as vigas que servem de apoio para a laje foram consideradas rígidas, de forma que os deslocamentos verticais dos apoios são nulos. Esse é o procedimento usualmente adotado no cálculo das lajes de concreto armado.

Entretanto, as deformações das vigas de apoio podem ter uma influência significativa nos esforços e nas flechas das lajes. Esse efeito pode ser considerado, empregando-se o método dos elementos finitos. Para isto, a laje é discretizada em elementos de placa e nos contornos são incluídos elementos de viga. Se o elemento de placa é formulado de acordo com a teoria de Mindlin, os elementos de viga devem ser baseados na teoria de Timoshenko (teoria de vigas considerando as deformações por corte). Nos exemplos apresentados a seguir, empregou-se o elemento isoparamétrico quadrático de três nós da teoria de Timoshenko para modelar as vigas de apoio. Esse elemento é compatível com o elemento de placa que está sendo utilizado e sua formulação pode ser encontrada na ref. [20].

Na Fig. 3.8.14, representa-se uma laje quadrada simplesmente apoiada nas vigas de borda. As vigas têm seção retangular com largura igual a 10 cm e com uma altura h , estando apoiadas em pilares situados nos cantos da laje. A espessura da laje é igual a 10 cm e a carga é uniformemente distribuída. Na análise pelo método dos ele-

mentos finitos, considera-se que os eixos das vigas estejam situados no plano médio da laje. Para vigas situadas abaixo da laje, como é usual, as excentricidades dos eixos das vigas causam um maior enrijecimento do pavimento como um todo (ver ref. [13]).

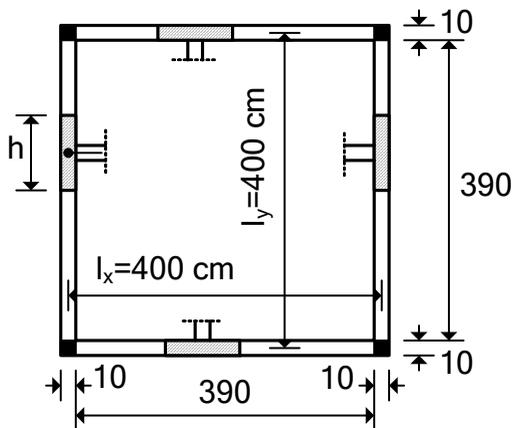


Fig. 3.8.14 - Laje simplesmente apoiada em vigas flexíveis

Na Fig. 3.8.15, apresentam-se os resultados obtidos para várias alturas das vigas de apoio. Nessa figura, W_c e M_x representam a flecha e o momento fletor no centro da laje, e M_{xy} é o momento torçor nos cantos, considerando-se as deformações das vigas de apoio. Os valores correspondentes W_o , M_o e M_{xyo} são obtidos na hipótese de apoios rígidos.

Observa-se que a flecha e o momento fletor no centro da laje aumentam com a redução da altura das vigas. Por outro lado, o momento torçor nos cantos é menor, quando as vigas são mais flexíveis.

No exemplo analisado, o acréscimo do momento fletor é de apenas 13% para vigas com $h = 50$ cm. Entretanto, nessa análise numérica admitiu-se que as vigas estivessem no estágio I. Na prática, as vigas de concreto armado se encontram fissuradas, o que faz com que sua rigidez seja bastante reduzida. Assim, não se podem fazer extrapolações sobre percentuais de acréscimos dos momentos fletores com base nos resultados da Fig. 3.8.15. Esses resultados devem servir apenas para a ilustração do comportamento das lajes sobre apoios deformáveis.

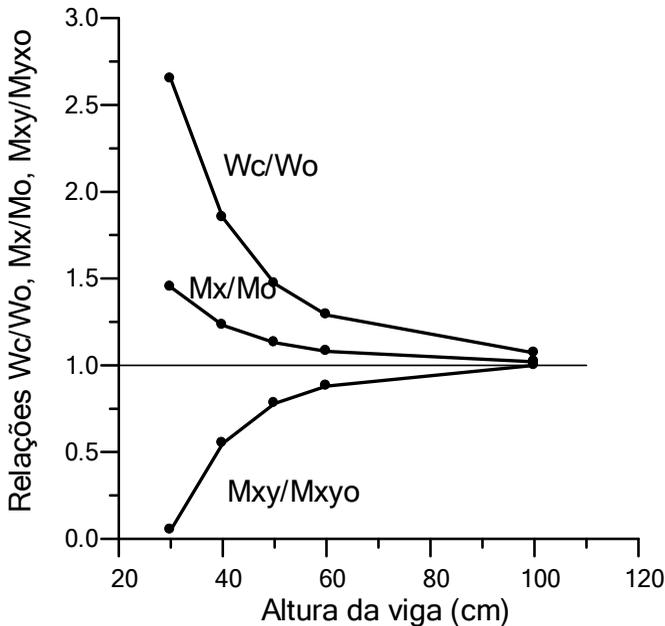


Fig. 3.8.15 - Influência da rigidez das vigas de apoio nos momentos e na flecha da laje

As deformações das vigas de apoio reduzem os esforços de tração na face superior da laje, já que os momentos torçores são reduzidos. Além disso, a região tracionada torna-se menor quando as vigas são flexíveis, indicando que a armadura superior de canto pode ser eliminada.

Na Fig. 3.8.16, indicam-se os pontos da laje onde ocorrem momentos principais negativos, para diversas alturas das vigas de apoio. Observa-se que, para vigas de altura $h = 30$ cm, não surge tração na face superior da laje.

Na Fig. 3.8.17, indica-se uma laje contínua apoiada em vigas flexíveis. As vigas têm seções transversais com largura igual a 10 cm e com uma altura h . Nessa figura, M_e é o momento fletor sobre a viga central; M_x e M_y representam os momentos máximos no centro dos vãos. A carga é uniformemente distribuída e vale 5kN/m^2 .

Na Fig. 3.8.18, representam-se os diagramas de momentos fletores na direção x , para os casos em que as vigas têm alturas $h = 30$ cm e $h = 60$ cm. Observa-se que a rigidez das vigas de apoio

tem uma influência significativa sobre os momentos fletores da laje, especialmente sobre o momento negativo M_e . Quanto mais flexíveis forem as vigas, menor será o momento negativo e maiores serão os momentos positivos nos vãos da laje.

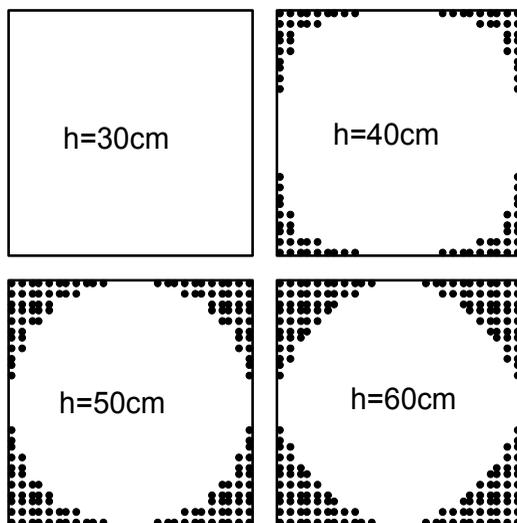


Fig. 3.8.16 - Regiões tracionadas na face superior da laje para diversas alturas das vigas de apoio

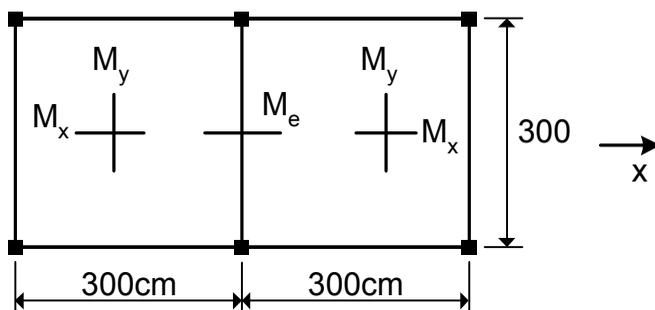


Fig. 3.8.17 - Laje contínua sobre vigas flexíveis

Na Tabela 3.8.7, apresentam-se os momentos fletores obtidos para diversas alturas das vigas de apoio. A última linha da tabela

("viga rígida") corresponde ao procedimento usual de cálculo (apoios indeformáveis e painéis engastados na viga intermediária).

Observa-se que os momentos positivos obtidos através do procedimento usual de cálculo são inferiores aos momentos "reais". Quando as vigas são muito flexíveis, o erro cometido no cálculo do momento M_y pode ser inaceitável.

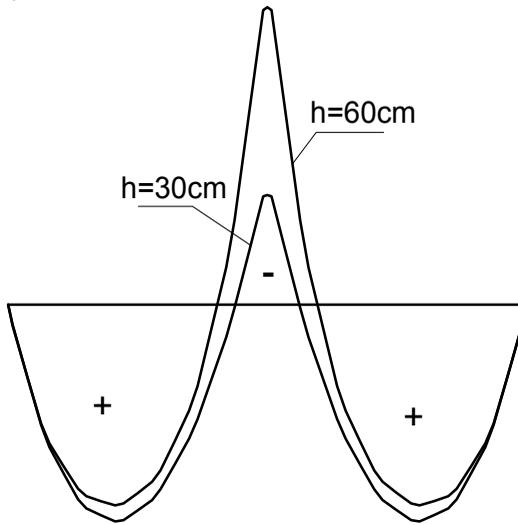


Fig. 3.8.18 - Diagramas de momentos fletores

Tabela 3.8.7 - Momentos fletores na laje contínua - kNm/m

h (cm)	M_e	M_x	M_y
30	-0,96	1,92	3,06
40	-1,71	1,82	2,35
50	-2,26	1,79	1,98
60	-2,61	1,77	1,78
viga rígida	-3,78	1,65	1,38

Esses resultados sugerem que se deve ter prudência ao calcular as lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis. O cálculo através da teoria de placas (empregando tabelas) só se aplica para lajes sobre apoios rígidos e nas quais são colocadas as armaduras superiores de canto. Nesses casos, pode-se empregar o procedimento tradicional descrito na seção 1.4 do capítulo 1.

Capítulo 4

DETALHAMENTO DAS LAJES MACIÇAS

4.1 - Introdução

Nos capítulos anteriores, foram apresentadas as considerações relativas ao cálculo das cargas e dos esforços solicitantes nas lajes maciças dos edifícios. Após o cálculo dos esforços, o dimensionamento é feito conforme indicado no Volume 1. Por último, deve-se fazer o detalhamento das armaduras.

De um modo geral, o projeto não pode se limitar a um cálculo preciso das solicitações e das dimensões dos elementos estruturais. Além disso, devem ser tomadas algumas medidas que facilitem a execução, possibilitando uma maior uniformidade na concretagem da estrutura e uma adequada proteção das armaduras contra a corrosão. Assim, o detalhamento das armaduras torna-se uma etapa de fundamental importância no projeto estrutural. De um correto detalhamento, dependerá o sucesso ou o fracasso do projeto.

Neste capítulo, apresentam-se as considerações relativas ao detalhamento das lajes maciças de concreto armado. O detalhamento é feito atendendo às disposições construtivas da NBR-6118. O cálculo de flechas também é apresentado, apesar de este assunto ser tratado em detalhes no capítulo 6.

4.2 - Espessura mínima das lajes maciças

As lajes devem ser projetadas com uma espessura mínima suficiente para limitar suas deformações, além de evitar vibrações que causem desconforto aos usuários da edificação. Além disso, do ponto de vista construtivo, é conveniente que as lajes sejam projetadas com armadura simples, para evitar o uso de armadura superior ao longo dos vãos. Assim, a espessura adotada deve ser tal que o dimensionamento recaia no caso de armadura simples, conforme os critérios indicados no Volume 1.

Segundo a NBR-6118, a espessura das lajes maciças de concreto armado não deve ser menor que os seguintes limites:

- a) 7 cm para lajes de cobertura não em balanço;
- b) 8 cm para lajes de piso não em balanço;
- c) 10 cm para lajes em balanço;
- d) 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- e) 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;
- f) 16 cm para lajes lisas e 14 cm para lajes cogumelo.

Para as lajes em balanço com espessura $h < 19$ cm, deve-se considerar o coeficiente adicional

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05h \geq 1 \quad (4.2.1)$$

onde $h \geq 10$ é a espessura da laje em cm.

O coeficiente γ_n deve majorar os esforços de cálculo finais, quando do dimensionamento das lajes em balanço.

Na seção seguinte, são fornecidas algumas indicações quanto à espessura mínima das lajes, necessária para limitar as suas deformações.

4.3 - Cálculo de flechas em lajes

A NBR-6118 estabelece diversos limites para os deslocamentos dos elementos estruturais. Esses limites são valores práticos, determinados de modo a evitar que os deslocamentos da estrutura não causem sensações desagradáveis aos usuários, não impeçam a utilização adequada da construção, nem causem danos em elementos não estruturais. Além disso, esses limites devem garantir a validade da hipótese de pequenos deslocamentos, usualmente admitida na análise estrutural.

Assim, o limite a ser adotado para um deslocamento é função do dano que se quer evitar. Por exemplo, se o objetivo é evitar vibrações que possam ser sentidas no piso, a flecha devida à carga variável não deve ultrapassar um determinado limite. Por outro lado, o objetivo pode ser evitar danos em paredes. Neste caso, o acréscimo

gular de largura unitária e altura útil d . Como a armadura é disposta em malha, a altura útil varia conforme a direção considerada. Simplificadamente, pode-se adotar a mesma altura útil para as duas direções. A seção para o dimensionamento é apresentada na Fig. 4.4.1.

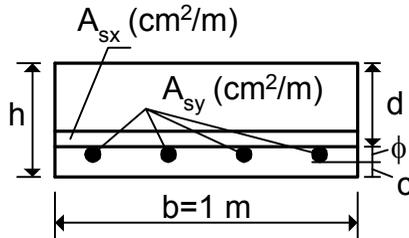


Fig. 4.4.1 - Seção transversal para o cálculo das armaduras das lajes

De acordo com a Fig. 4.4.1, a altura útil média é dada por

$$d = h - \phi - c \quad (4.4.1)$$

onde ϕ é o diâmetro das barras e c é o cobrimento nominal das armaduras.

Para as situações caracterizadas como classe I de agressividade ambiental, o cobrimento nominal é $c = 2,0$ cm (ver Tabela 4.5.1, a seguir). Admitindo barras de diâmetro $\phi = 5$ mm, tem-se

$$d = h - 2,5 \text{ cm} \quad (4.4.2)$$

Para outras situações, deve-se empregar a equação (4.4.1), adotando-se o valor apropriado para o cobrimento nominal.

Assim, se o momento fletor característico em uma direção é M_k (kNm/m), o momento fletor reduzido para o cálculo da armadura é dado por

$$\mu = \frac{M_d}{bd^2 \sigma_{cd}} = \frac{\gamma_f M_k}{d^2 \sigma_{cd}} \quad (4.4.3)$$

onde γ_f e σ_{cd} (em kN/cm²) são o coeficiente parcial de segurança e a tensão de cálculo, conforme visto no Volume 1.

utiliza-se a ancoragem com ganchos nas extremidades das barras. Para as lajes usuais dos edifícios, com o emprego de barras de diâmetro menor ou igual a 8 mm, basta adotar o comprimento mínimo de ancoragem reta, igual a 10 cm, garantindo que o eixo do apoio seja ultrapassado (desde que o aço seja o CA-50; calcular para o CA-60).

Para reduzir o consumo de armadura, pode-se adotar a solução em barras alternadas. Assim, apenas a metade das armaduras existentes no centro da laje é prolongada até os apoios.

Nesse tipo de detalhamento, o comprimento das barras é reduzido de uma fração do menor vão de cálculo da laje. Para as lajes simplesmente apoiadas nos quatro lados, o fator de redução varia de 10% a 15%, dependendo da relação entre os lados. Entretanto, deve ser observado que o espaçamento máximo das barras junto aos apoios é de 33 cm (para garantir o mínimo de 3 barras por metro). Assim, só será possível adotar essa solução quando o espaçamento das barras na região central da laje não for superior a 16,5 cm.

No caso representado na Fig. 4.7.2, as barras N1 não podem ser alternadas, pois resultaria um espaçamento de 40 cm na região dos apoios. Porém, as barras N2 podem ser alternadas, ficando com um espaçamento de 30 cm próximo aos apoios. O menor vão de cálculo da laje é igual a 362 cm. Fazendo uma redução de 10% (aproximadamente 35 cm), resulta o comprimento de 335 cm para as barras N2. O detalhamento é apresentado na Fig. 4.7.3.

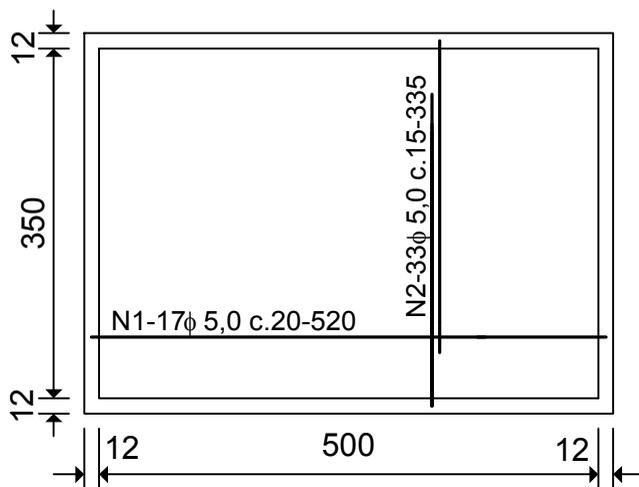


Fig. 4.7.3 - Armaduras positivas com barras alternadas

Deve-se chamar a atenção para o fato de que as marquises são estruturas críticas em termos de durabilidade. A fissuração da face superior da laje, junto à viga de suporte, é inevitável. Se não for feita uma impermeabilização adequada, por meio de manta asfáltica, por exemplo, a infiltração de água da chuva pode comprometer a durabilidade da armadura principal. A corrosão da armadura, aliada aos erros de posicionamento, têm sido as causas de inúmeros acidentes com as marquises de concreto armado. A armadura positiva serve, também, para evitar a queda brusca da marquise, em caso de ruptura da armadura principal junto à viga de suporte.

D) Aberturas em lajes

Em geral, a verificação das aberturas normais ao plano médio das lajes pode ser dispensada, quando suas dimensões são inferiores a um décimo do menor vão de cálculo. Nesses casos, basta dispor as barras da armadura resistente, que teoricamente cairiam na abertura, como armadura adicional concentrada nos lados da abertura, conforme indicado na Fig. 4.8.7. Além disso, os bordos da abertura devem ser protegidos da forma apresentada anteriormente.

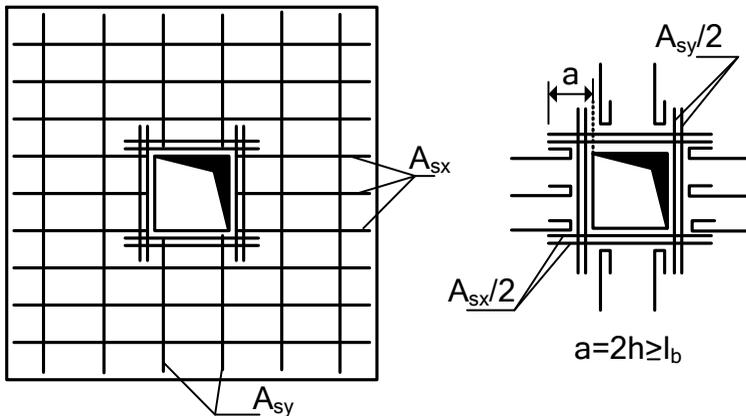


Fig. 4.8.7 - Armadura adicional nos bordos de pequenas aberturas

No caso de grandes aberturas, os esforços podem ser obtidos empregando-se o método dos elementos finitos. Entretanto, é possível fazer um cálculo simplificado, dividindo-se a laje em vários painéis e faixas resistentes.

Capítulo 5

CÁLCULO DE VIGAS

5.1 - Cargas nas vigas dos edifícios

As cargas mais frequentes para as vigas dos edifícios são as seguintes:

a) Peso próprio

O peso próprio da viga é considerado como uma carga linear, uniformemente distribuída, correspondendo ao peso de 1 m de viga. Assim, o peso próprio, p_p , é dado por

$$p_p = 25A_c, \text{ kN/m} \quad (5.1.1)$$

onde A_c é a área da seção transversal da viga em m^2 .

b) Alvenarias

O peso das alvenarias, p_a , também é considerado uniformemente distribuído, sendo dado por

$$p_a = \gamma_a tH, \text{ kN/m} \quad (5.1.2)$$

onde γ_a é o peso específico da alvenaria, t é a espessura e H é a altura da parede.

Para o peso específico da alvenaria, podem ser adotados os seguintes valores:

- alvenaria de tijolos cerâmicos furados: 13 kN/m^3 ;
- alvenaria de tijolos cerâmicos maciços: 18 kN/m^3 .

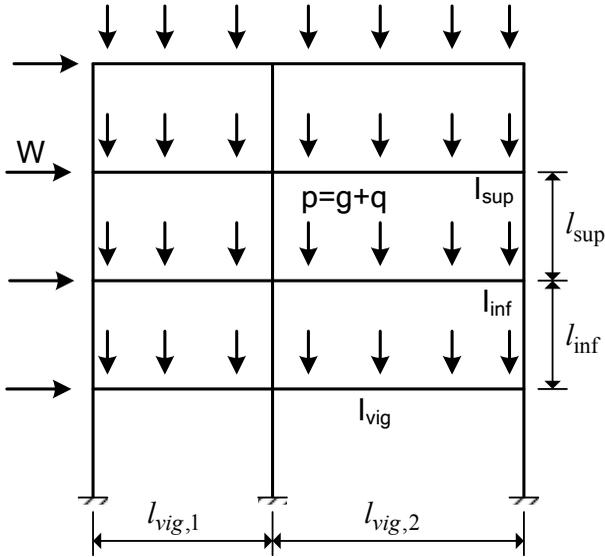


Fig. 5.3.1 – Pórtico plano com cargas verticais e ação do vento

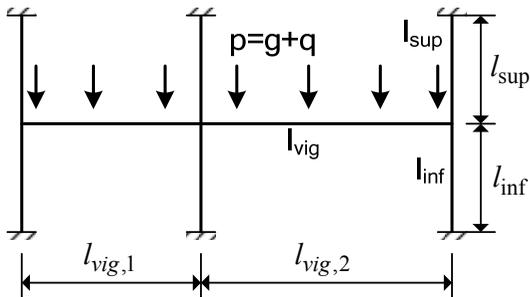


Fig. 5.3.2 – Modelo de cálculo simplificado para as cargas verticais

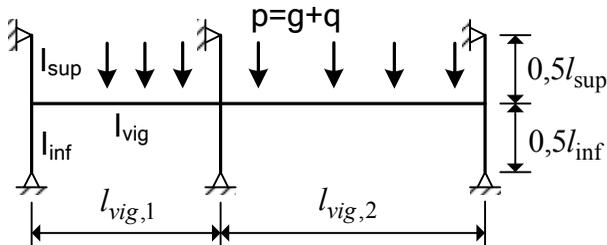


Fig. 5.3.3 – Modelo simplificado alternativo para as cargas verticais

mento negativo é X . Porém, se $h_c > 0,25l$, deve-se considerar o maior momento negativo, em valor absoluto, entre X e X_e .

c) Nos apoios externos das vigas deve ser considerado um momento fletor negativo X_{ext} , dado por

$$X_{ext} = M_{eng} \frac{r_{inf} + r_{sup}}{r_{inf} + r_{sup} + r_{vig}} \quad (5.3.1)$$

onde M_{eng} é o momento de engastamento perfeito e $r = \alpha I/l$ é o coeficiente de rigidez, sendo I o momento de inércia da seção transversal e l o vão.

Na expressão (5.3.1), os índices *inf*, *sup* e *vig* referem-se ao pilar inferior, ao pilar superior e à viga, respectivamente. Essa expressão pretende fornecer o momento negativo na viga, junto ao pilar de extremidade do pórtico plano simplificado da Fig. 5.3.3. Porém, em vez de analisar a estrutura da Fig. 5.3.3 (que já é uma simplificação do pórtico completo), considera-se que a viga seja engastada no pilar interno, resultando o modelo da Fig. 5.3.5.

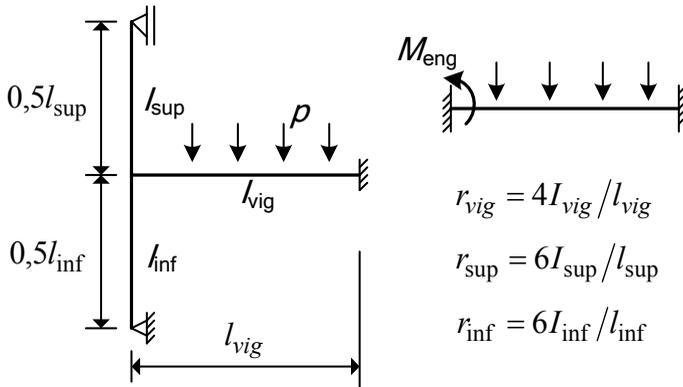


Fig. 5.3.5 - Modelo para o cálculo do momento fletor nos apoios de extremidade das vigas, conforme a NBR-6118

O coeficiente de rigidez $r_{vig} = 4I_{vig} / l_{vig}$ se aplica quando a viga possuir dois ou mais vãos. Se a viga possuir um único vão, o

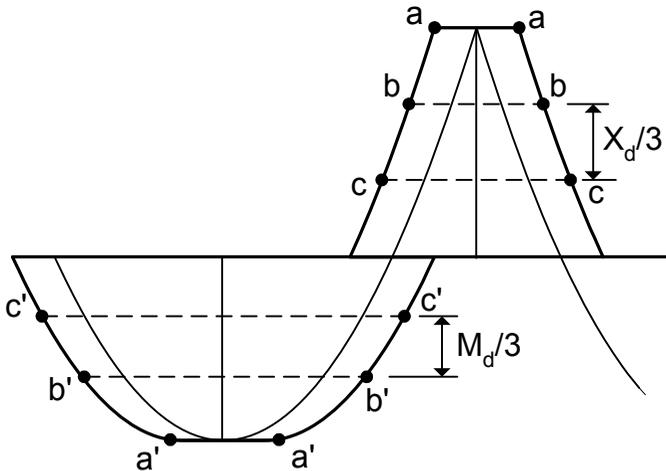


Fig. 5.5.2 – Fracionamento do diagrama de momentos fletores

Por exemplo, a barra que tem sua ancoragem iniciada no ponto **a'**, deve ultrapassar o ponto **b'**, obrigatoriamente, pois entre essas duas seções transversais o momento fletor é maior que $2M_d/3$, o que exige a presença de três barras. A partir do ponto **b'**, são necessárias apenas duas barras para equilibrar o momento fletor. Logo, uma barra pode ser cortada a partir desse ponto.

Entretanto, para levar em conta os erros de posicionamento durante a montagem das armaduras, a NBR-6118 exige que a barra que teve sua ancoragem iniciada no ponto **a'** ultrapasse o ponto **b'** de um comprimento mínimo de 10ϕ , sendo ϕ o diâmetro da barra. O mesmo procedimento é empregado para todas as barras, conforme está indicado na Fig. 5.5.3.

Ao calcular os comprimentos de ancoragem, deve ser observado que, no caso de vigas de maior altura, as barras da armadura negativa estarão em uma posição de má aderência. Nesses casos, o comprimento de ancoragem $l_{b,nec}$ será maior (ver capítulo 8, Volume 1). A última barra ancorada deve ultrapassar o ponto de momento nulo deslocado de pelo menos 10ϕ .

As barras da armadura positiva estarão, sempre, em uma situação de boa aderência. Pode-se adiantar que nem todas as barras dessa armadura poderão ser cortadas, pois algumas delas deverão ser pro-

longadas, obrigatoriamente, até os apoios, conforme é apresentado na seção 5.6.

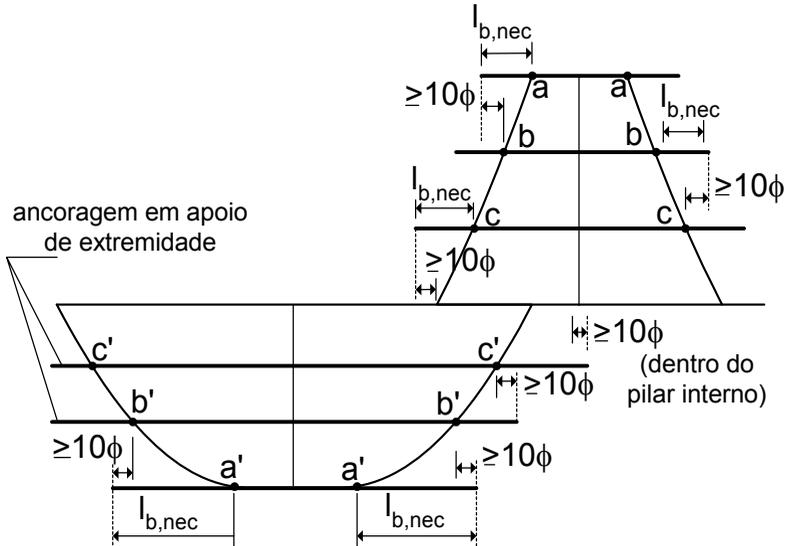


Fig. 5.5.3 – Escalonamento da armadura longitudinal

O comprimento de ancoragem, $l_{b,nec}$, é dado por

$$l_{b,nec} = l_b \frac{A_{s,cal}}{A_{se}} \geq \begin{cases} 0,3l_b \\ 10\phi \\ 10cm \end{cases} \quad (5.5.2)$$

quando for feita ancoragem reta, ou

$$l_{b,nec} = \alpha_1 l_b \frac{A_{s,cal}}{A_{se}} \geq \begin{cases} 0,3l_b \\ 10\phi \\ 10cm \end{cases} \quad (5.5.3)$$

quando for empregada ancoragem com gancho.

O coeficiente α_1 tem os valores:

$\alpha_1 = 0,7$, se o cobrimento de concreto no plano normal ao gancho for maior ou igual a 3ϕ ;

$\alpha_1 = 1,0$, se o cobrimento for menor que 3ϕ .

B) Cobrimento das armaduras

Os cobrimentos nominais exigidos pela NBR-6118 são dados em função da classe de agressividade ambiental (ver capítulo 2, Volume 1). No caso das vigas, os cobrimentos nominais exigidos são dados na Tabela 5.7.1.

Tabela 5.7.1 - Cobrimentos nominais para vigas

Classe de agressividade	I	II	III	IV
Cobrimento nominal (cm)	2,5	3,0	4,0	5,0

Em qualquer caso, o cobrimento nominal de uma determinada barra não deve ser inferior ao diâmetro da própria barra. No caso de feixes, esse cobrimento não deve ser inferior ao diâmetro equivalente do feixe.

C) Espaçamento das barras

A armadura longitudinal das vigas pode ser constituída de barras isoladas ou de feixes de barras. Para garantir que todas as barras da armadura longitudinal sejam envolvidas pelo concreto, evitando-se falhas de concretagem, devem ser respeitados os espaçamentos indicados na Fig. 5.7.3.

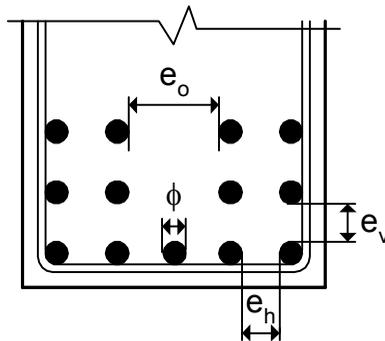


Fig. 5.7.3 - Espaçamento mínimo das barras

O espaçamento mínimo das barras nas camadas horizontais é dado por

Assim, em vigas largas, pode ser necessário o emprego de estribos duplos ou triplos, dispostos de maneira defasada como na Fig.5.4.1, para limitar o espaçamento transversal entre os seus ramos.

No caso de apoio indireto, deve-se adicionar, ainda, a armadura de suspensão, constituída preferencialmente por estribos. Essa armadura deve ser disposta o mais próxima possível do ponto de ligação entre as vigas, dentro da viga principal. O cálculo e a distribuição da armadura de suspensão são dados na seção 7.8 do Volume 1. Nas vigas de seção T, também é necessário calcular os estribos horizontais de costura a serem colocados na mesa (ver seção 7.9 do Volume 1).

Na Tabela A3.7, são fornecidas as características geométricas dos estribos com ganchos retos nas extremidades (dobramento a 90°). A Tabela A3.7-B corresponde aos estribos dobrados a 135° . Os estribos com ganchos a 90° facilitam a montagem da armadura, porém a NBR-6118/2023 [1] passou a dar preferência aos estribos em ângulo de 135° . As duas opções são usadas ao longo deste Curso.

5.8 - Exemplo de cálculo

Na Fig. 5.8.1, indica-se uma viga contínua, apoiada nos pilares P1, P2 e P3, submetida a uma carga de serviço uniformemente distribuída $p_k = 20 \text{ kN/m}$. Os três pilares possuem seção transversal quadrada com 20 cm de lado e altura de 280 cm (pavimento tipo). A viga possui seção retangular com dimensões $b = 20 \text{ cm}$ e $h = 45 \text{ cm}$. Os vãos de cálculo, medidos de eixo a eixo dos apoios, são mostrados na figura.

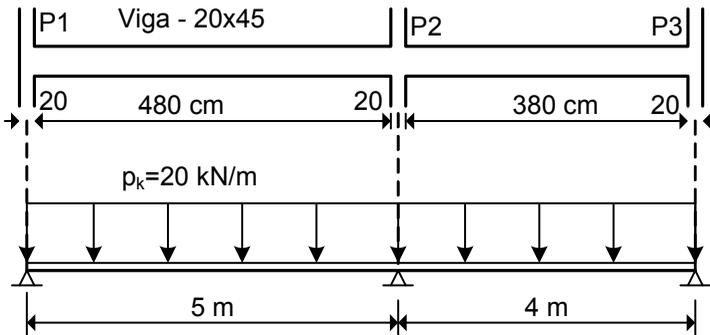


Fig. 5.8.1 - Geometria e carregamento da viga

Capítulo 6

ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO Deformações

6.1 - Introdução

Nos capítulos anteriores, foram discutidos os procedimentos adotados para o dimensionamento das estruturas de concreto armado, tendo como objetivo principal a obtenção de um adequado nível de segurança. Desse modo, foram introduzidos coeficientes parciais de segurança para majorar as cargas e minorar as resistências dos materiais. As equações de equilíbrio foram obtidas no estado limite último, através da consideração de um critério de ruptura das seções da peça. Em resumo, os procedimentos apresentados até aqui constituem a primeira fase do projeto, que é a comprovação da segurança em relação aos estados limites últimos.

Em uma segunda etapa do projeto, deve-se analisar o comportamento da estrutura sob as condições normais de utilização, ou seja, antes da ruína. Assim, a estrutura deve ser suficientemente rígida para que suas deformações, sob a ação das cargas de serviço, não provoquem danos inaceitáveis em elementos não estruturais, não afetem o seu uso ou a sua aparência, nem causem desconforto aos usuários. Além disso, o grau de fissuração, em geral inevitável nas peças fletidas de concreto armado, não deve afetar a durabilidade da estrutura. Portanto, a segunda etapa do projeto consiste na comprovação da não ocorrência dos estados limites de utilização: estado de deformações excessivas e estado de fissuração inaceitável.

Do ponto de vista prático, esses dois estados limites são verificados separadamente, apesar de haver uma relação íntima entre eles. Assim, o que se procura é a limitação das deformações da estrutura e das aberturas das fissuras na superfície da peça.

Pode-se adiantar que a abertura das fissuras será tanto maior quanto maior for o diâmetro das barras da armadura. Desse modo, geralmente não é necessário verificar o estado de fissuração das lajes maciças dos edifícios, pois as barras utilizadas possuem diâmetros

muito pequenos. Além disso, as flechas podem ser calculadas admitindo-se que toda a laje esteja no estágio I (concreto não fissurado). Assim, para as lajes maciças, a verificação dos estados limites de utilização fica resumida a um simples cálculo de flechas, como foi apresentado no capítulo 4.

No caso das vigas, deve-se considerar o estágio II, pois a rigidez é sensivelmente afetada pela fissuração. Para isso, é necessário dispor de modelos que permitam avaliar as flechas e a abertura das fissuras das vigas sob as condições de serviço. Alguns desses modelos são apresentados neste capítulo e no seguinte.

6.2 - Combinações das ações de serviço

Os estados limites de utilização (ou de serviço) decorrem de ações cujas combinações podem ter diferentes ordens de grandeza de permanência na estrutura. Essas combinações são classificadas do seguinte modo:

- a) *combinações quase permanentes*: são combinações que podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura, da ordem da metade deste período;
- b) *combinações frequentes*: são combinações que se repetem muitas vezes durante o período de vida da estrutura, da ordem de 10^5 vezes em 50 anos, ou que tenham duração total igual a uma parte não desprezível desse período, da ordem de 5%;
- c) *combinações raras*: são combinações que podem atuar no máximo algumas horas durante o período de vida da estrutura.

No caso das estruturas de concreto armado, interessam apenas as combinações quase permanentes e as combinações frequentes das ações. As combinações quase permanentes são utilizadas para a verificação do estado limite de deformações excessivas. As combinações frequentes são empregadas para a verificação do estado limite de fissuração inaceitável. Havendo ações de natureza dinâmica, deve-se verificar, também, o estado limite de vibrações excessivas, para o que são utilizadas as combinações frequentes. As combinações frequentes são também usadas para a verificação dos estados limites de deformações excessivas decorrentes do vento ou de variações de temperatura.

B) Combinações frequentes de utilização

Nesses casos, a ação variável principal $F_{qk,1}$ é tomada com o seu valor frequente $\psi_1 F_{qk,1}$ e todas as demais ações variáveis são tomadas com seus valores quase permanentes $\psi_2 F_{qk}$. A ação de serviço é dada por

$$F_{ser} = \sum_{j=1}^m F_{gk,j} + \psi_1 F_{qk,1} + \sum_{i=2}^n \psi_{2i} F_{qk,i} \quad (6.2.2)$$

Exemplo: Movimento horizontal em edifício provocado pela retração e por variação de temperatura

Na Fig. 6.2.1, indica-se a estrutura aperticada de um edifício submetido aos movimentos horizontais produzidos pela deformação de retração ε_{cs} e por uma redução uniforme de temperatura ΔT . Para minimizar os efeitos desses movimentos horizontais sobre a própria estrutura e sobre outros elementos não estruturais, foi criada uma junta de dilatação separando a estrutura em dois pórticos de comprimento L .

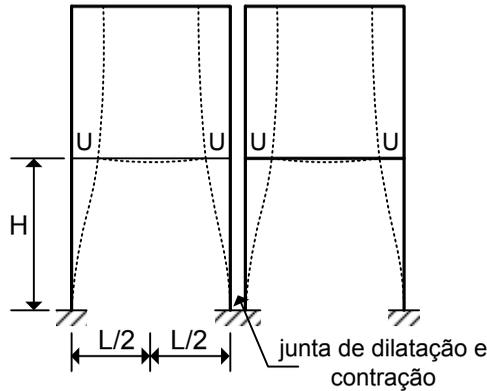


Fig. 6.2.1 – Pórtico com junta de dilatação

O deslocamento horizontal U no primeiro nível de laje é dado por

Assim, para uma avaliação satisfatória das flechas em vigas de concreto armado, é necessário elaborar algum modelo que leve em conta os seguintes aspectos:

- a) colaboração do concreto entre fissuras;
- b) não linearidade física em compressão;
- c) efeitos da fluência e da retração do concreto.

6.4 - Análise não linear de vigas de concreto armado

Nesta seção, apresenta-se o procedimento rigoroso para o cálculo de flechas em vigas de concreto armado, submetidas a cargas de curta duração. A inclusão da fluência e da retração é feita posteriormente.

Para se efetuar um cálculo rigoroso das deformações em vigas de concreto armado, deve-se levar em conta a não linearidade física decorrente do comportamento mecânico dos materiais. Para isto, é necessário adotar diagramas tensão-deformação compatíveis com os resultados obtidos experimentalmente.

Para o concreto em compressão, pode-se adotar qualquer um dos diagramas tensão-deformação apresentados no Volume 1. Na Fig. 6.4.1, indica-se o diagrama sugerido pelo CEB [12,25].

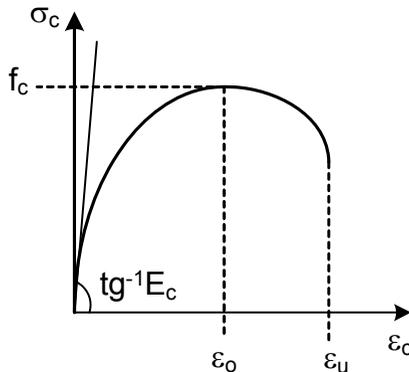


Fig. 6.4.1 - Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido

A relação tensão-deformação para o concreto comprimido é dada por

$$\sigma_c = f_c \left(\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right) \quad (6.4.1)$$

onde:
$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_o} ; \quad k = \frac{E_c \varepsilon_o}{f_c} \quad (6.4.2)$$

De acordo com o CEB/90, o módulo de deformação longitudinal é dado por

$$E_c = 21500 \left(\frac{f_c}{10} \right)^{1/3}, \text{ MPa} \quad (6.4.3)$$

onde f_c é a resistência média à compressão do concreto.

Para as deformações ε_o e ε_u pode-se adotar as expressões dadas no capítulo 4 do Volume 1, em função de f_{ck} .

Conforme é mostrado no capítulo seguinte, a colaboração do concreto entre fissuras pode ser modelada através de um diagrama tensão-deformação enrijecido para a armadura ou através de um diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado. Essa segunda alternativa é empregada nos exemplos seguintes.

Na Fig. 6.4.2, apresenta-se o diagrama tensão-deformação do concreto tracionado, conforme sugerido na referência [26]. A equação do trecho descendente do diagrama, que representa a colaboração do concreto entre fissuras, é dada por

$$\sigma_{ct} = f_{ct} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{ct}} \right)^{0,6} \quad (6.4.4)$$

onde $\varepsilon_{cr} = f_{ct} / E_c$ é a deformação de fissuração do concreto e f_{ct} é a resistência média à tração.

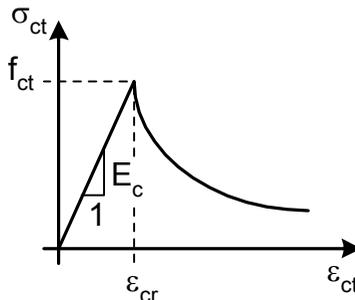


Fig. 6.4.2 - Diagrama tensão-deformação do concreto tracionado

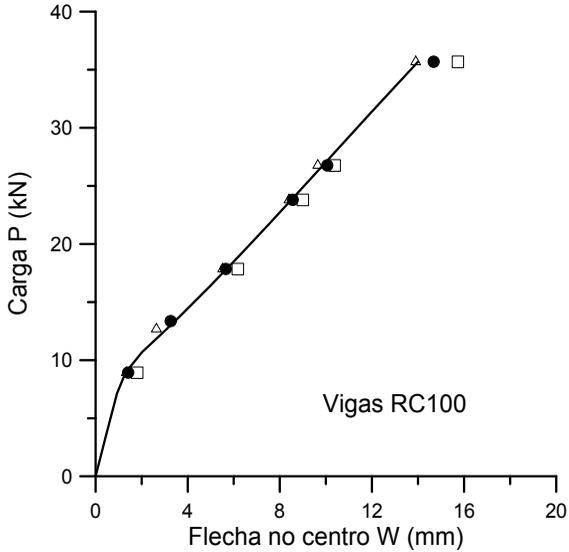


Fig. 6.4.11 - Resultados para a série RC100

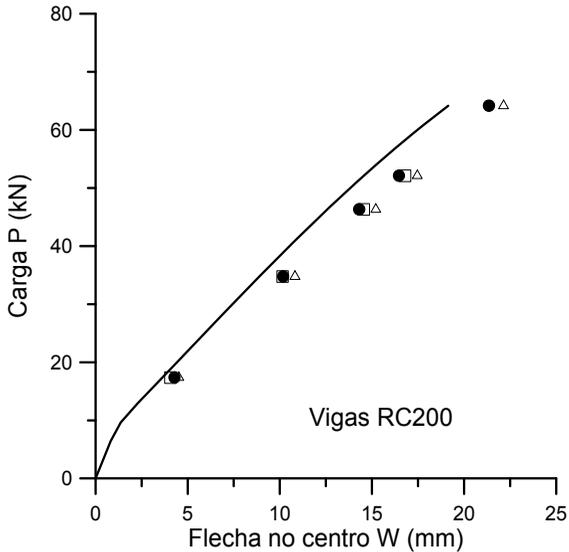


Fig. 6.4.12 - Resultados para a série RC200

Conforme se observa, o modelo computacional reproduz satisfatoriamente os resultados experimentais. As diferenças detectadas

W_2 devem ser calculadas considerando-se as armaduras existentes na seção crítica.

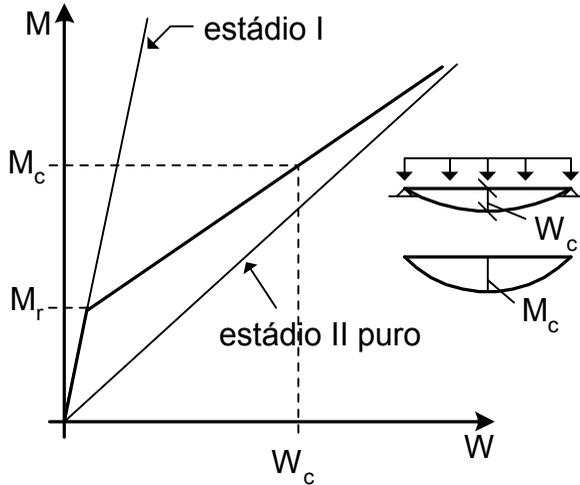


Fig. 6.5.4 - Relação momento-flecha bilinear

No caso de uma viga biapoiada ou de uma viga contínua, a seção crítica é considerada no meio do vão. Para os balanços, a seção crítica corresponde ao extremo engastado.

Na Fig. 6.5.5, apresenta-se a variação da flecha no centro de uma viga biapoiada sob a ação das cargas de serviço. A viga possui um vão de 5 m e está submetida a uma carga uniformemente distribuída. A seção transversal é retangular e apresenta as seguintes dimensões: $b = 15$ cm, $h = 50$ cm, $d = 47$ cm e $d' = 3$ cm. O concreto possui $f_{ck} = 20$ MPa.

Para cada valor da carga de serviço, foi realizado o dimensionamento das armaduras longitudinais e, em seguida, foi calculada a flecha no centro do vão, considerando-se o modelo não linear, o modelo bilinear e o estágio II puro. Dessa forma, os resultados mostrados na Fig. 6.5.5 não representam uma resposta carga-deslocamento, pois cada ponto corresponde a uma viga com armadura diferente.

Desses resultados, verifica-se uma boa concordância entre o modelo bilinear e o modelo não linear. O cálculo no estágio II puro superestima as flechas sob as cargas de serviço, particularmente para vigas com pouca armadura.

O coeficiente α é igual a 8, exceto para os balanços onde ele vale 2. O coeficiente f_r tem os seguintes valores:

$f_r = 1,0$ para as vigas biapoiadas e para os balanços;

$f_r = 0,7$ para os vãos extremos das vigas contínuas;

$f_r = 0,5$ para os vãos intermediários das vigas contínuas.

6.9 - Cálculo de flechas em vigas segundo a NBR-6118

A NBR-6118 adota o processo simplificado para o cálculo de flechas de vigas do ACI 318-14* [31]. A flecha inicial é obtida considerando-se um momento de inércia equivalente I_{eq} , dado por

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M} \right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M} \right)^3 \right] I_2 \leq I_c \quad (6.9.1)$$

onde:

I_c = momento de inércia da seção de concreto simples;

I_2 = momento de inércia da seção de concreto armado no estágio II puro;

M = momento fletor solicitante na seção crítica;

M_r = momento de fissuração.

De acordo com a NBR-6118, o momento de fissuração é dado por

$$M_r = \frac{\alpha I_c f_{ct}}{y_t} \quad (6.9.2)$$

onde y_t é a distância do centroide da seção à fibra mais tracionada.

O coeficiente α tem os seguintes valores:

$\alpha = 1,2$ para seções T ou duplo T;

$\alpha = 1,3$ para seções I ou T invertido;

$\alpha = 1,5$ para seções retangulares.

* A expressão do momento de inércia equivalente para elementos de concreto armado foi alterada na versão de 2019 do ACI 318.

estádio I e no estágio II, respectivamente. A deformação específica de retração é ε_{cs} .

Para a seção retangular da Fig. 6.4.5, os momentos estáticos são dados por

$$S_I = A_s(d - x_I) - A'_s(x_I - d') \quad (6.10.7)$$

$$S_{II} = A_s(d - x_{II}) - A'_s(x_{II} - d') \quad (6.10.8)$$

onde x_I e x_{II} representam as profundidades da linha neutra no estágio I e no estágio II, respectivamente.

Observa-se que os acréscimos de curvatura devidos à retração podem ser obtidos considerando-se os momentos fletores fictícios adicionais M_{cs1} e M_{cs2} , dados por

$$M_{cs1} = E_s S_I \varepsilon_{cs} \quad (6.10.9)$$

$$M_{cs2} = E_s S_{II} \varepsilon_{cs} \quad (6.10.10)$$

Assim, a flecha da viga, incluindo os efeitos da retração do concreto, pode ser obtida por superposição do carregamento real com um carregamento fictício dado pelos momentos M_{cs1} e M_{cs2} , como é mostrado na Fig. 6.10.1.

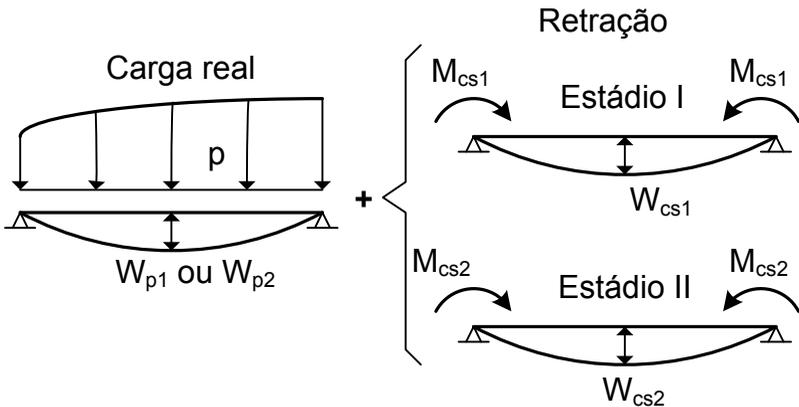


Fig. 6.10.1 – Carregamento real e carregamento fictício equivalente à retração

Capítulo 7

ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO Fissuração

7.1 - A colaboração do concreto entre fissuras

Para mostrar a influência do concreto tracionado entre fissuras, considere-se o elemento de concreto armado indicado na Fig. 7.1.1, submetido a uma força de tração P constante. O elemento encontra-se fissurado, estando as fissuras espaçadas de uma distância igual a $2a$.

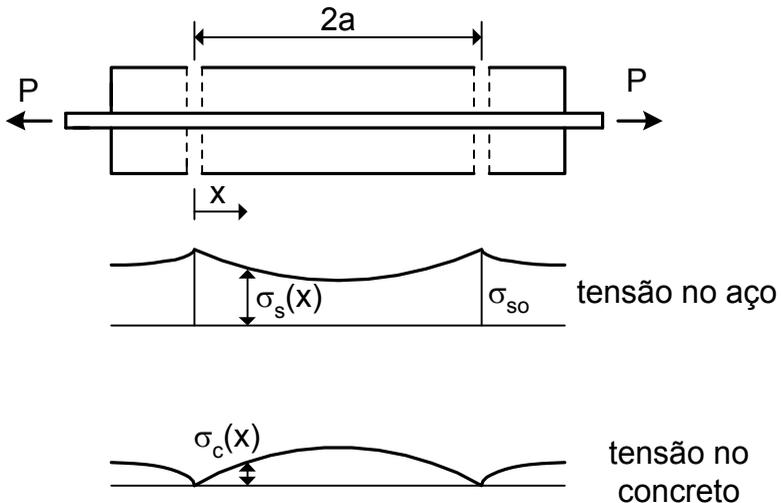


Fig. 7.1.1 - Elemento fissurado sob tração simples

Nas seções fissuradas, a tensão na barra de aço atinge o valor máximo σ_{so} e a tensão no concreto é nula. Essas seções estão no estágio II e toda a força de tração é absorvida pela armadura. Entretanto, por causa da aderência, ocorre uma transferência de parte da força da barra de aço para o concreto. Em uma seção genérica, situa-

da a uma distância x da fissura, a tensão no aço é $\sigma_s = \sigma_s(x)$ e a tensão no concreto é $\sigma_c = \sigma_c(x)$.

A equação de equilíbrio do elemento de concreto armado é dada por

$$R_c + R_s = P \quad (7.1.1)$$

onde R_c e R_s são as forças de tração no concreto e na barra de aço, respectivamente.

Essas forças são dadas por

$$R_c = A_c \sigma_c(x) \quad ; \quad R_s = A_s \sigma_s(x) \quad (7.1.2)$$

onde A_c é a área da seção de concreto e A_s é a área da seção da barra de aço.

Derivando (7.1.1) em relação à x , tem-se

$$\frac{dR_c}{dx} + \frac{dR_s}{dx} = 0 \quad (7.1.3)$$

Admitindo-se, por simplicidade, que as tensões de aderência sejam constantes e iguais ao valor médio τ_{bm} , a variação da força na barra de aço é igual a

$$\frac{dR_s}{dx} = -\mu \tau_{bm} \quad (7.1.4)$$

onde μ é o perímetro da seção da barra.

A equação (7.1.4) indica que a força no aço sofre um decréscimo, já que parte da mesma é transferida ao concreto.

Integrando (7.1.4), resulta

$$R_s = C_1 - \mu \tau_{bm} x \quad (7.1.5)$$

onde C_1 é a constante de integração.

Na seção fissurada $x = 0$, tem-se $R_s = P$. Logo, conclui-se que $C_1 = P$ e a força na barra de aço em uma seção genérica é dada por

$$R_s = P - \mu \tau_{bm} x \quad (7.1.6)$$

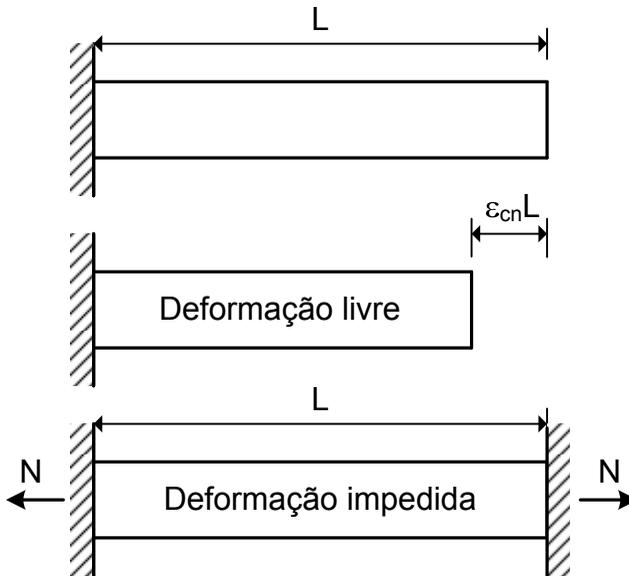


Fig. 7.1.5 – Elemento submetido a uma deformação imposta

Quando a deformação imposta for igual à deformação de fissuração do concreto, $\epsilon_{cr} = f_{ct}/E_c$, sendo E_c o módulo de deformação longitudinal, surgirá a primeira fissura no elemento. O esforço normal de fissuração vale

$$N_r = (1 + n\rho_{se})A_c f_{ct} \quad (7.1.21)$$

onde $n = E_s/E_c$ e $\rho_{se} = A_s/A_c$.

Para valores não muito elevados de ρ , obtém-se $N_r \cong A_c f_{ct}$.

No momento em que surge a primeira fissura, ocorre um aumento brusco da tensão no aço na seção fissurada, já que, nessa seção, o aço sozinho deve resistir ao esforço N_r . A tensão no aço na seção fissurada, $\sigma_{sr} = N_r/A_s$, é dada por

$$\sigma_{sr} = \left(\frac{1 + n\rho_{se}}{\rho_{se}} \right) f_{ct} \quad (7.1.22)$$

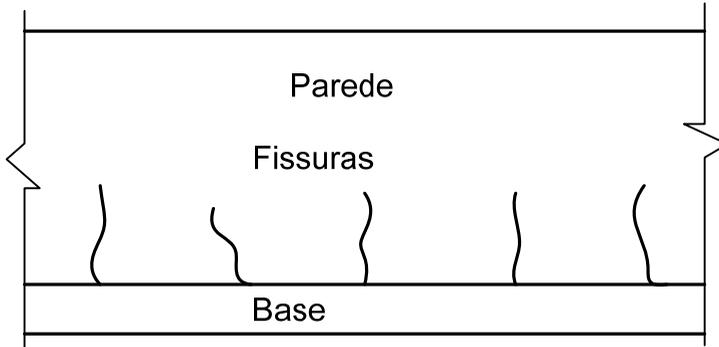


Fig. 7.5.1 – Fissuras em paredes de concreto armado devidas à retração e/ou às variações de temperatura

As fissuras provocadas por esforços de coação externos também podem surgir em lajes, reservatórios elevados e outros tipos de estruturas. Em muitos casos, as fissuras surgem antes mesmo da retirada das formas, ou seja, quando o elemento estrutural ainda não está submetido à ação do carregamento.

Fissuras decorrentes da retração e da dilatação térmica são muito frequentes nas paredes dos reservatórios elevados dos edifícios, como ilustrado na Fig. 7.5.2.

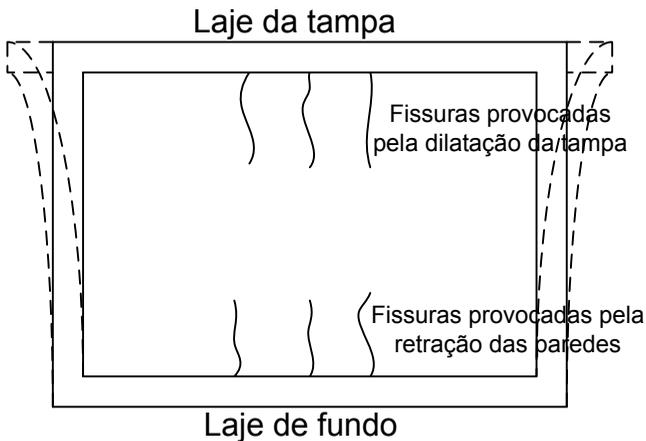


Fig. 7.5.2 – Fissuração das paredes dos reservatórios elevados de água potável dos edifícios

$$k = \frac{1}{1 + \frac{E_p A_p}{E_b A_b}} \quad (7.5.3)$$

onde E_p e E_b representam os módulos de deformação longitudinal do concreto da parede e da base, incluindo os efeitos da fluência, A_p e A_b indicam as áreas das seções transversais da parede e da base, respectivamente.

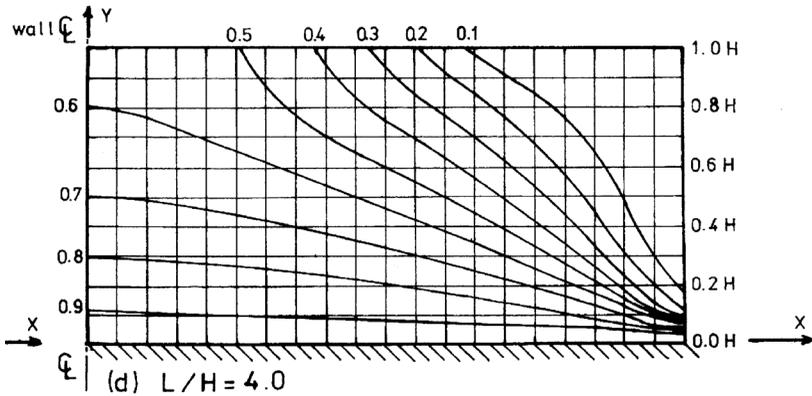


Fig. 7.5.4 – Fator de restrição para parede com $L/H=4$
(extraída da ref.[35])

Observa-se que, logo após a concretagem, quando o módulo do concreto da parede ainda é muito pequeno, $k \cong 1$. À medida que o concreto da parede endurece, esse coeficiente reduz. Considerando $A_p = A_b$, verifica-se que k tende a 0,5 quando os módulos dos dois concretos tornam-se próximos. Assim, o fator de restrição máximo da Fig. 7.5.4 tende a $kR = 0,5$, valor que foi adotado nos exemplos anteriores.

Mantendo-se a cura do concreto até uma idade mínima, evita-se que a retração se inicie quando o concreto ainda possui uma resistência à tração baixa e quando o fator de restrição é alto. Desse modo, evita-se uma fissuração prematura do concreto da parede.

Substituindo a equação (7.5.2) na equação (7.3.5), resulta

Da Tabela 7.5.1, obtém-se $\rho_{se} = 0,35\%$. Essa é a taxa de armadura necessária para limitar a abertura das fissuras em 0,2 mm.

Da Tabela 7.5.2, obtém-se $\rho_{\min} = 0,67\%$. Essa é a taxa de armadura necessária para evitar o escoamento do aço no surgimento da primeira fissura.

Como $\rho_{se} < \rho_{\min}$, deve-se adotar $\rho_{se} = 0,67\%$.

De acordo com a Fig. 7.5.4, a espessura da camada superficial a ser considerada é

$$h_o \leq \begin{cases} 2,5(c + 0,5\phi) = 2,5(3 + 0,5 \times 1) = 8,75 \text{ cm} \\ t/2 = 50/2 = 25 \text{ cm} \end{cases}$$

Logo, $h_o = 8,75 \text{ cm}$.

$$A_{s,\min} = \rho_{se} 100h_o = 0,67 \times 8,75 = 5,86 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Solução: $\phi 10 \text{ c. } 13 \text{ cm}$ em cada face da parede.

7.6 - Abertura das fissuras de acordo com a NBR-6118

De acordo com a NBR-6118, a abertura w_k das fissuras é dada pelo menor dos valores

$$w_1 = \frac{\phi}{12,5\eta_1} \frac{\sigma_s}{E_s} \frac{3\sigma_s}{f_{ct}} \quad (7.6.1)$$

$$w_2 = \frac{\phi}{12,5\eta_1} \frac{\sigma_s}{E_s} \left(\frac{4}{\rho_{se}} + 45 \right) \quad (7.6.2)$$

onde:

ϕ = diâmetro da barra de aço em mm;

η_1 = coeficiente de conformação superficial da barra de aço, sendo $\eta_1 = 2,25$ para o aço CA-50 e $\eta_1 = 1,0$ para os aços CA-25 e CA-60.

σ_s = tensão na armadura tracionada no estágio II;

E_s = módulo de elasticidade do aço;

f_{ct} = resistência média à tração do concreto;

$\rho_{se} = A_s/A_{ce}$, onde A_s é a área da armadura e A_{ce} é a área da região de envolvimento da armadura.

Para cada barra da armadura tracionada, deve ser considerada uma área A_{ce} do concreto de envolvimento, constituída por um retângulo cujos lados não distam mais de $7,5\phi$ do centro da barra. Na Fig. 7.6.1, indica-se a obtenção da área efetiva A_{ce} .

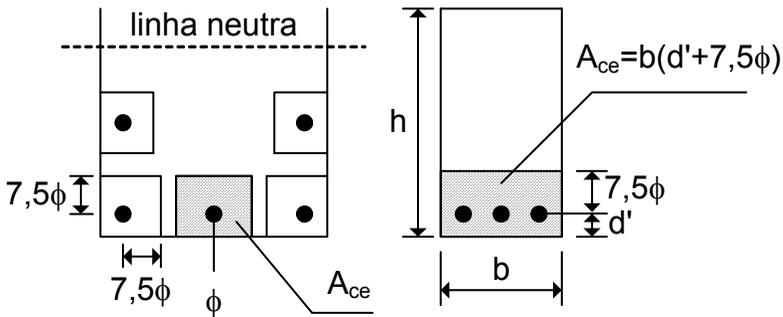


Fig. 7.6.1 - Área A_{ce} conforme a NBR-6118

A equação (7.6.1) corresponde à fase de formação de fissuras, enquanto a equação (7.6.2) corresponde à fissuração estabilizada. O limite entre essas duas fases é dado pela tensão

$$\sigma'_{sr} = \left(\frac{4 + 45\rho_{se}}{3\rho_{se}} \right) f_{ct} \quad (7.6.3)$$

Observa-se a semelhança dessa expressão com a equação (7.3.1) para a tensão σ_{sr} do modelo do CEB. Logo, se a tensão σ_s na armadura for menor que σ'_{sr} , a abertura das fissuras será obtida da equação (7.6.1). Caso contrário, prevalecerá a equação (7.6.2).

Exemplo:

Calcular a abertura das fissuras da viga indicada na Fig. 7.3.2, empregando a formulação da NBR-6118.

Os seguintes valores já foram dados ou calculados anteriormente:

$$\phi = 16 \text{ mm}; \sigma_s = 31,22 \text{ kN/cm}^2; E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2;$$

$$f_{ct} = 0,22 \text{ kN/cm}^2; A_s = 4,02 \text{ cm}^2; b = 15 \text{ cm}; d' = 4 \text{ cm}.$$

Cálculos adicionais:

$$A_{ce} = b(d' + 7,5\phi) = 15(4 + 7,5 \times 1,6) = 240 \text{ cm}^2$$

$$\rho_{se} = \frac{A_s}{A_{ce}} = \frac{4,02}{240} = 1,68\%; \quad \eta_1 = 2,25 \text{ (aço CA-50)}$$

$$\sigma'_{sr} = \left(\frac{4 + 45 \times 1,68/100}{3 \times 1,68/100} \right) \times 0,22 = 20,76 \text{ kN/cm}^2$$

Como $\sigma_s > \sigma'_{sr}$, a fissuração está estabilizada, devendo-se empregar a equação (7.6.2).

$$w_2 = \frac{\phi}{12,5\eta_1} \frac{\sigma_s}{E_s} \left(\frac{4}{\rho_{se}} + 45 \right) = 0,25 \text{ mm}$$

Logo, segundo o critério da NBR-6118, $w_k = 0,25 \text{ mm}$.

No exemplo da seção 7.3 foi obtido $w_k = 0,31 \text{ mm}$, de acordo com a formulação do CEB/90. A formulação da NBR-6118 fornece uma menor abertura das fissuras porque os efeitos das deformações impostas não são considerados, como ocorre com a formulação do CEB. Porém, se for adotada a tensão $\sigma_s = 36,22 \text{ kN/cm}^2$, a qual inclui os efeitos das deformações impostas, resulta $w_2 = 0,29 \text{ mm}$, valor mais próximo do CEB/90.

Assim, ao usar a formulação da NBR-6118, deve-se considerar a tensão $\sigma_s = \sigma_{s,p} + \sigma_{s,\varepsilon}$ para levar em conta os efeitos das deformações impostas.

APÊNDICE 1

CARGAS NAS EDIFICAÇÕES Segundo a NBR-6120/2019

APÊNDICE 2

TABELAS PARA O CÁLCULO DE LAJES

APÊNDICE 3

TABELAS PARA DETALHAMENTO DAS ARMADURAS

Editora Dunas
Rua Tiradentes, 105 – Bairro Cidade Nova
96211-080 Rio Grande – RS
www.editoradunas.com.br
e-mail: contato@editoradunas.com.br