

**CURSO DE**  
**CONCRETO ARMADO**

**Volume 2**

**JOSÉ MILTON DE ARAÚJO**

Professor Titular – Escola de Engenharia da FURG  
Doutor em Engenharia

**CURSO DE**  
**CONCRETO ARMADO**

**Volume 2**

**Editora DUNAS**

# CURSO DE CONCRETO ARMADO

© Copyright Editora DUNAS

---

A663c    Araújo, José Milton de  
            Curso de concreto armado / José Milton  
            de Araújo. - Rio Grande: Dunas, 2014. v.2, 4.ed.

## Bibliografia

1. Concreto armado. I. Título

CDU 624.012.45

CDD 624.1834

---

ISBN do volume 2: 978-85-86717-15-4

ISBN da coleção: 978-85-86717-13-0

Editora DUNAS

Rua Tiradentes, 105 - Cidade Nova

96211-080 RIO GRANDE - RS - Brasil

[www.editoradunas.com.br](http://www.editoradunas.com.br)

e-mail: [contato@editoradunas.com.br](mailto:contato@editoradunas.com.br)

---

4<sup>a</sup> edição, Maio/2014

---

## APRESENTAÇÃO

Este Curso de Concreto Armado é dirigido aos estudantes de graduação em Engenharia Civil e aos profissionais ligados à área de projeto estrutural. Para uma melhor apresentação, a obra foi dividida em quatro volumes, com uma sequência que nos parece apropriada do ponto de vista didático.

Não é nossa intenção abordar todos os aspectos relativos ao tema, o que seria impraticável em virtude de sua abrangência. Nosso único objetivo é apresentar um curso completo e atualizado sobre os métodos de cálculo das estruturas usuais de concreto armado. Em particular, o Curso é dedicado ao projeto das estruturas dos edifícios.

Nesta quarta edição de Curso de Concreto Armado, fizemos diversas alterações para acompanhar os novos procedimentos da última versão da NBR-6118, aprovada no final de 2013. Essa nova versão da norma passou a considerar os concretos de alta resistência, o que exigiu a adaptação dos procedimentos de dimensionamento à flexão simples e à flexão composta. Para isto, foram alterados os limites dos domínios de dimensionamento e os parâmetros do diagrama tensão-deformação do concreto. Procuramos preservar ao máximo a notação utilizada anteriormente, porém, devido à consideração de dois grupos de concreto, grupo I e grupo II, o equacionamento tornou-se um pouco mais complexo.

A nova NBR-6118 alterou, também, as dimensões mínimas dos pilares, as espessuras mínimas das lajes maciças, e passou a exigir uma maior segurança para as lajes em balanço, dentre outras inovações. Além disso, introduzimos diversas modificações de forma e conteúdo, como no dimensionamento dos blocos de fundação, nas armaduras mínimas de sapatas e vigas-parede, no cálculo das aberturas das fissuras incluindo os efeitos das deformações impostas, etc. Enfim, esta edição sofreu uma completa reestruturação em relação à edição anterior.

## **PLANO DA OBRA**

**Volume 1:** Propriedades dos materiais para concreto armado. Durabilidade das estruturas de concreto. Fundamentos de segurança. Flexão normal simples: dimensionamento e verificação de seções retangulares e seções T. Esforço cortante. Ancoragem e emendas das armaduras.

**Volume 2:** Cálculo de lajes maciças. Cálculo de vigas. Estados limites de utilização.

**Volume 3:** Flexo-compressão normal e oblíqua: dimensionamento e verificação de seções. Cálculo de pilares curtos e moderadamente esbeltos. Pilares-parede. Pilares esbeltos. Ações horizontais nas estruturas de contraventamento.

**Volume 4:** Dimensionamento à torção. Flexo-tração. Escadas. Vigas-parede e consolos. Reservatórios. Lajes nervuradas. Lajes de concreto. Fundações. Projeto em situação de incêndio.

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DAS LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO.....	1
1.1 - Tipos usuais de lajes dos edifícios .....	1
1.2 - Vãos teóricos das lajes .....	4
1.3 - Classificação das lajes quanto à armação.....	5
1.4 - Procedimento tradicional para cálculo das lajes dos edifícios .	8
1.5 - Cálculo das lajes armadas em uma direção .....	13
1.6 - Lajes contínuas armadas em uma direção .....	21
1.7 - Cargas nas lajes maciças .....	24
1.8 - Cálculo de marquises e sacadas .....	31
1.9 - Cálculo de lajes armadas em cruz .....	35
2. TEORIA DE FLEXÃO DE PLACAS.....	37
2.1 - Algumas relações da teoria da elasticidade .....	37
2.2 - Equação diferencial da placa .....	41
2.3 - Condições de contorno.....	49
2.4 - Solução da equação diferencial da placa .....	53
2.5 - Tabelas para o cálculo de placas .....	63
2.6 - Exemplos de cálculo .....	64
2.7 - Restrições ao emprego da teoria de placas.....	78
3. MÉTODOS SIMPLIFICADOS E MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O CÁLCULO DE LAJES .....	81
3.1 - A teoria das grelhas para lajes sobre apoios rígidos.....	81
3.2 - Métodos simplificados para cálculo de lajes sobre apoios deformáveis .....	89
3.3 - O método de Marcus .....	106
3.4 - Teoria das linhas de ruptura .....	107
3.5 - A analogia da grelha equivalente .....	117
3.6 - O método das diferenças finitas .....	123
3.7 - O método dos elementos finitos .....	132
3.8 - Aplicações do método dos elementos finitos .....	142
3.9 - Considerações finais.....	162

4. DETALHAMENTO DAS LAJES MACIÇAS .....	169
4.1 - Introdução .....	169
4.2 - Espessura mínima das lajes maciças .....	169
4.3 - Cálculo de flechas em lajes .....	170
4.4 - Cálculo das armaduras de flexão .....	174
4.5 - Cobrimento da armadura .....	178
4.6 - Outras prescrições da NBR-6118 .....	179
4.7 - Detalhamento das armaduras de flexão .....	180
4.8 - Considerações adicionais sobre o detalhamento .....	189
5. CÁLCULO DE VIGAS .....	201
5.1 - Cargas nas vigas dos edifícios .....	201
5.2 - Vãos teóricos .....	203
5.3 - Cálculo dos esforços .....	204
5.4 - Cálculo das armaduras das vigas .....	211
5.5 - Escalonamento da armadura longitudinal .....	216
5.6 - Armadura mínima nos apoios .....	222
5.7 - Disposições construtivas da NBR-6118 .....	223
5.8 - Exemplo de cálculo .....	231
5.9 - Aberturas em vigas .....	245
6. ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO	
Deformações.....	249
6.1 - Introdução .....	249
6.2 - Combinações das ações de serviço.....	250
6.3 - Deformações das vigas de concreto armado .....	253
6.4 - Análise não linear de vigas de concreto armado .....	256
6.5 - Modelo simplificado para o cálculo de flechas em vigas ....	267
6.6 - Consideração das deformações diferidas do concreto.....	281
6.7 - Exemplo de cálculo de flechas em vigas pelo método bilinear .....	297
6.8 - Cálculo prático de flechas em vigas .....	301
6.9 - Cálculo de flechas em vigas segundo a NBR-6118 .....	305
6.10- Cálculo de flechas em vigas segundo o Eurocode 2 .....	309
7. ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO	
Fissuração.....	313

7.1 - A colaboração do concreto entre fissuras .....	313
7.2 - Determinação da abertura das fissuras .....	324
7.3 - Verificação do estado limite de abertura das fissuras .....	329
7.4 - Verificação da abertura das fissuras através da limitação das tensões na armadura .....	334
7.5 - Armadura mínima para limitação das fissuras provocadas por deformações impostas .....	341
7.6 - Abertura das fissuras de acordo com a NBR-6118 .....	349
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	353
APÊNDICE 1: CARGAS NAS EDIFICAÇÕES .....	357
APÊNDICE 2: TABELAS PARA O CÁLCULO DE LAJES .....	363
APÊNDICE 3: TABELAS PARA DETALHAMENTO DAS ARMADURAS.....	413



## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DAS LAJES MACIÇAS DE CONCRETO ARMADO

### 1.1 - Tipos usuais de lajes dos edifícios

As lajes são os elementos estruturais que têm a função básica de receber as cargas de utilização das edificações, aplicadas nos pisos, e transmiti-las às vigas. As vigas transmitem as cargas aos pilares e, a partir destes, o carregamento é transferido para as fundações. Apesar de haver outras possibilidades de concepção, este é o modelo estrutural básico das edificações.

As lajes também servem para distribuir as ações horizontais entre os elementos estruturais de contraventamento, além de funcionarem como mesas de compressão das vigas T.

As lajes são elementos bidimensionais planos, cuja espessura  $h$  é bem inferior às outras duas dimensões ( $l_x, l_y$ ), e que são solicitadas, predominantemente, por cargas perpendiculares ao seu plano médio, conforme indicado na fig. 1.1.1.

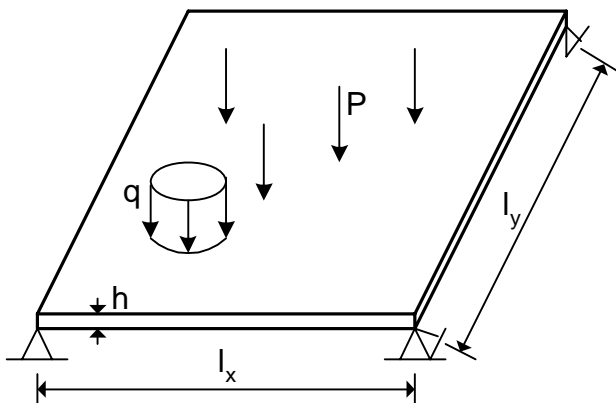


Fig. 1.1.1 - Carregamento das lajes

Os pisos das edificações podem ser executados com diferentes tipos de lajes, como as lajes maciças, as lajes nervuradas, as lajes cogumelo, além de diversos tipos de lajes pré-moldadas. A definição do tipo de laje a ser utilizado depende de considerações econômicas e de segurança, sendo uma função do projeto arquitetônico em análise.

As lajes maciças são placas de espessura uniforme, apoiadas ao longo do seu contorno. Os apoios podem ser constituídos por vigas ou por alvenarias, sendo este o tipo de laje predominante nos edifícios residenciais onde os vãos são relativamente pequenos.

Nota-se que o termo "laje" é empregado para designar as "placas" de concreto armado. Esses dois termos são utilizados indistintamente ao longo deste livro.

Na fig. 1.1.2, representa-se um corte em um piso de concreto armado constituído por laje maciça apoiada em vigas.

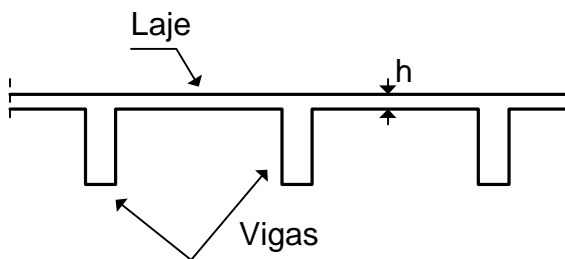


Fig. 1.1.2 - Laje maciça

As lajes nervuradas são empregadas para vencer grandes vãos, geralmente superiores a 8 m, sendo constituídas por nervuras, onde são colocadas as armaduras longitudinais de tração. Dessa maneira, consegue-se uma redução do peso próprio da laje, já que se elimina uma parte do concreto que ficaria na zona tracionada, caso fosse adotada a solução em laje maciça. Neste caso, as nervuras ficam aparentes, a menos que a face inferior da laje seja revestida com um forro. Alternativamente, o espaço entre as nervuras pode ser preenchido com algum material inerte de baixo peso específico, para tornar plana a superfície inferior da laje. As duas soluções são representadas na fig. 1.1.3.

são diferentes, pois os vãos  $l_x$  e  $l_y$  diferem entre si. Conforme se observa, a curvatura na direção  $y$  é maior que a curvatura na direção  $x$ , já que  $l_y < l_x$ . Como o momento fletor é diretamente proporcional à curvatura, significa que o momento na direção  $y$  (em torno de  $x$ ) também será maior que o momento na direção  $x$  (em torno de  $y$ ).

Convencionalmente, a expressão "direção do momento" é empregada para identificar a direção da armadura de flexão.

Da teoria de flexão de placas, apresentada no capítulo seguinte, tem-se que os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, são dados por

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.3.1)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.3.2)$$

onde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.3.3)$$

Nas expressões anteriores,  $D$  é a rigidez à flexão da placa de espessura  $h$ ,  $E$  e  $\nu$  representam o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson do material e  $w = w(x, y)$  é a deformada do plano médio da placa. Os termos  $\partial^2 w / \partial x^2$  e  $\partial^2 w / \partial y^2$  representam as curvaturas segundo as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Quando o vão  $l_x$  é muito maior que o vão  $l_y$ , a curvatura  $\partial^2 w / \partial x^2$  torna-se desprezível e, das equações (1.3.1) e (1.3.2),

Observa-se que, com esse cálculo dos momentos fletores e das reações de apoio, garante-se o equilíbrio dos momentos fletores no pavimento como um todo, segundo as duas direções. Para mostrar isto, considera-se a fig. 1.5.3, onde se admite que a laje esteja apoiada em 4 vigas de borda, as quais se apoiam nos 4 pilares de canto.

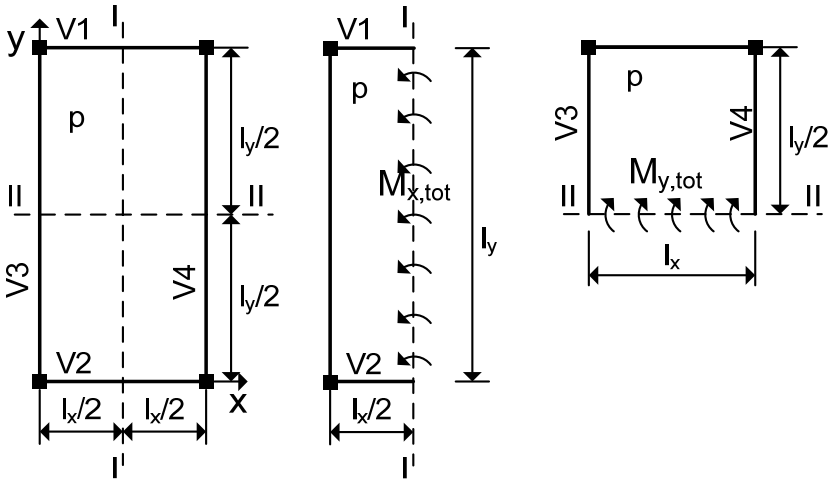


Fig. 1.5.3 – Cálculo dos momentos totais solicitantes

Cortando o pavimento através das seções I-I e II-II passando pelo centro da laje, podem-se obter os momentos totais solicitantes  $M_{x,tot}$  e  $M_{y,tot}$ , segundo as direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Como apenas a laje está carregada com a carga uniforme  $p$ , obtém-se

$$M_{x,tot} = pl_y \frac{l_x^2}{8} ; M_{y,tot} = pl_x \frac{l_y^2}{8} \quad (1.5.7)$$

Analisando a fig. 1.5.2, observa-se que a carga total que foi transferida para as duas vigas da direção  $y$ , vigas V3 e V4, é igual a  $pl_x$ . Se essas vigas são simplesmente apoiadas nos pilares, a soma dos momentos máximos nas duas vigas é  $pl_x l_y^2/8$ , ou seja, as vigas V3 e V4 são capazes de equilibrar o momento total  $M_{y,tot}$ , sem

Além disso, deve-se prever uma armadura transversal adicional para o momento transversal  $M_y$ , o qual, em  $l_x/2$ , é aproximadamente igual a  $M_x$ . Essa armadura deve ser disposta em todo o vão, podendo ter um comprimento de  $0,6l_x$ . Assim, na região da parede deve ser disposta uma armadura adicional, em malha, para o momento dado na equação (1.7.3).

Na fig. 1.7.6, indica-se a faixa de reforço e a distribuição da armadura [5].

## B) Cargas acidentais

As cargas acidentais são aquelas que atuam nas estruturas das edificações em função do seu uso. As cargas verticais que se consideram atuando nos pisos das edificações referem-se ao peso de pessoas, móveis, utensílios e veículos, além daquelas que se aplicam em caráter especial, sendo supostas uniformemente distribuídas. Os valores mínimos dessas cargas são fornecidos na NBR-6120 e constam na tabela A1.2 do Apêndice 1.

Por exemplo, no caso dos edifícios residenciais, devem-se considerar os seguintes valores para as cargas acidentais:

Local	Carga (kN/m <sup>2</sup> )
dormitórios, sala, copa, cozinha, banheiro	1,50
despensa, área de serviço, lavanderia	2,00
escadas (sem acesso ao público)	2,50
forros (sem acesso a pessoas)	0,50
terraços (sem acesso ao público)	2,00

No caso de armazenagem em depósitos e na falta de valores experimentais, o peso dos materiais armazenados pode ser obtido a partir dos pesos específicos aparentes indicados na tabela A1.3 do Apêndice 1.

## Capítulo 2

# TEORIA DE FLEXÃO DE PLACAS

### 2.1 - Algumas relações da teoria da elasticidade

Antes de demonstrar a equação de equilíbrio das placas, é conveniente apresentar algumas importantes relações da teoria da elasticidade [6]. Essas relações são apresentadas para um corpo tridimensional, submetido às ações externas. Posteriormente, elas são particularizadas para as placas finas. Apenas o caso de deformações infinitesimais é considerado.

Para descrever o estado tridimensional de tensões em um corpo, considera-se o elemento infinitesimal em forma de um paralelepípedo ( $dx dy dz$ ), cujas faces são paralelas aos planos de coordenadas, como representado na fig. 2.1.1. Nessa figura, são indicadas as componentes das tensões nas três faces visíveis do elemento.

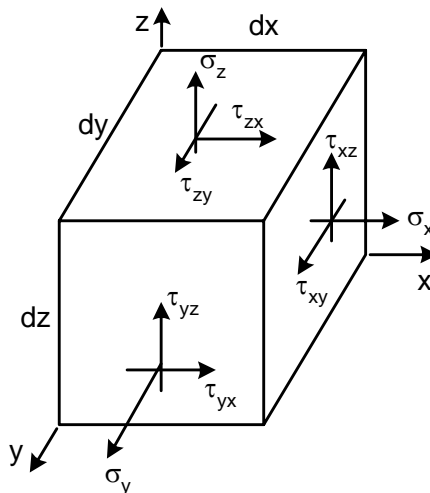


Fig. 2.1.1 - Tensões em um elemento tridimensional

As componentes das tensões normais nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  são designadas por  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ , respectivamente. As tensões tangenciais,  $\tau$ , são identificadas através de dois índices. O primeiro índice refere-se à direção da normal à superfície onde atua a tensão, enquanto o segundo índice indica a direção da tensão. Por exemplo, a componente  $\tau_{xy}$  tem a direção do eixo  $y$  e atua na face cuja normal tem a direção  $x$ . Todas as componentes das tensões são consideradas positivas quando atuarem na direção positiva do sistema de eixos de coordenadas.

O estado de tensões em um ponto do corpo é definido pelas nove componentes do tensor de tensões, dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

Uma vez que o tensor de tensões é simétrico, resulta

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} ; \tau_{xz} = \tau_{zx} ; \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.1.2)$$

que é a denominada lei da reciprocidade das tensões de cisalhamento.

Os deslocamentos de um ponto genérico do corpo são designados por suas componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$ , segundo as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Para relacionar os deslocamentos com as deformações, considera-se a fig. 2.1.2, onde se apresenta apenas a projeção do elemento tridimensional no plano  $x - y$ .

Em decorrência das tensões tangenciais, as faces do elemento sofrem rotações. A face AB sofre uma rotação  $\gamma_1$ , passando para a posição A'B'. A face AC sofre uma rotação  $\gamma_2$ , passando para a posição A'C'. Além disso, as dimensões iniciais do elemento,  $dx$  e  $dy$ , ficam alteradas por causa das tensões normais.

Utilizando a notação clássica para as derivadas parciais, tem-se

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = V_x \quad (2.2.17)$$

### 2) Equilíbrio de momentos em torno do eixo x

Fazendo a soma de todos os momentos em torno do eixo  $x$  igual a zero e procedendo da forma anterior, chega-se a

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = V_y \quad (2.2.18)$$

### 3) Equilíbrio de forças na direção z

Fazendo a soma das forças na direção  $z$  igual a zero, chega-se a

$$V_{x,x} + V_{y,y} = -p \quad (2.2.19)$$

que equivale a

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -p \quad (2.2.20)$$

Diferenciando (2.2.17) em relação a  $x$  e (2.2.18) em relação a  $y$ , substituindo em (2.2.20) e lembrando que  $M_{xy} = M_{yx}$ , resulta

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (2.2.21)$$

Introduzindo as expressões dos momentos dadas em (2.2.10), (2.2.11) e (2.2.14), obtém-se a equação diferencial da placa

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (2.2.22)$$



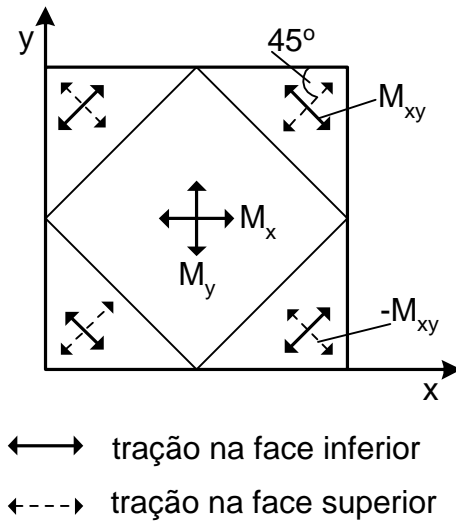


Fig. 2.4.2 - Momentos principais em uma placa quadrada com carga uniforme

As cargas transmitidas às vigas de apoio são obtidas considerando-se as forças suplementares de Kirchhoff, como é indicado na fig. 2.4.3. A carga total  $pab$  aplicada sobre a laje é igual à soma das cargas indicadas na fig. 2.4.3.

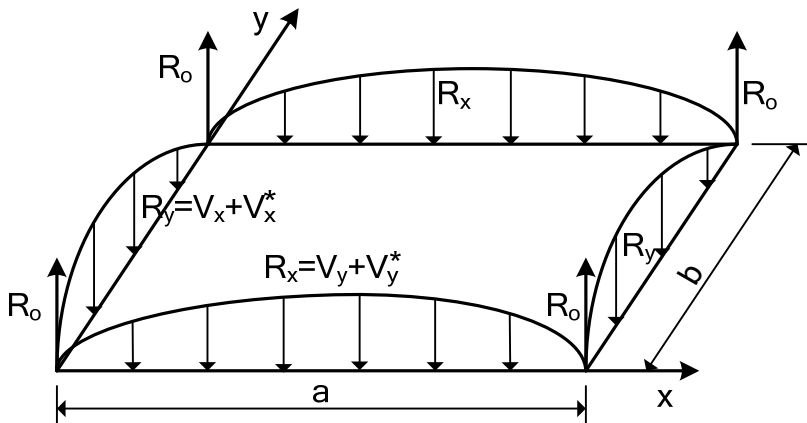


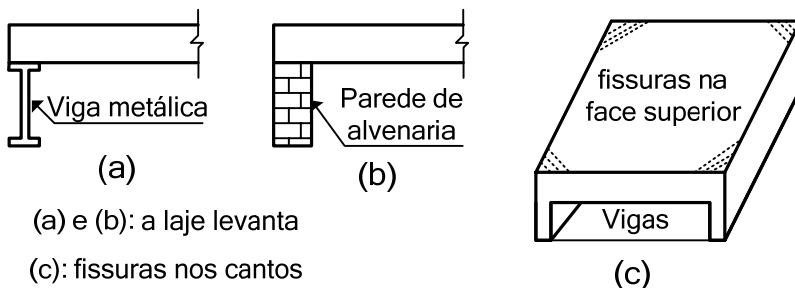
Fig. 2.4.3 – Carregamento nas vigas de apoio da placa

## Capítulo 3

# MÉTODOS SIMPLIFICADOS E MÉTODOS NUMÉRICOS PARA O CÁLCULO DE LAJES

### 3.1 – A teoria das grelhas para lajes sobre apoios rígidos

O cálculo das lajes armadas em cruz que não possuam rigidez à torção, ou que não sejam suficientemente ancoradas nos cantos para evitar o seu levantamento, pode ser feito de maneira simplificada por meio da denominada “Teoria das Grelhas”. Esse método também pode ser empregado para as lajes usuais, concretadas monoliticamente com as vigas, quando não são usadas armaduras de canto na face superior da laje. Esses casos são ilustrados na fig. 3.1.1.



(a) e (b): a laje levanta

(c): fissuras nos cantos

Fig. 3.1.1 – Situações onde se aplica a teoria das grelhas

Nas lajes concretadas monoliticamente com as vigas, deve-se verificar se a ocorrência de eventuais fissuras nos cantos simplesmente apoiados, como consequência da ausência das armaduras de canto na face superior da laje, pode comprometer a durabilidade da estrutura. Isto é particularmente importante quando a laje está ao ar livre, sujeita à ação da chuva.

Para as lajes situadas no interior dos edifícios residenciais e de escritório, essas fissuras, quando existem, ficam protegidas pelo piso. Nesses casos, podem-se omitir as armaduras de canto, para

simplificar a execução. De todo modo, em lajes com grandes vãos, é recomendável empregar uma armadura mínima nos cantos simplesmente apoiados para controle da fissuração.

Considere-se, para exemplificar, a laje simplesmente apoiada nos quatro lados, indicada na fig. 3.1.2. A laje é submetida a uma carga  $p$ , uniformemente distribuída por unidade de área. Os vãos são  $l_x$  e  $l_y$  e os apoios são considerados indeformáveis.

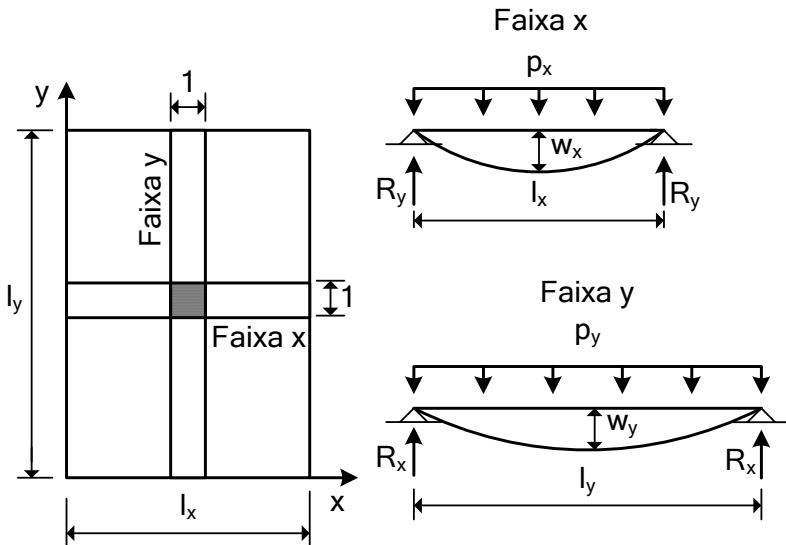


Fig. 3.1.2 - Laje simplesmente apoiada nos quatro lados

Inicialmente, consideram-se duas faixas de largura unitária, uma em cada direção, as quais se cruzam no centro da laje. A carga total  $p$  é dividida nos quinhões de carga  $p_x$  e  $p_y$ , correspondentes às direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Os quinhões de carga devem obedecer à relação

$$p = p_x + p_y \quad (3.1.1)$$

A flecha no centro da faixa da direção  $x$ , sob a ação da carga  $p_x$ , é dada por

Por outro lado, é fácil verificar que os momentos totais são equilibrados nas duas direções, o que não ocorre com a distribuição de esforços da fig. 2.6.2.

Pode-se demonstrar facilmente que as soluções da teoria das grelhas garantem o equilíbrio dos momentos totais nas duas direções, para todos os seis casos analisados. Desse modo, as reações de apoio podem ser consideradas uniformemente distribuídas para o cálculo das vigas.

Quando se tratar de lajes contínuas, adota-se o procedimento indicado na seção 1.4 do capítulo 1. Onde há continuidade entre duas lajes, considera-se um engaste perfeito e empregam-se as tabelas A2.22 a A2.27 para o cálculo da flecha, momentos fletores e reações de apoio. O momento negativo em um bordo comum é igual à média dos valores obtidos para as duas lajes vizinhas, ou 80% do maior deles em valor absoluto (ver equação (1.4.1)).

### 3.2 – Métodos simplificados para cálculo de lajes sobre apoios deformáveis

Normalmente, as vigas dos edifícios são flexíveis e sofrem deformações suficientes para alterar os esforços e as flechas das lajes do pavimento. Devido às deformações das vigas de apoio, ocorre um aumento dos momentos fletores positivos e das flechas das lajes. Por outro lado, ocorre uma redução dos momentos negativos, como é ilustrado na fig. 3.2.1.

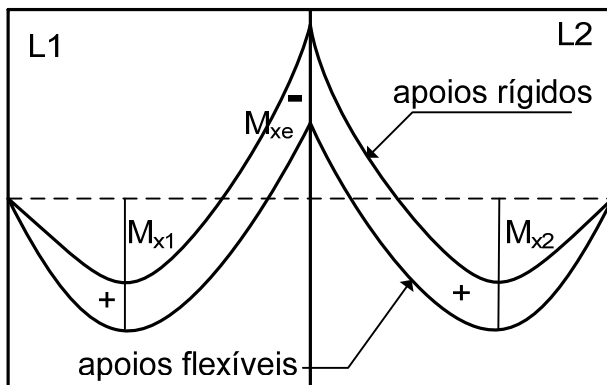


Fig. 3.2.1 - Redistribuição dos momentos fletores nas lajes devido às deformações das vigas de apoio

- faixa biapoiada:  $\alpha = 8$
- faixa engastada e apoiada:  $\alpha = 14,22$
- faixa biengastada:  $\alpha = 24$

O método de Marcus é bastante atrativo devido à sua simplicidade e, principalmente, pela disponibilidade de soluções analíticas, o que facilita a implementação computacional. Entretanto, deve ser observado que o método considera a rigidez à torção das lajes. Sendo assim, o método de Marcus sofre as mesmas restrições da teoria de placas, apresentadas na seção 2.7.

Se a laje for calculada pelo método de Marcus, as reações de apoio não devem ser consideradas uniformemente distribuídas sobre as vigas. Neste caso, as vigas devem ser calculadas com as distribuições de reações de apoio dadas no capítulo 2. Além disso, é necessário dimensionar as armaduras de canto, nos cantos simplesmente apoiados das lajes. Em geral, basta adotar uma armadura de canto com área igual à da maior armadura positiva existente no centro da laje. O detalhamento desta armadura é apresentado no capítulo 4.

### 3.4 - Teoria das linhas de ruptura

A teoria das linhas de ruptura, introduzida por K. W. Johansen, é uma alternativa para o cálculo de esforços e reações em lajes. Empregando esse método, é possível determinar os momentos de ruína que serão utilizados para o dimensionamento das lajes de diferentes formas, condições de contorno e carregamentos.

Em seu surgimento, o método teve uma grande aceitação pela possibilidade de se calcular lajes de formas irregulares, o que era praticamente impossível à época. Atualmente, a teoria das linhas de ruptura perdeu importância, em virtude da disponibilidade de recursos computacionais e de métodos numéricos mais avançados, como o método dos elementos finitos.

A teoria das linhas de ruptura, também denominada teoria das charneiras plásticas [15], considera o equilíbrio da laje no momento que antecede a ruína, ou seja, no estado limite último. A teoria não permite analisar o comportamento da laje nas condições de utilização, o que é uma das desvantagens em relação às soluções elásticas. Além disso, é necessário preestabelecer relações entre os

Adotando essas inclinações para as linhas de ruptura, podem-se calcular as reações de apoio de lajes de formas irregulares como, por exemplo, a laje em forma de L indicada na fig. 3.4.8.

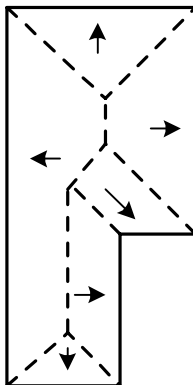


Fig. 3.4.8 - Linhas de ruptura - Laje em L

### 3.5 – A analogia da grelha equivalente

A analogia da grelha equivalente é um dos métodos numéricos mais utilizados para análise de lajes de concreto armado, estando implementado em diversos softwares comerciais. O método pode ser utilizado para a análise de lajes poligonais de formas diversas, incluindo também as vigas de apoio. Desse modo, podem-se calcular os esforços no pavimento como um todo, levando-se em conta as deformações das vigas. Para o caso de lajes poligonais isoladas sobre apoios rígidos, o método foi implementado em um dos módulos do software PACON\*.

Inicialmente, a laje poligonal é discretizada através de dois conjuntos de linhas uniformemente espaçadas, como indicado na fig. 3.5.1. Essas linhas formam uma grelha equivalente que substitui a laje maciça de forma aproximada.

As barras da grelha, dispostas segundo a direção  $x$ , possuem seção retangular com largura  $b = \Delta y$  e altura  $h$ , onde  $\Delta y$  é o

---

\* Programa auxiliar para projeto de estruturas de concreto. Desenvolvido pelo Autor. Informações disponíveis em: <[www.editoradunas.com.br](http://www.editoradunas.com.br)>.

Tabela 3.5.2 – Ações da grelha sobre as vigas da direção x

x (m)	$\beta = 1,00$		$\beta = 0,50$		$\beta = 0,01$	
	V (kN)	T (kNm)	V (kN)	T (kNm)	V (kN)	T (kNm)
0,29	1,31	1,21	1,30	0,75	1,30	0,02
0,86	2,75	0,85	2,83	0,54	2,96	0,01
1,43	3,38	0,43	3,56	0,27	3,84	0,01
2,00	3,56	0,00	3,78	0,00	4,12	0,00
2,57	3,38	-0,43	3,56	-0,27	3,84	-0,01
3,14	2,75	-0,85	2,83	-0,54	2,96	-0,01
3,71	1,31	-1,21	1,30	-0,75	1,30	-0,02

### 3.6 - O método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas é um método numérico que leva a uma solução aproximada da equação diferencial da placa [7,8]. Neste método, as derivadas que aparecem na equação diferencial são substituídas por aproximações em diferenças, tomadas em alguns pontos previamente selecionados, denominados pontos nodais. Esses pontos são localizados nos nós de uma malha retangular, triangular ou de outra forma, denominada malha de diferenças finitas. Alguns tipos de malhas de diferenças finitas são representados na fig. 3.6.1.

A função  $w(x, y)$ , que representa a superfície deformada da placa, é descrita por valores aproximados da deflexão nos diversos pontos nodais. Quanto mais refinada for a malha, ou seja, quanto maior o número de pontos nodais, menor será o erro obtido.

Antes de apresentar as equações de diferenças finitas para a placa, é conveniente analisar o caso unidimensional indicado na fig. 3.6.2. Nessa figura, representa-se uma função  $f(x)$  cujos valores são conhecidos em um conjunto de pontos discretos.

A função  $f(x)$  pode ser interpolada através do polinômio

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i \quad (3.6.1)$$

onde os coeficientes  $a_i$  são determinados de forma que  $\phi(x) = f(x)$  nos pontos em que a função original é conhecida.

### 3.7 - O método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos [16] é um método numérico que também pode ser empregado para a análise de placas. Atualmente, esse método é bastante utilizado para resolver diversos problemas de interesse da Engenharia, como análise estrutural, fluxo de fluidos, condução de calor, dispersão de poluentes, etc. O grande atrativo do método é a generalidade da formulação, o que permite que um conjunto de rotinas de cálculo possa ser utilizado para resolver problemas diferentes.

No caso da análise estrutural, o método pode ser empregado tanto na formulação em deslocamentos, quanto na formulação em forças. Essas duas formulações são análogas aos bem conhecidos método da rigidez e método das forças, utilizados na análise de estruturas reticuladas.

A formulação em deslocamentos tem sido preferida em virtude da facilidade de implementação computacional. Assim, em análise estrutural utiliza-se, quase que exclusivamente, a formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos. Essa formulação é baseada no princípio dos trabalhos virtuais, apresentado a seguir para o caso bidimensional.

O primeiro passo do método dos elementos finitos consiste na subdivisão do domínio do problema em um conjunto de pequenos elementos, denominados elementos finitos. O domínio discretizado forma uma malha de elementos finitos. No caso bidimensional (placas e chapas), podem ser empregados os elementos indicados na fig. 3.7.1.

Cada elemento é definido por sua geometria e pelo número de nós. Assim, têm-se os elementos triangulares de três e de seis nós, os elementos retangulares de quatro e de oito nós e os elementos isoparamétricos. Esses últimos são elementos distorcidos, que permitem uma boa modelagem de domínios irregulares.

Em geral, um aumento progressivo do número de nós melhora as características de precisão do elemento. Consequentemente, a malha terá que ser mais refinada, quando for utilizado um elemento com poucos nós.

Na fig. 3.7.2, representa-se um corpo bidimensional discretizado em elementos triangulares de três nós. O corpo é



submetido às forças  $t_x, t_y$  por unidade de área e às forças  $b_x, b_y$  por unidade de volume.

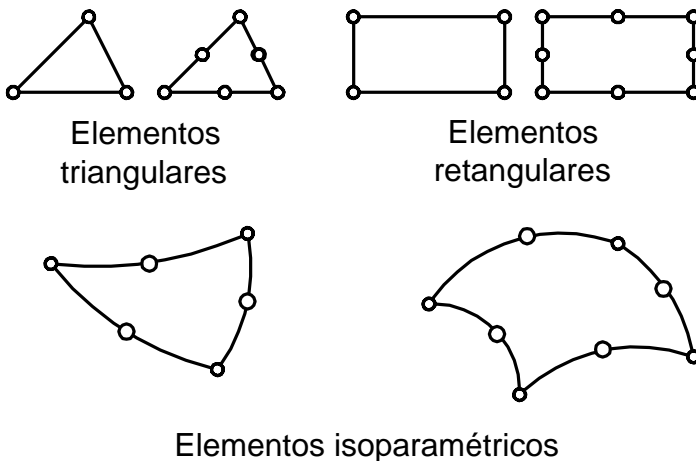


Fig. 3.7.1 - Elementos finitos para análise bidimensional

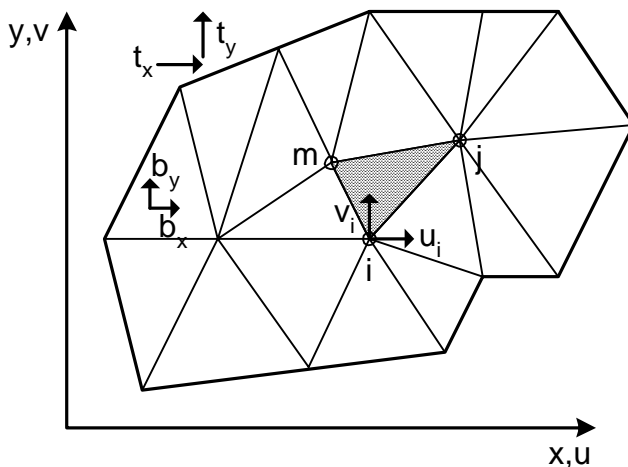


Fig. 3.7.2 - Malha de elementos finitos

Os deslocamentos de um ponto genérico dentro de um elemento finito são dados por

## **Capítulo 4**

# **DETALHAMENTO DAS LAJES MACIÇAS**

### **4.1 - Introdução**

Nos capítulos anteriores foram apresentadas as considerações relativas ao cálculo das cargas e dos esforços solicitantes nas lajes maciças dos edifícios. Após o cálculo dos esforços, o dimensionamento é feito conforme indicado no Volume 1. Por último, deve-se fazer o detalhamento das armaduras.

De um modo geral, o projeto não pode se limitar a um cálculo preciso das solicitações e das dimensões dos elementos estruturais. Além disso, devem ser tomadas algumas medidas que facilitem a execução, possibilitando uma maior uniformidade na concretagem da estrutura e uma adequada proteção das armaduras contra a corrosão. Assim, o detalhamento das armaduras torna-se uma etapa de fundamental importância no projeto estrutural. De um correto detalhamento, dependerá o sucesso ou o fracasso do projeto.

Neste capítulo, são apresentadas as considerações relativas ao detalhamento das lajes maciças de concreto armado. O detalhamento é feito atendendo as disposições construtivas da NBR-6118. O cálculo de flechas também é apresentado, apesar de este assunto ser tratado em detalhes no capítulo 6.

### **4.2 - Espessura mínima das lajes maciças**

As lajes devem ser projetadas com uma espessura mínima suficiente para limitar suas deformações, além de evitar vibrações que causem desconforto aos usuários da edificação. Além disso, do ponto de vista construtivo, é conveniente que as lajes sejam projetadas com armadura simples, para evitar o uso de armadura superior ao longo dos vãos. Assim, a espessura adotada deve ser tal que o dimensionamento recaia no caso de armadura simples, conforme os critérios indicados no Volume 1.

Segundo a NBR-6118, a espessura das lajes maciças de concreto armado não deve ser menor que os seguintes limites:

- a) 7 cm para lajes de cobertura não em balanço;
- b) 8 cm para lajes de piso não em balanço;
- c) 10 cm para lajes em balanço;
- d) 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- e) 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN;
- f) 16 cm para lajes lisas e 14 cm para lajes cogumelo.

Para as lajes em balanço com espessura  $h < 19$  cm, deve-se considerar o coeficiente adicional

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05h \geq 1 \quad (4.2.1)$$

onde  $h \geq 10$  é a espessura da laje em cm.

O coeficiente  $\gamma_n$  deve majorar os esforços de cálculo finais, quando do dimensionamento das lajes em balanço.

Na seção seguinte, são fornecidas algumas indicações quanto à espessura mínima das lajes, necessária para limitar as suas deformações.

### 4.3 - Cálculo de flechas em lajes

A NBR-6118 estabelece diversos limites para os deslocamentos dos elementos estruturais. Esses limites são valores práticos, determinados de modo a evitar que os deslocamentos da estrutura não causem sensações desagradáveis aos usuários, não impeçam a utilização adequada da construção, nem causem danos em elementos não estruturais. Além disso, esses limites devem garantir a validade da hipótese de pequenos deslocamentos, usualmente admitida na análise estrutural.

Assim, o limite a ser adotado para um deslocamento é função do dano que se quer evitar. Por exemplo, se o objetivo é evitar vibrações que possam ser sentidas no piso, a flecha devida à carga acidental não deve ultrapassar um determinado limite. Por outro lado, o objetivo pode ser evitar danos em paredes. Neste caso, o

## Capítulo 5

# CÁLCULO DE VIGAS

### 5.1 - Cargas nas vigas dos edifícios

A estrutura usual dos edifícios é constituída por um pórtico espacial ligado às lajes dos pisos, dispostas ao longo dos diversos andares. Trata-se, portanto, de uma estrutura tridimensional formada por elementos lineares (barras) e por elementos bidimensionais planos (lajes).

O cálculo dos esforços considerando o conjunto da estrutura tridimensional, além de extremamente trabalhoso, geralmente é desnecessário, em virtude das diversas incertezas relativas ao carregamento, condições de apoio, rigidez dos elementos componentes, comportamento dos nós, etc. Por isso, no projeto estrutural são introduzidas algumas simplificações que permitem reduzir o trabalho de cálculo, além de levar a uma solução a favor da segurança. Uma dessas simplificações consiste em calcular os esforços nas lajes separadamente do restante da estrutura, como foi feito nos capítulos anteriores. Além disso, o pórtico espacial pode ser desmembrado em vários pórticos planos de múltiplos andares. O cálculo dos pórticos planos fornece os esforços solicitantes nas barras verticais (pilares) e nas barras horizontais (vigas).

Como uma simplificação adicional, o cálculo dos pórticos planos pode ser substituído pelo cálculo das vigas e dos pilares, isoladamente. Esse último nível de simplificação constitui o procedimento tradicional de projeto das estruturas de concreto armado dos edifícios. Dessa forma, os esforços solicitantes são calculados separadamente para as lajes, para as vigas e para os pilares da estrutura. Evidentemente, devem ser feitas algumas considerações que garantam uma solução favorável à segurança. Essas considerações são apresentadas na seção 5.3.

Limitando-se o estudo às vigas da estrutura, o primeiro passo consiste na determinação do carregamento atuante. No caso das vigas dos edifícios, as cargas mais frequentes são as seguintes:

a) Peso próprio

O peso próprio da viga é considerado como uma carga linear, uniformemente distribuída, correspondendo ao peso de 1 m de viga. Assim, o peso próprio,  $p_p$ , é dado por

$$p_p = 25A_c, \text{ kN/m} \quad (5.1.1)$$

onde  $A_c$  é a área da seção transversal da viga em  $\text{m}^2$ .

b) Alvenarias

O peso das alvenarias,  $p_a$ , também é considerado uniformemente distribuído, sendo dado por

$$p_a = \gamma_a tH, \text{ kN/m} \quad (5.1.2)$$

onde  $\gamma_a$  é o peso específico da alvenaria,  $t$  é a espessura e  $H$  é a altura da parede.

Para o peso específico da alvenaria, podem ser adotados os seguintes valores:

- alvenaria de tijolos cerâmicos furados:  $13 \text{ kN/m}^3$ ;
- alvenaria de tijolos cerâmicos maciços:  $18 \text{ kN/m}^3$ .

c) Ações das lajes

Usualmente, as ações das lajes sobre as vigas são consideradas como cargas uniformemente distribuídas. Entretanto, conforme foi mostrado nos capítulos 1 a 3, esse procedimento não é correto, quando se emprega a teoria de placas. Por outro lado, empregando os

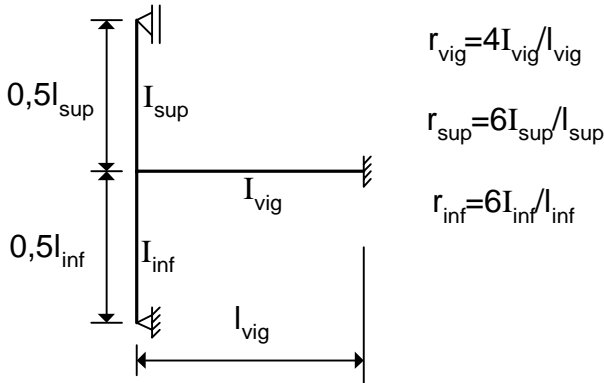


Fig. 5.3.3 - Modelo para o cálculo do momento fletor

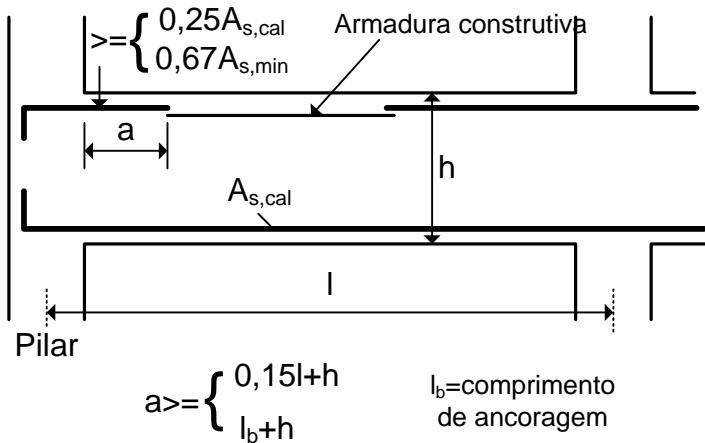


Fig. 5.3.4 – Armadura negativa nos apoios de extremidade – alternativa de projeto

As exigências anteriores decorrem do cálculo simplificado como viga contínua. Se o cálculo for feito como pórtico, os esforços finais para dimensionamento são obtidos diretamente da resolução do pórtico, desconsiderando-se os itens anteriores.

Para levar em conta a largura dos apoios, a NBR-6118 permite arredondar o diagrama de momentos fletores sobre os apoios

dimensionamento para o momento negativo  $X_d$  sobre o apoio resultou em três barras, a cada uma correspondendo uma fração do momento.

Conforme está indicado na fig. 5.5.2, a ordenada correspondente ao momento máximo no vão é dividida em três partes iguais (admitindo-se a existência de três barras de mesmo diâmetro). A ordenada correspondente ao momento negativo também é dividida em três partes iguais, neste exemplo. A cada fração dos momentos indicada na figura, corresponde uma barra da armadura.

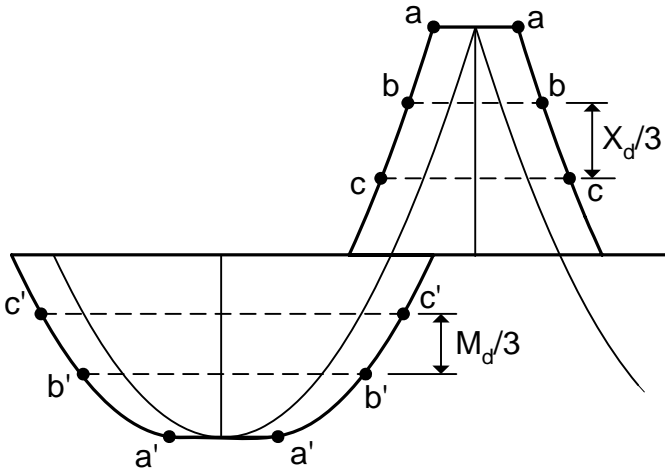


Fig. 5.5.2 – Fracionamento do diagrama de momentos fletores

Traçando linhas horizontais, paralelas ao eixo da viga, até encontrar o diagrama de momentos fletores deslocado, ficam determinados os pontos (a, b, c) e (a', b', c') indicados na fig. 5.5.2. A partir de cada um desses pontos, pode-se iniciar a ancoragem de uma barra. Entretanto, deve-se garantir que a barra ultrapasse a seção correspondente ao ponto seguinte, pois a barra só é totalmente desnecessária após essa seção.

Por exemplo, a barra que tem sua ancoragem iniciada no ponto a', deve ultrapassar o ponto b', obrigatoriamente, pois entre essas duas seções transversais o momento fletor é maior que  $2M_d/3$ , o que exige a presença de três barras. A partir do ponto b', são

necessárias apenas duas barras para equilibrar o momento fletor. Logo, uma barra pode ser cortada a partir desse ponto.

Entretanto, para levar em conta os erros de posicionamento durante a montagem das armaduras, a NBR-6118 exige que a barra que teve sua ancoragem iniciada no ponto  $a'$  ultrapasse o ponto  $b'$  de um comprimento mínimo de  $10\phi$ , sendo  $\phi$  o diâmetro da barra. O mesmo procedimento é empregado para todas as barras, conforme está indicado na fig. 5.5.3.

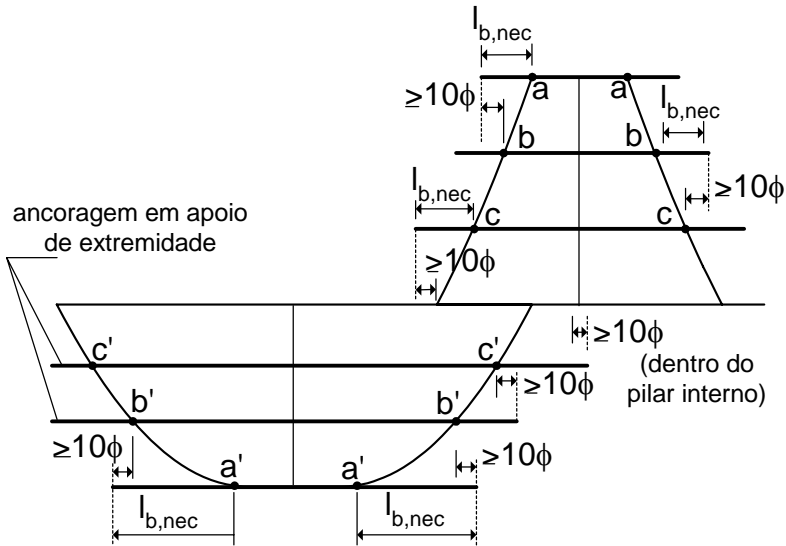


Fig. 5.5.3 – Escalonamento da armadura longitudinal

Ao calcular os comprimentos de ancoragem, deve ser observado que, no caso de vigas de maior altura, as barras da armadura negativa estarão em uma posição de má aderência. Nesses casos, o comprimento de ancoragem  $l_{b,nec}$  será maior (ver cap. 8, Volume 1). A última barra ancorada deve ultrapassar o ponto de momento nulo deslocado de pelo menos  $10\phi$ .

As barras da armadura positiva estarão, sempre, em uma situação de boa aderência. Pode-se adiantar que nem todas as barras dessa armadura de vão poderão ser cortadas, pois algumas delas deverão ser prolongadas, obrigatoriamente, até os apoios, conforme é apresentado na seção 5.6.



## Capítulo 6

# ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO Deformações

### 6.1 - Introdução

Nos capítulos anteriores, foram discutidos os procedimentos adotados para o dimensionamento das estruturas de concreto armado, tendo como objetivo principal a obtenção de um adequado nível de segurança. Desse modo, foram introduzidos coeficientes parciais de segurança para majorar as cargas e minorar as resistências dos materiais. As equações de equilíbrio foram obtidas no estado limite último, através da consideração de um critério de ruptura das seções da peça. Em resumo, os procedimentos apresentados até aqui constituem a primeira fase do projeto, que é a comprovação da segurança em relação aos estados limites últimos.

Em uma segunda etapa do projeto, deve-se analisar o comportamento da estrutura sob as condições normais de utilização, ou seja, antes da ruína. Assim, a estrutura deve ser suficientemente rígida para que suas deformações, sob a ação das cargas de serviço, não provoquem danos inaceitáveis em elementos não estruturais, não afetem o seu uso ou a sua aparência, nem causem desconforto aos usuários. Além disso, o grau de fissuração, em geral inevitável nas peças fletidas de concreto armado, não deve afetar a durabilidade da estrutura. Portanto, a segunda etapa do projeto consiste na comprovação da não ocorrência dos estados limites de utilização: estado de deformações excessivas e estado de fissuração inaceitável.

Do ponto de vista prático, esses dois estados limites são verificados separadamente, apesar de haver uma relação íntima entre eles. Assim, o que se procura é a limitação das deformações da estrutura e das aberturas das fissuras na superfície da peça.

Pode-se adiantar que a abertura das fissuras será tanto maior, quanto maior for o diâmetro das barras da armadura. Desse modo, geralmente não é necessário verificar o estado de fissuração das lajes maciças dos edifícios, pois as barras utilizadas possuem diâmetros

muito pequenos. Além disso, as flechas podem ser calculadas admitindo-se que toda a laje esteja no estágio I (concreto não fissurado). Assim, para as lajes maciças, a verificação dos estados limites de utilização fica resumida a um simples cálculo de flechas, como foi apresentado no capítulo 4.

No caso das vigas, deve-se considerar o estágio II, pois a rigidez é sensivelmente afetada pela fissuração. Para isso, é necessário dispor de modelos que permitam avaliar as flechas e a abertura das fissuras das vigas sob as condições de serviço. Alguns desses modelos são apresentados neste capítulo e no seguinte.

## 6.2 - Combinações das ações de serviço

Os estados limites de utilização decorrem de ações cujas combinações podem ter diferentes ordens de grandeza de permanência na estrutura. Essas combinações são classificadas do seguinte modo:

- a) *combinações quase permanentes*: são combinações que podem atuar durante grande parte do período de vida da estrutura, da ordem da metade deste período;
- b) *combinações frequentes*: são combinações que se repetem muitas vezes durante o período de vida da estrutura, da ordem de  $10^5$  vezes em 50 anos, ou que tenham duração total igual a uma parte não desprezível desse período, da ordem de 5%;
- c) *combinações raras*: são combinações que podem atuar no máximo algumas horas durante o período de vida da estrutura.

No caso das estruturas de concreto armado, interessam apenas as combinações quase permanentes e as combinações frequentes das ações. As combinações quase permanentes são utilizadas para a verificação do estado limite de deformações excessivas. As combinações frequentes são empregadas para a verificação do estado limite de fissuração inaceitável. Havendo ações de natureza dinâmica, deve-se verificar, também, o estado limite de vibrações excessivas, para o que são utilizadas as combinações frequentes. As combinações frequentes são também usadas para a verificação dos

## Capítulo 7

# ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

## Fissuração

### 7.1 - A colaboração do concreto entre fissuras

Para mostrar a influência do concreto tracionado entre fissuras, considere-se o elemento de concreto armado indicado na fig. 7.1.1, submetido a uma força de tração  $P$  constante. O elemento encontra-se fissurado, estando as fissuras espaçadas de uma distância igual a  $2a$ .

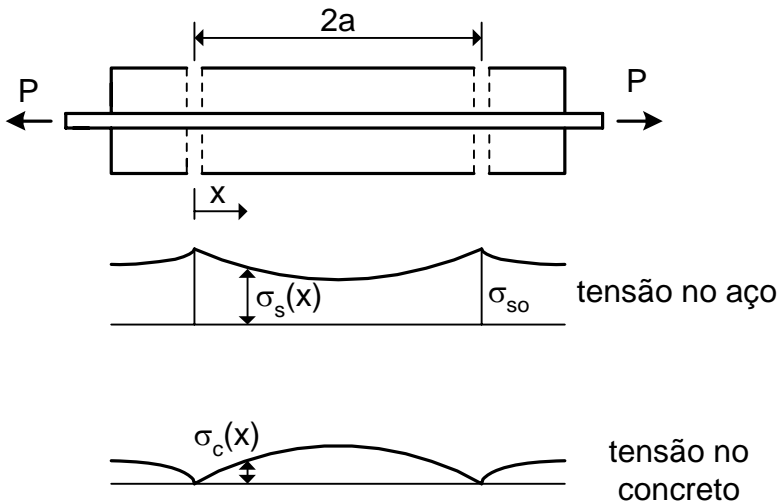


Fig. 7.1.1 - Elemento fissurado sob tração simples

Nas seções fissuradas, a tensão na barra de aço atinge o valor máximo  $\sigma_{so}$  e a tensão no concreto é nula. Essas seções estão no estágio II e toda a força de tração é absorvida pela armadura. Entretanto, por causa da aderência, ocorre uma transferência de parte

Suponha-se, agora, o elemento da fig. 7.1.1 submetido a uma deformação imposta  $\varepsilon_{cn}$ , decorrente da retração e/ou de uma redução de temperatura. Se essa deformação é impedida de ocorrer, devido à presença de outros elementos na estrutura, o elemento em análise ficará submetido a um esforço normal de tração, como na fig. 7.1.5.

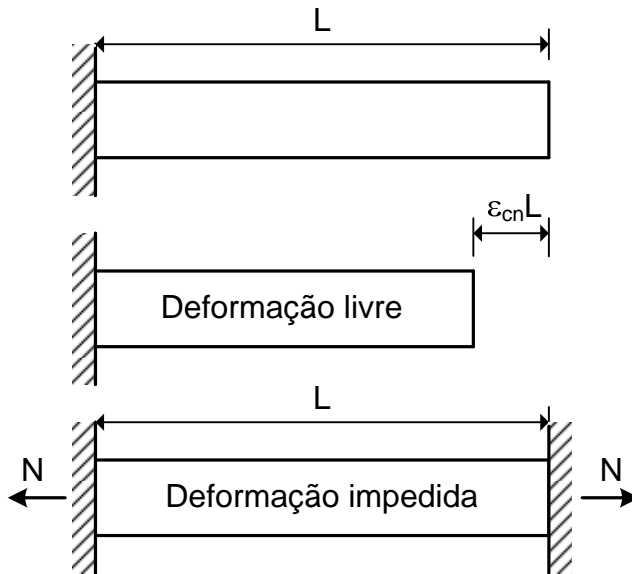


Fig. 7.1.5 – Elemento submetido a uma deformação imposta

Enquanto o elemento estiver no estágio I, ele estará submetido ao esforço normal

$$N_1 = E_s A_s \varepsilon_{cn} + E_c A_c \varepsilon_{cn} \quad (7.1.20)$$

Quando a deformação imposta for igual à deformação de fissuração do concreto,  $\varepsilon_{cr} = f_{ct}/E_c$ , sendo  $E_c$  o módulo de deformação longitudinal, surgirá a primeira fissura no elemento. O esforço normal de fissuração vale

$$N_r = (1 + n\rho_{se}) A_c f_{ct} \quad (7.1.21)$$

O CEB/90 adota a expressão (7.2.21), considerando pequenas alterações no valor do coeficiente  $\beta$  que levam em conta a duração e a repetição do carregamento.

Para finalizar, é necessário definir uma área de concreto efetiva,  $A_{ce}$ , para o cálculo da taxa de armadura  $\rho_{se} = A_s/A_{ce}$ . A diferença entre a área efetiva e a área real da seção do elemento estrutural decorre da distribuição não uniforme das tensões normais. Essa área é definida na seção seguinte.

### 7.3 - Verificação do estado limite de abertura das fissuras

Em estruturas de concreto armado, a fissuração pode ser inevitável por causa da baixa resistência à tração do concreto. Entretanto, a abertura das fissuras não deve comprometer a durabilidade nem a aparência da estrutura. Para isto, devem ser impostos limites para a abertura das fissuras, os quais dependem da agressividade do meio e do grau de proteção da estrutura.

Segundo a NBR-6118, podem-se adotar os seguintes limites para a abertura das fissuras:

- a) 0,4 mm para a classe de agressividade ambiental I;
- b) 0,3 mm para as classes de agressividade ambiental II e III;
- c) 0,2 mm para a classe de agressividade ambiental IV.

Em situações específicas, pode ser necessário reduzir esses limites para a abertura das fissuras, como é apresentado no Volume 4 para os reservatórios. Em marquises, é conveniente considerar o limite de 0,2 mm, ou mesmo de 0,1 mm, devido ao maior risco de deterioração das armaduras que se verifica nessas estruturas.

As expressões para o cálculo da abertura  $w_k$  das fissuras foram deduzidas na seção 7.2. Essas expressões são adotadas pelo CEB/90.

Inicialmente, deve-se calcular a tensão limite na armadura

$$\sigma_{sr} = \left( \frac{1 + n\rho_{se}}{\rho_{se}} \right) f_{ct} \quad (7.3.1)$$

onde  $k$  é um coeficiente que leva em conta a qualidade da aderência entre o aço e o concreto.

Esse tipo de formulação é adotado na NBR-6118 para o cálculo da abertura das fissuras (ver equação (7.6.1)).

Impondo a condição  $w \leq w_{k,lim}$  resulta

$$\phi \leq \frac{E_s f_{ct} w_{k,lim}}{k \sigma_s^2} \quad (7.4.8)$$

Observa-se que a equação (7.4.8) não leva em conta as deformações impostas  $\varepsilon_{cn}$  nem a taxa de armadura  $\rho_{se}$ , ao contrário da equação (7.4.6).

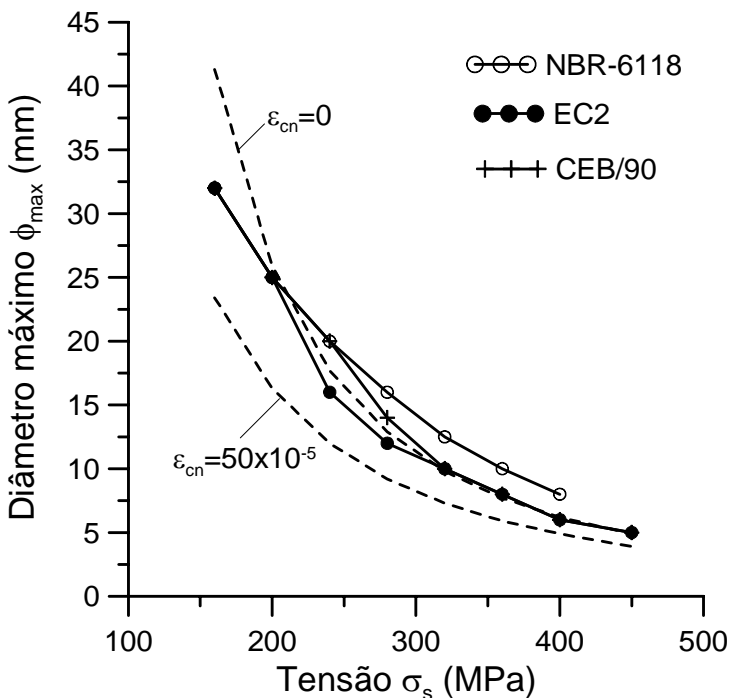


Fig. 7.4.1 – Determinação do diâmetro máximo em função da tensão no aço para abertura limite das fissuras de 0,3 mm

esforço normal deve ser equilibrado apenas pela armadura, ou seja,  $N_{r1} = A_s \sigma_{sr}$ , onde  $\sigma_{sr}$  é a tensão na armadura na seção fissurada. Dessas duas relações, obtém-se a equação (7.3.1).

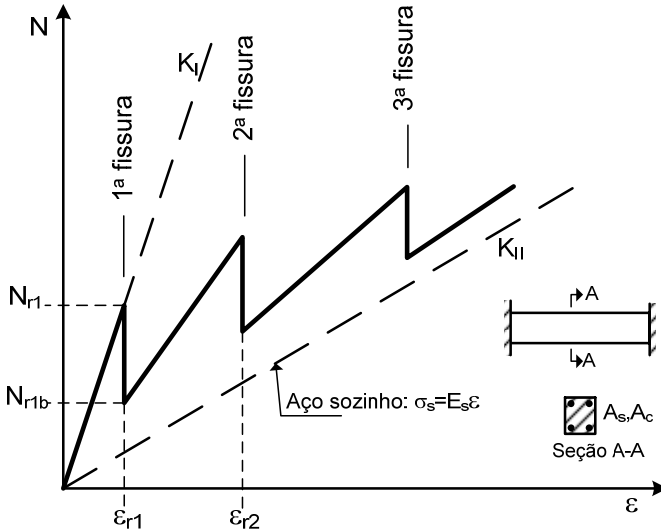


Fig. 7.5.3 – Variação do esforço de coação por impedimento da retração e/ou da deformação térmica

Para haver o desenvolvimento do processo de fissuração, com o surgimento de novas fissuras, é necessário que  $\sigma_{sr} \leq f_{yd}$ . Impondo essa condição na equação (7.3.1), obtém-se a taxa de armadura mínima

$$\rho_{\min} = \frac{f_{ct}}{f_{yd} - n f_{ct}} \cong \frac{f_{ct}}{f_{yd}} \quad (7.5.1)$$

onde  $f_{ct}$  é a resistência média à tração do concreto.

Essa taxa mínima de armadura garante apenas que o aço não escoar no surgimento da primeira fissura, possibilitando o surgimento de novas fissuras de pequena abertura. Se a armadura for menor do que essa armadura mínima, o aço escoará logo no surgimento da primeira fissura, impedindo o surgimento de novas fissuras. Nesse caso, todo o alongamento imposto ficará concentrado na primeira fissura, a qual apresentará uma abertura inaceitável.

exclusivamente às deformações impostas diminui bastante após a fissuração. Além disso, o concreto sofre relaxação (redução da tensão para uma deformação imposta constante), o que permite considerar  $\sigma_s \leq \beta \sigma_{sr}$ .

O fator de restrição  $R$  varia com a relação  $L/H$ , entre o comprimento  $L$  e a altura  $H$  da parede. Esse fator também é variável dentro da parede, sendo máximo no eixo vertical de simetria, junto à base. A título de exemplo, apresenta-se a fig. 7.5.4, extraída da ref.[34], a qual fornece os valores de  $R$  para uma parede com relação  $L/H = 4$ .

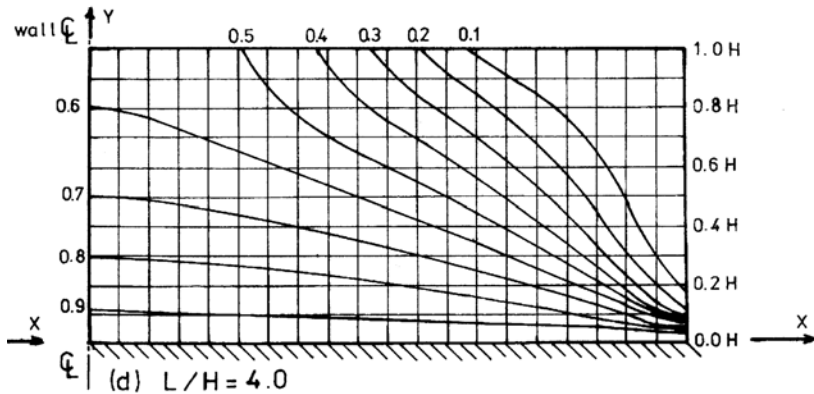


Fig. 7.5.4 – Fator de restrição para parede com  $L/H=4$   
(extraída da ref.[34])

Da fig. 7.5.4 verifica-se que o fator de restrição sofre grandes variações dentro de uma mesma parede. É possível economizar no detalhamento das armaduras, dividindo a parede em zonas e adotando o maior valor de  $R$  para cada zona. Esse procedimento é recomendável no projeto de paredes de grandes dimensões.

Os valores de  $R$  apresentados na fig. 7.5.4 pressupõem um engaste perfeito da parede na base. Na realidade, para levar em conta os encurtamentos da própria base, esses valores devem ser multiplicados pelo fator de redução [35]

$$k = \frac{1}{1 + \frac{E_p A_p}{E_b A_b}} \quad (7.5.3)$$



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-6118: Projeto de Estruturas de Concreto*. Rio de Janeiro, 2014.
2. ROCHA, A. M. *Curso Prático de Concreto Armado*. v.1, 12. ed., Rio de Janeiro: Ed. Científica, 1971.
3. SOUZA, V. C. M.; CUNHA, A. J. P. *Lajes em Concreto Armado e Protendido*. Niterói: EDUFF, 1994.
4. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-6120: Cargas Para o Cálculo de Estruturas de Edificações*. Rio de Janeiro, 1980.
5. LEONHARDT, F., MÖNNIG, E. *Construções de Concreto*. Rio de Janeiro: Interciência, v.1, 1977; v.3, 1978.
6. TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Teoria da Elasticidade*. 3. ed., Rio de Janeiro: Ed. Guanabara Dois, 1980.
7. SZILARD, R. *Theory and Analysis of Plates: classical and numerical methods*. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1974.
8. TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1970.
9. BARÉS, R. *Tablas Para el Cálculo de Placas y Vigas Pared*. Barcelona: Gustavo Gili, 1970.
10. HAHN, J. *Vigas Contínuas, Pórticos, Placas y Vigas Flotantes sobre Terreno Elástico*. Barcelona: Gustavo Gili, 1982.
11. KALMANOK, A. S. *Manual Para Calculo de Placas*. Montevideo: Editora Inter Ciencia, 1961.
12. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *CEB-FIP Model Code 1990*. Published by Thomas Telford, London, 1993.
13. ARAÚJO, J. M. *Avaliação dos métodos simplificados para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis*. Revista

- Teoria e Prática na Engenharia Civil, Rio Grande: Ed. Dunas, n.12, p.1-11, out. 2008. Disponível em: <[www.editoradunas.com.br/revistatpec](http://www.editoradunas.com.br/revistatpec)>.
14. COMISIÓN PERMANENTE DEL HORMIGÓN. *Instrucción de Hormigón Estructural, EHE*. Madrid, 2007.
  15. VAN LANGENDONCK, T. *Teoria Elementar das Charneiras Plásticas*. São Paulo: Associação Brasileira de Cimento Portland, v.1, 1970; v.2, 1975.
  16. ZIENKIEWICZ, O. C. *The Finite Element Method*. 3. ed., McGraw-Hill, 1977.
  17. MINDLIN, R. D. *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, v.18, n.1, p.31-38, 1951.
  18. REAL, M. V. *Análise estática de lajes de concreto armado incluindo não-linearidade física e geométrica*. Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1990.
  19. ARAÚJO, J. M.; BIGNON, P. G. *Métodos de minimização para análise não-linear de estruturas*. Relatório de Pesquisa RP-110/93, Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1993.
  20. ARAÚJO, J. M. *Modelo para análise de vigas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, Lisboa, n.32, p.9-14, 1991.
  21. COMITÉ EUROPEU DE NORMALIZAÇÃO. NP EN 1992-1-1. *Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de Betão – Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. Março, 2010.
  22. FUSCO, P. B. *Técnica de Armar as Estruturas de Concreto*. São Paulo: PINI, 1995.
  23. SCHEGG, A.; DECANINI, L. *Sobre las deformaciones en elementos de hormigón armado*. Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Anais, v.2, p.1070-1120, Porto Alegre, 1971.

24. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *Code-modèle CEB/FIP pour les Structures en Béton*. Bulletin d'Information 124/125, Paris, 1978.
25. ARAÚJO, J. M.; CAMPOS FILHO, A. *Modelo bidimensional para análise de vigas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, Lisboa, n.34, p.9-12, 1992.
26. ARAÚJO, J. M. *Pilares Esbeltos de Concreto Armado: Algoritmos para análise e dimensionamento*. Rio Grande: Editora da FURG, 1993.
27. ARAÚJO, J. M. *Análise probabilística de vigas de concreto armado. Parte 1: Avaliação das deformações*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, Lisboa, n.42, p.19-24, 1997.
28. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *CEB Design Manual on Cracking and Deformations*. Lausanne, 1985.
29. GHALI, A.; FAVRE, R. *Concrete Structures: Stresses and Deformations*. London: Chapman and Hall, 1986.
30. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318M-11) and Commentary*. 2011.
31. ARAÚJO, J. M. *Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, Rio Grande: Ed. Dunas, n.5, p.1-10, Agosto, 2004. Disponível em: <[www.editoradunas.com.br/revistatpec](http://www.editoradunas.com.br/revistatpec)>.
32. EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. EN 1992-3. *Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 3: Liquid retaining and containment structures*. June, 2006.
33. LEONHARDT, F., MÖNNIG, E. *Construções de Concreto*. Rio de Janeiro: Interciência, v.4, 1979.
34. KHEDER, G. F. *A new look at the control of volume change cracking of base restrained concrete walls*. ACI Structural Journal, v.94, n.3, p. 262-271, May-June 1997.

35. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Effect of Restraint, Volume Change, and Reinforcement on Cracking of Mass Concrete*. ACI 207.2R-95, 1995.