

CURSO DE CONCRETO ARMADO

Tópicos Avançados

JOSÉ MILTON DE ARAÚJO

**CURSO DE
CONCRETO ARMADO**

Tópicos Avançados

Editora DUNAS

CURSO DE CONCRETO ARMADO

Tópicos Avançados

© Copyright Editora DUNAS

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

Araújo, José Milton de
A663c Curso de concreto armado: tópicos avançados / José Milton
de Araújo. – Rio Grande, RS: Editora Dunas, 2023.
348 p. : il. ; 14 x 21 cm

Inclui bibliografia
ISBN 978-85-86717-26-0

1. Engenharia civil. 2. Concreto armado. 3. Construção de
concreto armado. 4. Projeto estrutural. I. Título.

CDD 624.1834

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Editora DUNAS
Rua Tiradentes, 105 - Cidade Nova
96211-080 RIO GRANDE - RS - Brasil

www.editoradunas.com.br
e-mail: contato@editoradunas.com.br

1ª edição, Setembro/2023

APRESENTAÇÃO

Este livro é um complemento da obra Curso de Concreto Armado – 4 volumes. Não se trata de um volume 5 da referida obra, mas de um livro adicional onde o leitor poderá ampliar seus estudos sobre alguns temas específicos.

Neste livro, desenvolvemos com maior profundidade diversos assuntos tratados nos quatro volumes de Curso de Concreto Armado, como: o emprego do diagrama parábola-retângulo e do diagrama bilinear para o dimensionamento à flexão simples e à flexo-compressão; estudo comparativo dos procedimentos de dimensionamento ao esforço cortante por diversas normas internacionais; estudo comparativo dos métodos da curvatura aproximada e da rigidez aproximada da NBR-6118; pilares esbeltos sob flexão composta oblíqua; análise não linear de lajes de concreto armado; interação solo-estrutura para vigas, estacas e placas sobre base elástica; introdução aos métodos de análise probabilística e de confiabilidade estrutural; modelos de fissuração segundo as principais normas de projeto.

Ao longo deste livro fazemos referência sistemática aos quatro volumes de Curso de Concreto Armado. Conforme foi bem discutido nos volumes 1 e 3 dessa obra, a NBR-6118/2023 introduziu um novo fator de fragilidade η_c nos diagramas tensão-deformação do concreto comprimido, porém de maneira equivocada. Em vista disto, esse fator não é considerado nas análises feitas neste livro. Assim, nos capítulos 1 e 2 deste livro, são mantidos os modelos da NBR-6118/2014.

José Milton

SUMÁRIO

1. FLEXÃO NORMAL SIMPLES	
Diferentes diagramas para o concreto.....	1
1.1 - Introdução	1
1.2 - Diagramas tensão-deformação para o concreto.....	2
1.3 - Demais hipóteses para o dimensionamento.....	6
1.4 - Determinação do momento limite	9
1.5 - Dimensionamento com armadura simples.....	15
1.6 - Dimensionamento com armadura dupla.....	21
1.7 - Resultados obtidos com os três diagramas para o concreto	24
2. FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL	
Diferentes diagramas para o concreto.....	31
2.1 - Introdução	31
2.2 - Cálculo da resultante de compressão no concreto.....	32
2.3 - Exemplos de dimensionamento.....	38
3. ESFORÇO CORTANTE	
Modelos alternativos de dimensionamento	47
3.1 - Introdução	47
3.2 - Modelo I da NBR-6118.....	49
3.3 - Modelo II da NBR-6118	50
3.4 - Exemplos.....	53
3.5 - Modelos de dimensionamento de outras normas	58
3.6 - Comparações entre as várias normas.....	61
3.7 - Um pouco de história	66
4. EFEITO DE SEGUNDA ORDEM EM PILARES	69
4.1 - Introdução	69
4.2 - Método do pilar padrão com curvatura aproximada	70
4.3 - Método do pilar padrão com rigidez aproximada	73
4.4 - Fatores de amplificação dos métodos da NBR-6118	74
4.5 - Comparação com a análise não linear	78

5. PILARES ESBELTOS SOB FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA	87
5.1 – Introdução.....	87
5.2 – Análise não linear de pilares esbeltos de concreto armado	88
5.3 – Processo simplificado para dimensionamento dos pilares de canto.....	94
5.4 – Processos simplificados para dimensionamento à flexo-compressão oblíqua.....	99
5.5 – Exemplo de dimensionamento de pilar de canto	104
6. ANÁLISE NÃO LINEAR DE LAJES	115
6.1 - Introdução	115
6.2 - Modelo laminar para análise de lajes de concreto armado....	116
6.3 - Modelo de elementos finitos	119
6.4 - Modelos constitutivos para os materiais	124
6.5 - Comparação com resultados experimentais	130
6.6 - Carga de ruptura estimada através da análise linear.....	141
6.7 - Análise não linear de vigas	144
7. RESULTADOS DA ANÁLISE NÃO LINEAR DE LAJES	149
7.1 - Projeto de lajes maciças quadradas	149
7.2 - Projeto de lajes maciças armadas em uma direção.....	163
7.3 - Projeto de lajes nervuradas.....	167
7.4 - Cargas de ruptura de cálculo	171
7.5 - Influência das restrições horizontais	172
8. VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA.....	175
8.1 - O modelo de solo de Winkler.....	175
8.2 - Análise de vigas sobre base elástica.....	183
8.3 - Viga com duas cargas concentradas nos extremos.....	185
8.4 - Viga com momentos concentrados nos dois extremos.....	188
8.5 - Exemplo de cálculo de um canal.....	190
8.6 - Viga com carga concentrada no centro	193

9. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE VIGAS E PLACAS SOBRE BASE ELÁSTICA	199
9.1 - Análise de vigas e estacas pelo método dos elementos finitos	199
9.2 - Exemplos de aplicação do método dos elementos finitos	203
9.3 - Consideração do levantamento da viga e da não linearidade do solo	214
9.4 - Análise não linear de estacas com cargas transversais	228
9.5 - Placas sobre base elástica	235
10. FUNDAMENTOS DA ANÁLISE ESTRUTURAL PROBABILÍSTICA	251
10.1 - O método dos coeficientes parciais de segurança	251
10.2 - Variáveis aleatórias	254
10.3 - A distribuição normal de Gauss	257
10.4 - A distribuição de valores extremos do tipo I	261
10.5 - Geração de variáveis aleatórias	264
10.6 - Análise de confiabilidade pelo método de Monte Carlo	270
10.7 - Consideração dos erros dos modelos teóricos	275
10.8 - Confiabilidade na compressão simples	277
10.9 - Confiabilidade na flexão simples	285
10.10- Campos estocásticos	292
10.11- Confiabilidade nos estados limites de serviço	302
11. MODELOS DE FISSURAÇÃO	307
11.1 – Modelos para previsão da abertura das fissuras	307
11.2 – Modelo do CEB/90	309
11.3 – Modelo da NBR-6118	311
11.4 – Modelo do ACI	314
11.5 – Modelo do CEB/78	318
11.6 – Modelo do EC2	321
11.7 – Modelo do MC-FIB 2010	324
11.8 – Comparação dos modelos de cálculo	327
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	331

Capítulo 1

FLEXÃO NORMAL SIMPLES

Diferentes diagramas para o concreto

1.1 - Introdução

No capítulo 4 do Volume 1, foi apresentado o dimensionamento à flexão simples de seções retangulares, empregando-se o diagrama retangular de tensões para o concreto. Utilizando-se o diagrama retangular, a equação de equilíbrio de momentos toma a forma de uma equação do segundo grau, o que permite a obtenção da profundidade da linha neutra de maneira explícita. As áreas de aço também são obtidas através de expressões analíticas. Enfim, com o uso do diagrama retangular, o problema pode ser resolvido de maneira direta, sem a necessidade do emprego de métodos iterativos.

Por outro lado, uma vez que o diagrama tensão-deformação do concreto comprimido é bem representado por uma equação não linear, sempre surge a dúvida sobre a precisão desse diagrama retangular simplificado. Deve-se salientar que o diagrama retangular é usado no projeto estrutural há décadas, sendo permitido por todas as principais normas de projeto [1,2,3,4].

Atualmente, o EC2 [2] e o MC-FIB [3] admitem o emprego de três tipos de diagramas tensão-deformação para o concreto para efeito de dimensionamento: diagrama parábola-retângulo, diagrama bilinear e diagrama retangular. O ACI [4] também permite esses três diagramas, havendo pequenas diferenças quando do emprego do diagrama retangular. A NBR-6118 [5] permite o emprego do diagrama parábola-retângulo e do diagrama retangular. Deve-se observar que os dois diagramas da NBR-6118 são os mesmos adotados pelo EC2 e pelo MC-FIB (na versão de 2014 da NBR-6118, como discutido no capítulo 4 do Volume 1).

O objetivo deste capítulo é comparar os resultados obtidos com os três diagramas mais utilizados: parábola-retângulo, bilinear e retangular.

1.2 – Diagramas tensão-deformação para o concreto

a) Diagrama parábola-retângulo

Nas verificações de seções transversais à flexão simples ou composta, a NBR-6118/2014 adota o diagrama parábola-retângulo representado na Fig. 1.2.1.

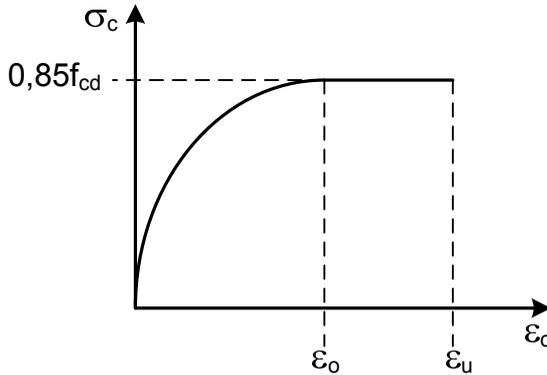


Fig. 1.2.1 - Diagrama parábola-retângulo para o concreto

O diagrama tensão-deformação é descrito pelas seguintes expressões:

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_o} \right)^n \right], \text{ se } \varepsilon_c \leq \varepsilon_o \quad (1.2.1)$$

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd}, \text{ se } \varepsilon_o \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_u \quad (1.2.2)$$

$$\sigma_c = 0, \text{ se } \varepsilon_c > \varepsilon_u \quad (1.2.3)$$

onde ε_c é a deformação de compressão e σ_c é a tensão correspondente.

Conforme se observa, a máxima tensão de compressão é igual a $\sigma_{cd} = 0,85 f_{cd}$, sendo f_{cd} a resistência à compressão de cálculo. Esse mesmo diagrama é apresentado no EC2, com a única diferença que a tensão máxima permitida pelo EC2 é igual a f_{cd} .

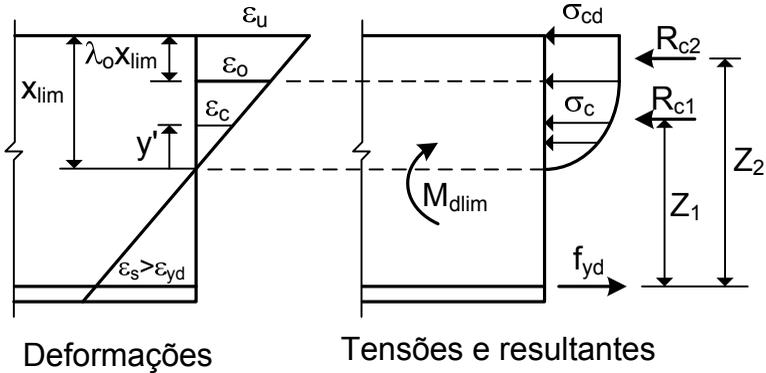


Fig. 1.4.2 – Deformações e tensões com o uso do diagrama parábola-retângulo

A fibra na qual a deformação de compressão vale ε_o fica situada a uma distância $\lambda_o x_{lim}$ do topo da seção, onde $\lambda_o = 1 - \varepsilon_o / \varepsilon_u = 1 - \zeta_o$. A resultante de compressão no concreto, R_{cclim} , pode ser decomposta nas parcelas R_{c1} e R_{c2} , correspondentes ao trecho parabólico e ao trecho retangular do diagrama tensão-deformação, respectivamente. Essas parcelas são dadas por

$$R_{c1} = \int_0^{(1-\lambda_o)x_{lim}} b \sigma_c dy' ; \quad R_{c2} = \int_{(1-\lambda_o)x_{lim}}^{x_{lim}} b \sigma_{cd} dy' \quad (1.4.1)$$

onde σ_c é a tensão de compressão em uma fibra situada a uma distância y' da linha neutra.

A deformação nessa fibra genérica é dada por

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_u y'}{x_{lim}} \quad (1.4.2)$$

Substituindo (1.4.2) na equação (1.2.1) e resolvendo as integrais, pode-se escrever

$$R_{c1} = r_{c1} b d \sigma_{cd} ; \quad R_{c2} = r_{c2} b d \sigma_{cd} \quad (1.4.3)$$

onde:

Exemplo 4: $f_{ck} = 70 \text{ MPa}$; $M_d = 98 \text{ kNm}$

Diagrama	$\xi = x/d$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$A'_s \text{ (cm}^2\text{)}$
Parábola-retângulo	0,207	6,80	0
Bilinear	0,208	6,72	0
Retangular	0,189	6,74	0

Conforme se observa, os três diagramas fornecem valores muito próximos para as áreas de aço. A profundidade da linha neutra, ξ , pode variar significativamente de um diagrama para outro, mas as áreas de aço são muito similares do ponto de vista prático.

Na Fig. 1.7.1, apresentam-se as variações da profundidade da linha neutra $\xi = x/d$ com o momento reduzido μ_o , sendo

$$\mu_o = \frac{M_d}{bd^2(0,85f_{cd})} \quad (1.7.1)$$

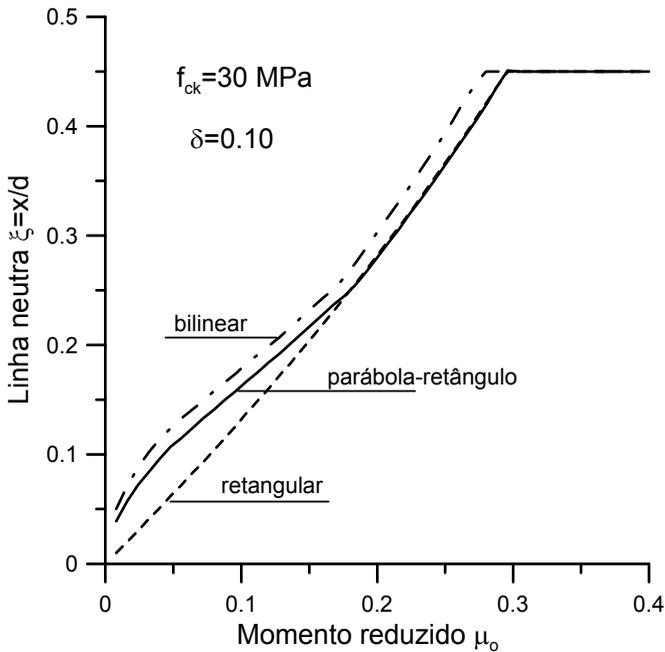
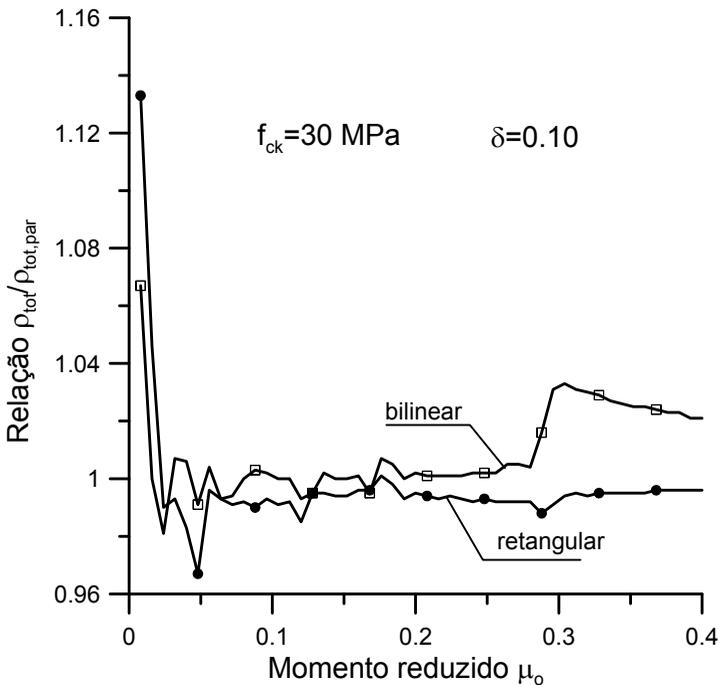


Fig. 1.7.1 – Variação de ξ com μ_o para os três diagramas (concreto do grupo I)

Observa-se que, para o diagrama parábola-retângulo e o diagrama bilinear, $\mu = \mu_o$, com μ definido anteriormente. Para o diagrama retangular, $\mu = (0,85/\alpha_c)\mu_o$, onde α_c é dado nas equações (1.2.12) e (1.2.13).

Conforme se observa na Fig. 1.7.1, os três diagramas fornecem posições da linha neutra $\xi = x/d$ diferentes quando resulta armadura simples.

Na Fig. 1.7.2, apresentam-se as razões entre a taxa total de armadura, $\rho_{tot} = \rho + \rho'$, obtidas com o diagrama bilinear e com o diagrama retangular, e a taxa total $\rho_{tot,par}$ obtida com o diagrama parábola-retângulo. Conforme se observa, as maiores diferenças ocorrem para valores muito pequenos de μ_o . Entretanto, nesses casos resulta armadura mínima com ambos os métodos e essas diferenças deixam de existir na prática.



Conforme foi mostrado no capítulo 4 do Volume 1, as taxas de armadura mínima são dadas por

$$\rho_{\min} = \frac{0,078 f_{ck}^{2/3}}{f_{yd}}, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (1.7.2)$$

$$\rho_{\min} = \frac{0,5512 \ln(1,8 + 0,10 f_{ck})}{f_{yd}}, \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \quad (1.7.3)$$

onde f_{ck} e f_{yd} são dados em MPa.

Em todo caso, deve-se respeitar o limite $\rho_{\min} \geq 0,15\%$.

A armadura mínima é $A_{s,\min} = \rho_{\min} b h$. Impondo a condição $A_s \geq A_{s,\min}$ e refazendo o gráfico, obtém-se a Fig. 1.7.3.

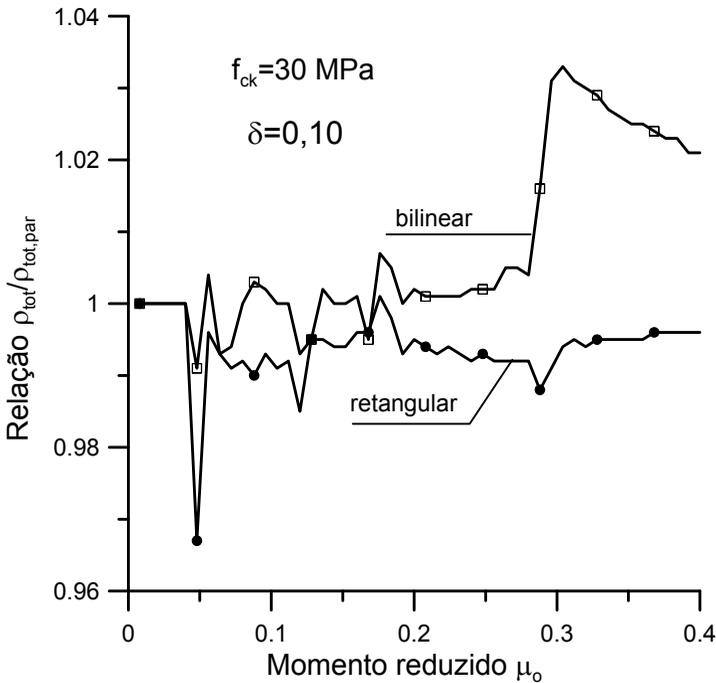


Fig. 1.7.3 – Relação $\rho_{tot}/\rho_{tot,par}$ para $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$,
respeitando a armadura mínima

Capítulo 2

FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL Diferentes diagramas para o concreto

2.1 - Introdução

A formulação para o dimensionamento à flexo-compressão normal foi apresentada no capítulo 2 do Volume 3, onde foi considerada uma seção retangular com várias camadas de armadura. Empregando o diagrama retangular para o concreto, obtêm-se expressões analíticas para a resultante de compressão R_{cc} e sua distância d_c até a borda da seção. Essas expressões são dadas em função da profundidade relativa da linha neutra $\xi = x/h$, onde h é a altura total da seção transversal.

Na flexo-compressão normal devem-se considerar todos os domínios, exceto o domínio 1 que é exclusivo da flexo-tração. Assim, dados o esforço normal de cálculo N_d e o momento fletor de cálculo M_d , a linha neutra ξ deve ser encontrada dentro do intervalo $[0, \infty)$. Para isto, emprega-se o processo iterativo da bissecante, como apresentado no capítulo 2 do Volume 3.

Utilizando o diagrama parábola-retângulo ou o diagrama bilinear, emprega-se a mesma formulação desenvolvida no Volume 3. A única diferença está no cálculo da resultante de compressão no concreto e de sua posição. Se o programa computacional for organizado de modo que o cálculo de R_{cc} e de d_c fiquem dentro de uma sub-rotina, basta fazer a alteração desta sub-rotina para trocar o diagrama tensão-deformação do concreto. No restante, o programa permanece inalterado.

Neste capítulo, são apresentadas apenas as modificações relativas ao cálculo de R_{cc} e de d_c , para o emprego do diagrama parábola-retângulo e do diagrama bilinear. Esse cálculo é feito através de integração numérica, como no capítulo anterior.

2.2 – Cálculo da resultante de compressão no concreto

Para o cálculo das tensões no concreto, é necessário determinar a deformação de compressão ε_c em uma fibra genérica, situada a uma distância y do topo da seção transversal. Considerando os domínios possíveis na flexo-compressão, verifica-se que existirão três expressões para a deformação ε_c , dependendo da profundidade da linha neutra. Assim, é necessário definir os limites entre os domínios, conforme indicado na Fig. 2.2.1. Essa mesma figura foi usada no capítulo 2 do Volume 3, considerando as deformações ε_o e ε_u que são utilizadas para o diagrama retangular e para o diagrama parábola-retângulo. Se for utilizado o diagrama bilinear, deve-se substituir ε_o por ε_{o1} e κ por κ_1 , como na Fig. 2.2.1.

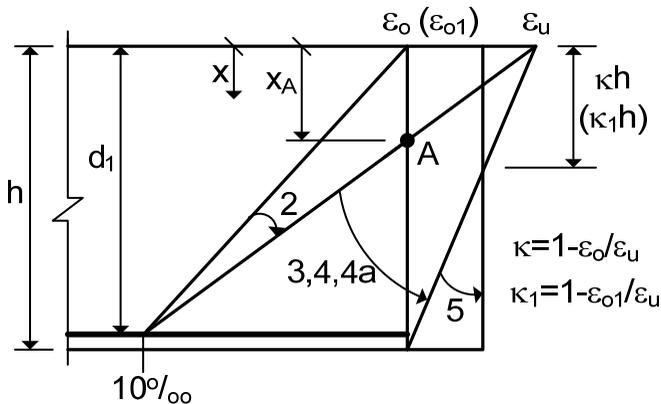


Fig. 2.2.1 - Limites entre os domínios para o cálculo das deformações no concreto e nas armaduras

Limites do domínio 2:

A profundidade da linha neutra x_A , no limite entre os domínios 2 e 3, é obtida por semelhança de triângulos na Fig. 2.2.1, de onde se obtém

$$x_A = \left(\frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + 10\text{‰}} \right) d_1 \quad (2.2.1)$$

Conforme se observa pelas tabelas, os três diagramas fornecem áreas de aço muito próximas nos dois exemplos.

Na Fig. 2.3.3, apresentam-se os resultados obtidos para uma seção retangular com duas camadas de armadura, como a seção do exemplo 1, considerando um concreto com $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$ e $\delta = d'/h = 0,10$. Os adimensionais indicados na figura são definidos como

$$v = \frac{N_d}{bh(0,85f_{cd})} ; \mu = \frac{M_d}{bh^2(0,85f_{cd})} \quad (2.3.1)$$

Para os concretos do grupo I, essas definições coincidem com aquelas adotadas no capítulo 2 do Volume 3, quando do emprego do diagrama retangular.

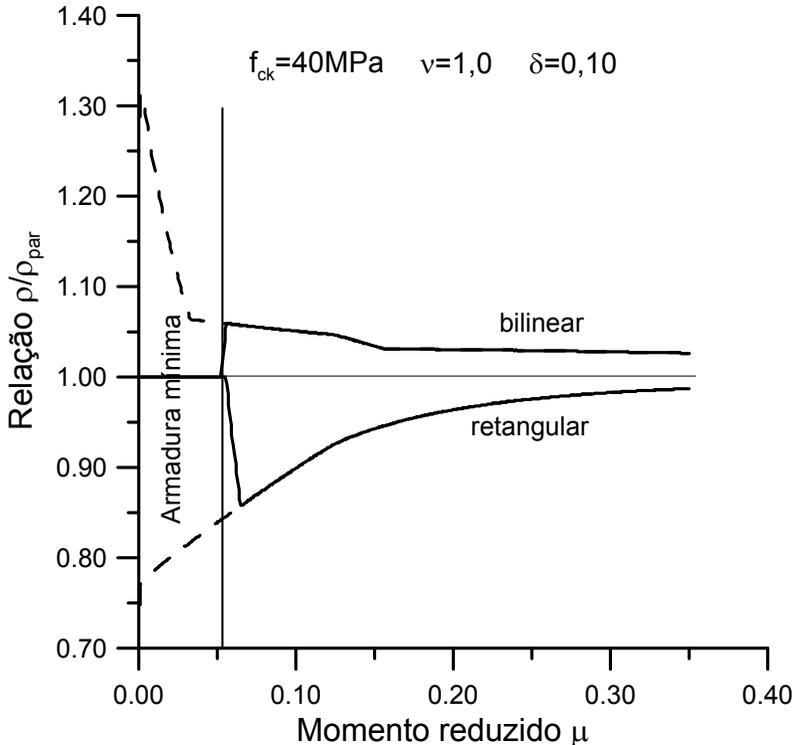


Fig. 2.3.3 – Relação entre as taxas de armadura ρ/ρ_{par}

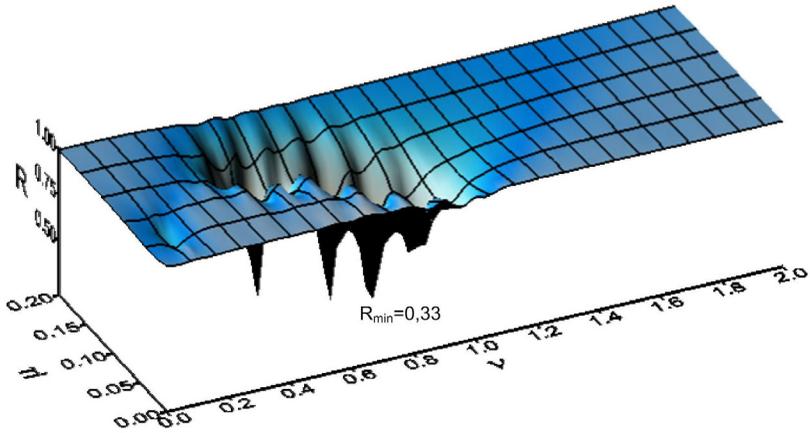


Fig. 2.3.6 – Superfície de R em função de ν e μ

Entretanto, esse valor tão baixo de $R = 0,33$ não tem nenhuma importância prática, pois a armadura mínima vai prevalecer sobre ambos os valores calculados.

Conforme foi definido no capítulo 2 do Volume 3, a taxa mecânica de armadura é dada por

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{bh \sigma_{cd}} \quad (2.3.4)$$

e, como $\rho = A_s / (bh)$, tem-se a relação

$$\rho = \omega \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} \quad (2.3.5)$$

Essa taxa de armadura tem que ser comparada com a taxa mínima, ρ_{\min} , dada na equação (2.3.2). Considerando os valores $\omega = 0,0126$ e $\omega_{par} = 0,0384$, obtidos para $\nu = 0,90$, lembrando que $\nu_o = 0,85\nu$ e $f_{yd} = 43,48 \text{ kN/cm}^2$, obtêm-se as taxas de armadura indicadas na Tabela 2.3.4. Conforme se observa, a armadura mínima é muito superior às armaduras calculadas com ambos os diagramas.

Capítulo 3

ESFORÇO CORTANTE Modelos alternativos de dimensionamento

3.1 - Introdução

O dimensionamento ao esforço cortante é feito com base no modelo de treliça de Morsch, como apresentado no capítulo 7 do Volume 1. A treliça é formada por bielas de compressão com inclinação θ e diagonais tracionadas com inclinação α , em relação ao eixo da viga, como indicado na Fig. 3.1.1.

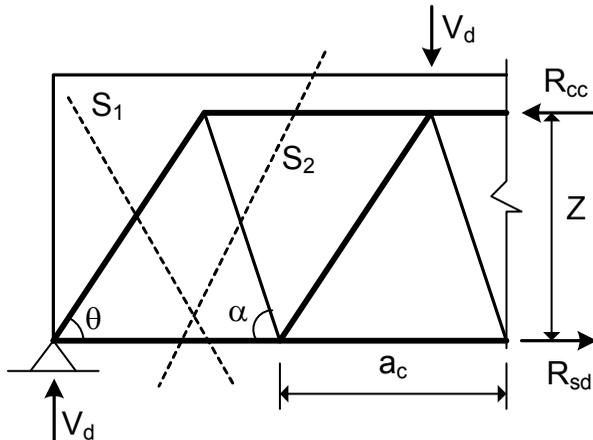


Fig. 3.1.1 - Modelo de treliça generalizada de Morsch

Por considerações de equilíbrio nas seções S1 e S2, obtêm-se as forças nas barras da treliça. A distância a_c entre os nós da treliça é determinada a partir da Fig. 3.1.1, o que permite avaliar a tensão de compressão σ_c nas bielas. Conforme foi demonstrado no capítulo 7 do Volume 1, essa tensão é dada por

$\tau_{d1} = 1,11(\tau_{wd} - \tau_{c1})$. Empregando estribos verticais, utiliza-se a equação (3.1.9), de onde resulta

$$A_{sw} = \frac{100b_w \tau_{d1}}{f_{yd} \cotg\theta}, \text{ cm}^2/\text{m} \quad (3.3.1)$$

onde

$$\tau_{d1} = 1,11(\tau_{wd} - \tau_{c1}) \quad (3.3.2)$$

O cálculo da tensão τ_{c1} para a flexão simples e flexo-tração com a linha neutra cortando a seção é mostrado na Fig. 3.3.1.

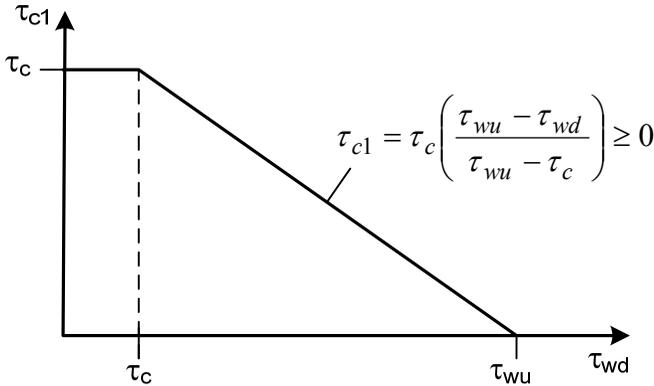


Fig. 3.3.1 – Tensão τ_{c1} para o emprego do modelo II da NBR-6118

Na Fig. 3.3.1, $\tau_{wd} = V_d / (b_w d)$, τ_{wu} é obtida da equação (3.1.7) para o ângulo θ escolhido, e τ_c é dado nas equações (3.2.5) e (3.2.6).

Em qualquer dos modelos, a seção da armadura calculada não deve ser menor que a armadura mínima, $A_{sw,min}$, especificada na NBR-6118. O valor de $A_{sw,min}$ para estribos verticais é dado por

$$A_{sw,min} = \rho_{w,min} 100b_w, \text{ cm}^2/\text{m} \quad (3.3.3)$$

onde

$$\rho_{w,min} = 0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \quad (3.3.4)$$

sendo f_{ctm} a resistência média à tração do concreto e f_{yk} a tensão de escoamento característica do aço (limitada a 500 MPa).

Na Tabela 3.3.1, apresentam-se os valores de $\rho_{w,\min}$ para algumas classes de concreto. Na Tabela 3.3.2, apresentam-se as equações dos dois modelos, considerando estribos verticais.

Tabela 3.3.1 - Valores de $\rho_{w,\min}$ (%) para os aços CA-50 e CA-60

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
$\rho_{w,\min}$	0,09	0,10	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16
f_{ck} (MPa)	55	60	70	80	90		
$\rho_{w,\min}$	0,17	0,17	0,18	0,19	0,20		

Tabela 3.3.2 – Equações dos modelos da NBR-6118

Modelo I
$\tau_{wd} = V_d / (b_w d) ; \alpha_v = (1 - f_{ck} / 250) ; \tau_{wu} = 0,27 \alpha_v f_{cd}$ $\tau_c = 0,09 (f_{ck})^{2/3}, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ $\tau_c = 0,636 \ln(1,8 + 0,10 f_{ck}), \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$ $\tau_d = 1,11 (\tau_{wd} - \tau_c) \geq 0 ; A_{sw} = \frac{100 b_w \tau_d}{f_{yd}} ; A_{sw} \geq A_{sw,\min}$
Modelo II
$\tau_{wd} = V_d / (b_w d) ; \text{ escolher } 30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ $\tau_{wu1} = 0,54 \alpha_v \cos \theta \sin \theta f_{cd} ; \alpha_v = (1 - f_{ck} / 250)$ $\tau_c = 0,09 (f_{ck})^{2/3}, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ $\tau_c = 0,636 \ln(1,8 + 0,10 f_{ck}), \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$ $\tau_{c1} = \tau_c, \text{ se } \tau_{wd} \leq \tau_c ; \tau_{c1} = \tau_c \left(\frac{\tau_{wu1} - \tau_{wd}}{\tau_{wu1} - \tau_c} \right) \geq 0, \text{ se } \tau_{wd} > \tau_c$ $\tau_{d1} = 1,11 (\tau_{wd} - \tau_{c1}) \geq 0 ; A_{sw} = \frac{100 b_w \tau_{d1}}{f_{yd} \cotg \theta} ; A_{sw} \geq A_{sw,\min}$

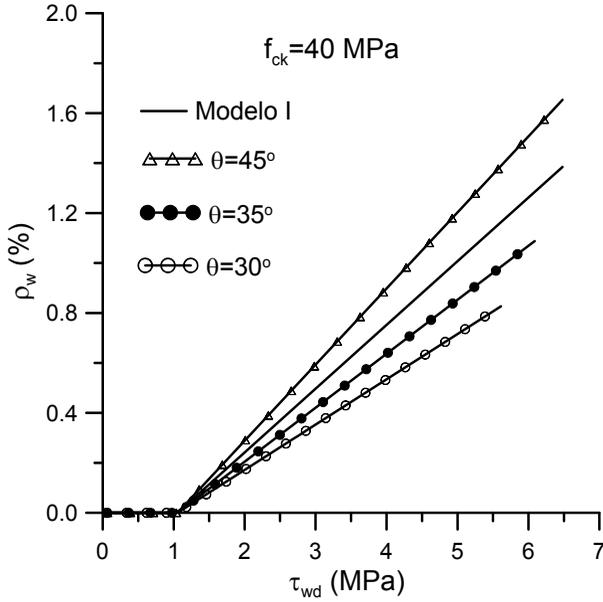


Fig. 3.4.3 – Variação de ρ_w com τ_{wd} ($f_{ck} = 40 \text{ MPa}$)

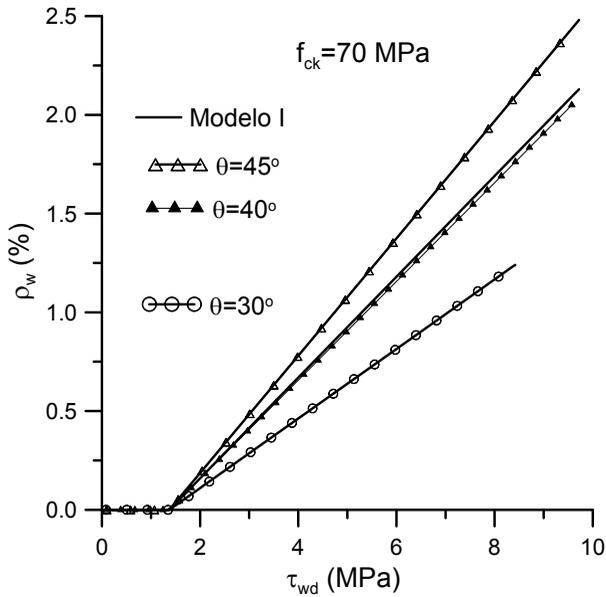


Fig. 3.4.4 – Variação de ρ_w com τ_{wd} ($f_{ck} = 70 \text{ MPa}$)

ais de segurança, de modo que $f_{ck} = f_{cd} = f_c$ e $f_{yd} = f_y$. A tensão convencional de cisalhamento é calculada como $\tau_{wd} = V_u / (b_w d)$, onde V_u é a força cortante de ruína obtida no ensaio. Conforme se observa na Fig. 3.6.5, os dois modelos fornecem soluções a favor da segurança. O modelo I é mais simples e possui uma margem de segurança maior.

3.7 – Um pouco de história

Por volta do ano de 1900, W. Ritter e E. Mörsch propuseram que fosse utilizada a analogia da treliça para o dimensionamento ao esforço cortante [8]. Posteriormente, Mörsch construiu uma teoria consistente, a partir de uma análise cuidadosa de resultados de ensaios, dando origem ao que se conhece hoje como Analogia da Treliça de Mörsch. No seu modelo original, Mörsch fixou que o ângulo de inclinação das bielas de concreto seria sempre igual a 45° .

A partir do uso da teoria de Mörsch e da realização de mais ensaios ao longo do tempo, chegou-se à conclusão que esse modelo fornece uma armadura transversal excessiva. A justificativa para isso é que o modelo de treliça não considera outros fatores que contribuem para a resistência ao esforço cortante, como as tensões de cisalhamento no banzo comprimido resistidas pelo concreto não fissurado, o engrenamento do agregado graúdo nas fissuras, o efeito de pino proporcionado pela armadura longitudinal, dentre outros. Assim, esse modelo com bielas inclinadas a 45° passou a ser denominado de treliça clássica de Mörsch, em oposição à treliça generalizada de Mörsch, na qual esses fatores suplementares são considerados.

No modelo de treliça generalizada de Mörsch, o esforço cortante de cálculo V_d é resistido em parte pelos estribos, como na treliça clássica, e em parte pelos fatores adicionais mencionados. Usualmente, todos esses fatores juntos são denominados de contribuição do concreto para o esforço cortante. Assim, o dimensionamento é feito com base na equação

$$V_d = V_{sw} + V_c \quad (3.7.1)$$

onde V_{sw} é o esforço cortante resistido pela armadura transversal e V_c é a parcela de contribuição do concreto.

Se as forças cortantes forem divididas pela área $b_w d$, a equação (3.7.1) pode ser escrita em função das tensões médias de cisalhamento $\tau_{wd} = V_d / (b_w d)$ e $\tau_c = V_c / (b_w d)$, como foi feito neste capítulo.

Essa formulação era adotada na NBR-6118 de 1980, que introduziu o Sistema Internacional de Unidades na norma ABNT NB-1/78: Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado. Na NBR-6118/80, a contribuição do concreto na flexão simples era da por

$$\tau_c = \psi_1 \sqrt{f_{ck}}, \text{ MPa} \quad (3.7.2)$$

onde:

$$\psi_1 = 0,07 \text{ para } \rho_1 \leq 0,001;$$

$$\psi_1 = 0,14 \text{ para } \rho_1 \geq 0,015;$$

interpolando-se linearmente para valores intermediários de ρ_1 .

Nessas equações, ρ_1 é a menor taxa de armadura longitudinal de tração no trecho de comprimento $2h$ a partir da face do apoio, sendo h a altura da seção da peça.

No ano de 1989, esses valores foram alterados pelo Anexo da norma NBR-7197: Projeto de Estruturas de Concreto Protendido [9]. A equação (3.7.2) passou a vigorar com o valor $\psi_1 = 0,15$, independente de ρ_1 . Com esse valor de ψ_1 , a expressão (3.7.2) ficou parecida com a equação (3.5.4) do modelo do ACI, que é a mesma desde o código de 1963 (ACI 318-63).

Por outro lado, o CEB/78 [10] passou a adotar dois métodos para o dimensionamento ao esforço cortante: o método padrão e o método afim. No método padrão, consideram-se as bielas com inclinação $\theta = 45^\circ$ e o valor de τ_c independe do esforço cortante, de modo análogo ao modelo I da atual NBR-6118.

Os valores de τ_c , segundo o CEB/78, são obtidos da expressão

$$\tau_c = 0,625 f_{ctd} = 0,625 f_{ctk,inf} / \gamma_c \quad (3.7.3)$$

onde $f_{ctk,inf}$ é o valor característico inferior da resistência à tração do concreto (quantil de 5%) e $\gamma_c = 1,5$ segundo o CEB.

Capítulo 4

EFEITO DE SEGUNDA ORDEM EM PILARES

4.1 - Introdução

O projeto dos pilares de concreto armado requer a consideração das não linearidades física e geométrica. A não linearidade física é decorrente do comportamento não linear do concreto, incluindo a fissuração, assim como do escoamento das armaduras. A não linearidade geométrica decorre da necessidade de se verificar o equilíbrio na configuração deformada da estrutura. Os momentos fletores na configuração inicial indeformada do eixo do pilar são denominados de momentos de primeira ordem. Os momentos adicionais, causados pelas deflexões do eixo, são denominados de momentos de segunda ordem.

Devido à importância dos pilares para a estabilidade das estruturas dos edifícios, as normas de projeto [1,2,3,4,5] exigem que os efeitos de segunda ordem sejam considerados no projeto dos pilares. Esses efeitos somente podem ser desconsiderados nos pilares curtos. Em virtude da falta de consenso sobre os limites para se classificar um pilar como curto, recomenda-se que os efeitos de segunda ordem sejam considerados para todos os pilares, conforme foi visto no capítulo 6 do Volume 3.

Para os denominados pilares esbeltos, é necessário realizar uma análise não linear completa, onde as não linearidades são consideradas de maneira rigorosa. Essa análise requer o emprego de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, associados a técnicas incrementais e iterativas para resolver o sistema não linear de equações de equilíbrio. Um método rigoroso para análise de pilares esbeltos sob flexo-compressão normal é apresentado no capítulo 9 do Volume 3. Um método geral para análise e dimensionamento de pilares esbeltos de seção poligonal arbitrária, submetidos à flexo-compressão oblíqua, é apresentado pelo Autor [11].

De um modo geral, os pilares dos edifícios podem ser classificados como pilares moderadamente esbeltos. Os efeitos de segunda ordem não podem ser desprezados, porém permite-se o emprego de algum método simplificado para a sua consideração. A NBR-6118 [5] adota dois métodos simplificados: “método do pilar-padrão com curvatura aproximada” e “método do pilar-padrão com rigidez aproximada”, ambos permitidos para pilares com índice de esbeltez $\lambda \leq 90$.

No método do pilar-padrão com curvatura aproximada, os efeitos de segunda ordem são considerados através da inclusão de uma excentricidade de segunda ordem e_2 . A seção crítica do pilar deve ser dimensionada à flexo-compressão com a excentricidade total $e_{tot} = e_1 + e_2$, onde e_1 é a excentricidade de primeira ordem. Os esforços de cálculo para o dimensionamento são o esforço normal $N_d = F_d$ e o momento fletor $M_d = F_d(e_1 + e_2)$, onde F_d é a carga de cálculo do pilar. Esse método foi utilizado nos exemplos de dimensionamento do capítulo 7 do Volume 3.

Para o método do pilar-padrão com rigidez aproximada, a NBR-6118 fornece a expressão do momento total $M_d = F_d e_{tot}$, de onde se podem deduzir as expressões de e_{tot} e de $e_2 = e_{tot} - e_1$.

Além disso, para incluir os efeitos da fluência do concreto, considera-se uma excentricidade adicional e_c , a qual vem sendo sugerida desde o CEB/78[10] e que também foi incorporada à NBR-6118.

4.2 – Método do pilar padrão com curvatura aproximada

Na Fig. 4.2.1, apresenta-se um pilar birrotulado, submetido a uma força normal de cálculo F_d com uma excentricidade de primeira ordem e_1 . A princípio, considera-se o caso de flexão normal.

A excentricidade de primeira ordem já inclui os efeitos das imperfeições geométricas do eixo do pilar e respeita a excentricidade mínima exigida na NBR-6118, como mostrado no capítulo 7 do Volume 3. Se o pilar estiver submetido a momentos diferentes nas duas extremidades (o que equivale a excentricidades diferentes da força normal), considera-se uma excentricidade de primeira ordem equiva-

lente. Por exemplo, se as excentricidades nos extremos forem e_{1a} e e_{1b} , com $e_{1a} \geq e_{1b}$, a excentricidade de primeira ordem equivalente é dada por

$$e_1 \geq \begin{cases} 0,6e_{1a} + 0,4e_{1b} \\ 0,4e_{1a} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

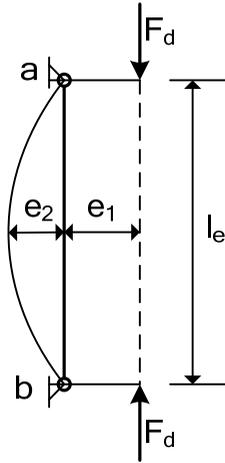


Fig. 4.2.1 – Excentricidades de primeira e de segunda ordens

Imediatamente após a aplicação do carregamento, o pilar sofre uma deflexão cujo valor máximo é igual a e_2 (a denominada excentricidade de segunda ordem). De acordo com a NBR-6118, a excentricidade de segunda ordem pode ser avaliada como

$$e_2 = \frac{l_e^2}{10} \frac{0,005}{(\nu_o + 0,5)h} \quad (4.2.2)$$

onde

$$\nu_o = \frac{F_d}{A_c f_{cd}} \geq 0,5 \quad (4.2.3)$$

sendo l_e , h e A_c o comprimento de flambagem, a altura da seção transversal na direção considerada e a área da seção do pilar, respectivamente.

Observa-se que o fator de amplificação de momentos ψ_2 não depende do esforço normal ν_o , como ocorre no método da curvatura aproximada. Porém, ele depende de e_1/h , assim como o fator de amplificação ψ_1 .

4.4 – Fatores de amplificação dos métodos da NBR-6118

Na Fig. 4.4.1, apresentam-se as variações dos fatores de amplificação com a excentricidade relativa de primeira ordem e_1/h para pilares com esforço normal pequeno ($\nu_o = 0,5$).

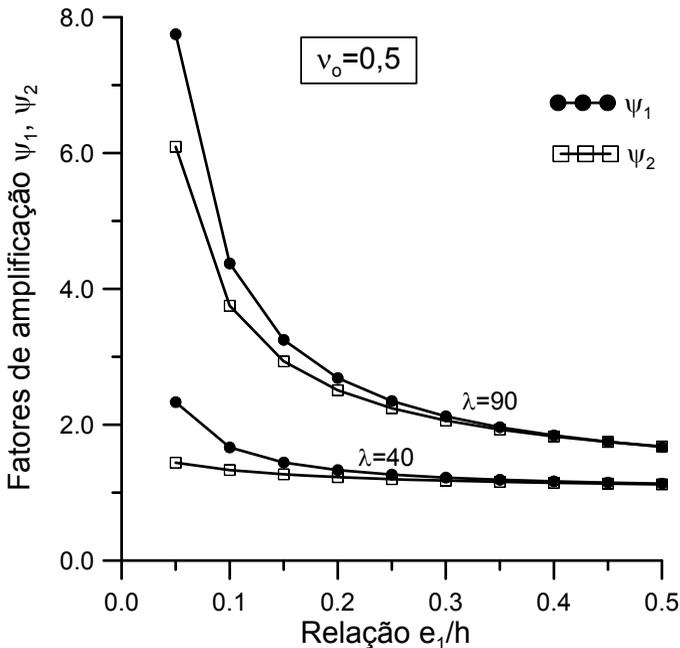


Fig. 4.4.1 – Fatores de amplificação para $\nu_o = 0,5$

Conforme se observa na Fig. 4.4.1, o fator ψ_1 , do método da curvatura aproximada, é maior que o fator ψ_2 , do método da rigidez aproximada. Essa diferença é maior para valores baixos de e_1/h e também depende do índice de esbeltez λ . Os seguintes valores são obtidos para $e_1/h = 0,1$:

Capítulo 5

PILARES ESBELTOS SOB FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

5.1 - Introdução

Os pilares dos edifícios de concreto armado são elementos estruturais que apresentam um comportamento tipicamente não linear. Esse comportamento é decorrente da não linearidade física e da não linearidade geométrica. Assim, para se avaliar corretamente os esforços solicitantes nos pilares de concreto armado, devem-se considerar as duas não linearidades simultaneamente. Essa análise é relativamente complexa e exige o emprego de métodos numéricos iterativos e incrementais.

No capítulo 9 do Volume 3, foi apresentado um modelo para análise e dimensionamento de pilares esbeltos submetidos à flexo-compressão normal. A análise é feita através do método dos elementos finitos, empregando-se um elemento com três graus de liberdade por nó.

Neste capítulo, apresenta-se um modelo não linear para a análise e o dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado, desenvolvido e implementado pelo Autor [11,14]. Esse modelo deu origem ao software JMPILAR [13], o qual é capaz de fazer uma análise completa e o dimensionamento de pilares de qualquer esbelteza. A formulação é desenvolvida para uma seção poligonal arbitrária sob flexo-compressão oblíqua. O elemento finito possui cinco graus de liberdade por nó, constituindo uma ampliação do elemento apresentado no capítulo 9 do Volume 3. Os modelos constitutivos para o aço e o concreto são os mesmos apresentados no Volume 3.

O desenvolvimento completo da formulação, bem como a comprovação da validade do modelo através da comparação com resultados experimentais, encontra-se disponível nas referências [11,14]. O objetivo deste capítulo é apresentar um breve resumo do modelo computacional e usar o software JMPILAR para verificar

certos procedimentos simplificados utilizados no dimensionamento dos pilares de canto.

5.2 - Análise não linear de pilares esbeltos de concreto armado

Na Fig. 5.2.1, apresenta-se um pilar submetido à força normal de cálculo F_d aplicada em suas extremidades. A seção transversal do pilar pode ser uma poligonal arbitrária, inclusive possuindo aberturas internas. Devido à generalidade da seção e do ponto de aplicação da força, a flexão será oblíqua. Em uma seção transversal genérica, as excentricidades da força são denominadas de e_x e e_y , podendo variar ao longo do eixo em função dos diagramas de momentos de primeira ordem.

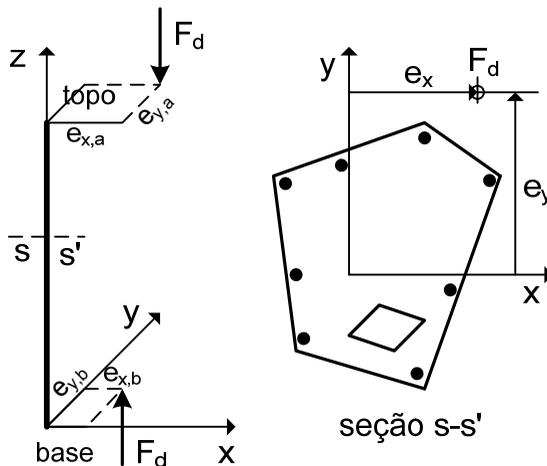


Fig. 5.2.1 – Solicitação e seção transversal do pilar

A análise estrutural é feita com o emprego do método dos elementos finitos, onde o eixo do pilar é discretizado em elementos lineares de dois nós, com cinco graus de liberdade por nó. A torção do elemento é desprezada.

Na Fig. 5.2.2, representam-se os graus de liberdade U_1, U_2, \dots, U_{10} e as ações nodais correspondentes F_1, F_2, \dots, F_{10} no elemento finito.

$$\left(\frac{e_{1x}}{e_{1x,\min}} \right)^2 + \left(\frac{e_{1y}}{e_{1y,\min}} \right)^2 = 1 \quad (5.3.5)$$

onde

$$e_{1x,\min} = 1,5 + 0,03h_x, \text{ cm} \quad (5.3.6)$$

$$e_{1y,\min} = 1,5 + 0,03h_y, \text{ cm} \quad (5.3.7)$$

Empregando o método da curvatura aproximada para incluir os efeitos de segunda ordem, devem ser consideradas as excentricidades de segunda ordem e_{2x} e e_{2y} , conforme o capítulo 7 do Volume 3. Se o pilar tiver índice de esbeltez $\lambda_x > 50$, considera-se a excentricidade de fluência e_{cx} . Se $\lambda_y > 50$, deve-se considerar e_{cy} , conforme o critério adotado no Volume 3.

Assim, empregando esse critério de envoltórias da NBR-6118, deve-se garantir que o pilar suporte a força normal de cálculo F_d aplicada em qualquer ponto da curva representada na Fig. 5.3.4.

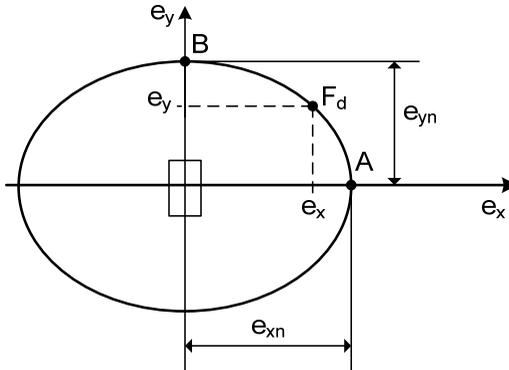


Fig. 5.3.4 - Envoltória de excentricidades totais da NBR-6118

As excentricidades totais e_x e e_y são dadas por

$$\left(\frac{e_x}{e_{xn}} \right)^2 + \left(\frac{e_y}{e_{yn}} \right)^2 = 1 \quad (5.3.8)$$

diagrama de interação em função das excentricidades relativas e_x/h_x e e_y/h_y . As formas das curvas serão análogas.

Em geral, as normas de projeto permitem desconsiderar a flexo-compressão oblíqua quando a força normal de cálculo N_d se situar nas áreas hachuradas da Fig. 5.4.2.

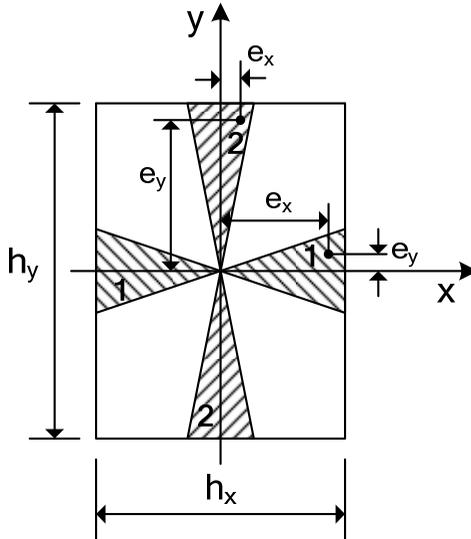


Fig. 5.4.2 - Situações em que se permite desconsiderar a flexo-compressão oblíqua

Se a força normal estiver situada na região 1, o dimensionamento pode ser feito à flexo-compressão normal, considerando apenas a excentricidade e_x . Para a região 2, pode-se desprezar e_x e dimensionar à flexo-compressão normal com a excentricidade e_y . Essas regiões são definidas da seguinte forma:

- Região 1: $e_y/h_y \leq \beta e_x/h_x$
- Região 2: $e_x/h_x \leq \beta e_y/h_y$

O CEB/90 [1], o MC-FIB [3] e a EHE [18] adotam $\beta = 0,25$. O EC2 [2] considera $\beta = 0,20$.

onde:

M_{xd} e M_{yd} são os momentos fletores solicitantes segundo as direções x e y , incluindo os efeitos de segunda ordem e da fluência e respeitando os momentos de primeira ordem mínimos;

M_{xdn} e M_{ydn} são os momentos solicitantes totais em flexo-compressão normal segundo as direções x e y .

Essas equações podem ser escritas em termos das excentricidades, já que um momento é igual ao produto da força normal pela excentricidade. Considerando apenas as excentricidades de primeira e de segunda ordens, podem-se representar os critérios de ambas as normas como na Fig. 5.4.4.

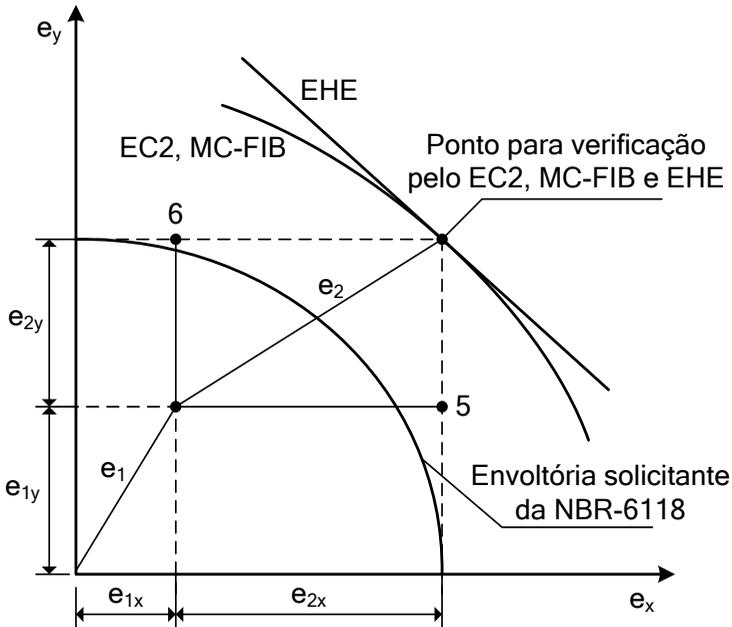


Fig. 5.4.4 - Excentricidades, envoltória solicitante da NBR-6118 e critérios do EC2, MC-FIB e EHE

Conforme se observa na Fig. 5.4.4, o ponto para verificação segundo as normas internacionais considera a ocorrência simultânea das excentricidades de segunda ordem com seus valores máximos nas duas direções. A excentricidade de segunda ordem e_2 na direção

Capítulo 6

ANÁLISE NÃO LINEAR DE LAJES

6.1 - Introdução

Os quatro primeiros capítulos do Volume 2 foram dedicados ao cálculo e ao detalhamento das lajes maciças de concreto armado. Os esforços solicitantes foram calculados pela teoria de placas, através de métodos simplificados e de métodos numéricos. Em geral, admitiu-se um comportamento elástico linear para o material da placa e das vigas de apoio.

Por outro lado, há interesse em conhecer o comportamento das lajes de concreto armado após a fissuração do concreto, quando a análise elástica linear não é mais válida. Nesse sentido, são desenvolvidos estudos experimentais e numéricos, com o objetivo de analisar a resposta completa da estrutura até a ruptura. Apesar das dificuldades inerentes à experimentação em laboratório, alguns resultados experimentais podem ser encontrados na bibliografia [21,22,23].

O desenvolvimento do método dos elementos finitos e dos modelos para análise não linear de estruturas tornou a análise numérica uma alternativa confiável para o estudo das lajes de concreto armado. A formulação básica do método dos elementos finitos para a análise de placas foi apresentada na seção 3.7 do Volume 2. A formulação pode ser baseada na teoria de Kirchhoff ou na teoria de Mindlin, porém essa última apresenta vantagens como foi discutido. Para as lajes de concreto armado, consideram-se cinco graus de liberdade em cada nó do elemento finito: a flecha w ; as rotações θ_x e θ_y ; os deslocamentos horizontais u_o e v_o do plano médio da laje.

Em virtude das relações tensão-deformação não lineares para o concreto e para o aço, as integrações ao longo da espessura da laje devem ser realizadas numericamente. Para isso, emprega-se o denominado método laminar, em que a laje maciça é dividida em diversas lâminas ou camadas de pequena espessura. A matriz de rigidez e as

ações nodais não lineares são obtidas considerando-se que as tensões não variam ao longo da espessura de uma mesma lâmina. Esse procedimento já é tradicional, tanto para a análise de lajes quanto para a análise de vigas e cascas de concreto armado.

O modelo laminar também pode ser empregado para a análise de lajes nervuradas de concreto armado. Para isto, deve-se trabalhar com propriedades equivalentes do concreto, para que o modelo seja capaz de representar os vazios deixados na estrutura pela eliminação de parte do concreto da zona tracionada. Quando os vazios forem permanentemente preenchidos com blocos de um material estrutural secundário, esse efeito favorável pode ser considerado, adotando-se propriedades equivalentes para esse material.

Neste capítulo, apresenta-se um modelo não linear para a análise de lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado desenvolvido pelo Autor [24]. O modelo considera a não linearidade física do concreto em compressão, bem como a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. A formulação é baseada na teoria de placas de Mindlin e inclui as deformações normais no plano médio da laje, assim como a não-linearidade geométrica. A análise estrutural é realizada com o emprego do método dos elementos finitos, utilizando-se o elemento isoparamétrico quadrático de oito nós (ver Fig. 3.7.1 do Volume 2). Para cada nó, consideram-se os cinco graus de liberdade já mencionados. Um algoritmo iterativo é empregado para a solução do sistema de equações não lineares. No capítulo seguinte, o modelo será utilizado para verificar os procedimentos simplificados de projeto descritos no Volume 2.

6.2 - Modelo laminar para análise de lajes de concreto armado

Na Fig. 6.2.1, apresenta-se uma laje maciça de concreto armado situada no plano x-y, onde a espessura h foi dividida em n camadas de concreto de espessura constante $\Delta h = h/n$. A laje pode ter diversas camadas de armadura, orientadas arbitrariamente em relação ao sistema de eixos x-y, o qual se situa no plano médio da laje. As flechas da laje ocorrem segundo o eixo z.

As seguintes propriedades do concreto são empregadas no modelo constitutivo descrito na próxima seção: f_{cm} = resistência média à compressão simples; f_{ctm} = resistência média à tração sim-

ples; E_c = módulo de deformação longitudinal tangente à origem do diagrama tensão-deformação; ν = coeficiente de Poisson. No caso da laje maciça indicada na Fig. 6.2.1, essas propriedades são consideradas constantes e iguais para todas as n camadas de concreto.

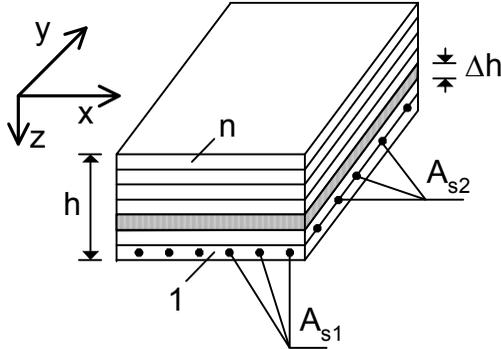


Fig. 6.2.1 – Laje maciça de concreto armado

Uma armadura genérica, de área A_{si} por unidade de comprimento (cm^2/cm), fazendo um ângulo ϕ_{si} com o eixo x , é substituída por uma lâmina contínua de espessura $t_i = A_{si}$ (cm), com as seguintes propriedades: E_s = módulo de elasticidade do aço; f_y = tensão de escoamento do aço.

Na Fig. 6.2.2, indica-se uma seção transversal de uma laje nervurada, obtida através de um corte paralelo ao eixo x . Neste caso, admite-se que o sistema de eixos x - y seja orientado segundo as direções das nervuras. As nervuras da direção y , representadas na Fig. 6.2.2, possuem uma largura b_{wy} e uma altura h_w , abaixo da mesa de espessura h_f . O espaçamento livre entre essas nervuras é l_{oy} . A armadura de flexão em cada nervura possui uma área total igual a A_{sy} . As armaduras existentes na mesa não estão representadas na Fig. 6.2.2. Um corte paralelo ao eixo y indicaria as nervuras da direção x , as quais têm largura b_{wx} , altura h_w , espaçamento livre l_{ox} e uma área de aço A_{sx} .

As lajes ensaiadas por Taylor et al. [23] foram simplesmente apoiadas nos quatro lados do contorno e submetidas a uma carga uniformemente distribuída. Nas figuras 6.5.3 a 6.5.5, apresentam-se as relações entre a carga total aplicada e a flecha no centro das lajes. Os pontos indicados nessas figuras representam os resultados experimentais e as linhas cheias são as respostas teóricas, obtidas discretizando-se as lajes em 10x10 elementos finitos. Como se observa, o modelo numérico reproduz muito bem o comportamento experimental.

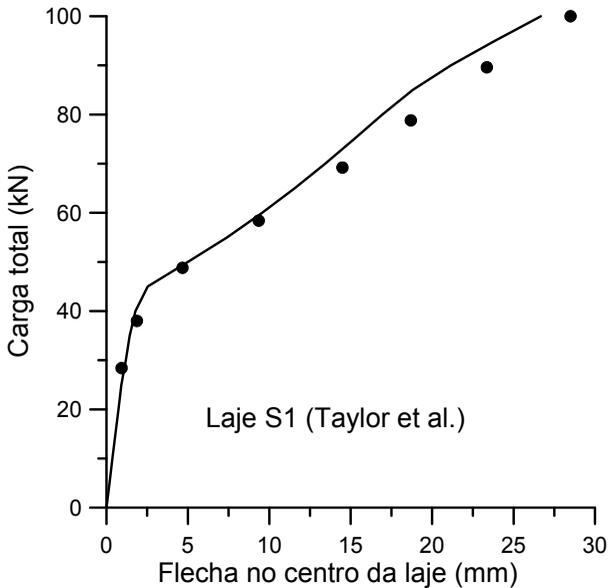


Fig. 6.5.3 - Laje maciça S1 - Taylor et al. [23]

Na Fig. 6.5.6, apresentam-se as respostas da laje S7 de Taylor desconsiderando a não-linearidade geométrica. Observa-se que, ao considerar a não linearidade geométrica, ocorre um enrijecimento da laje, o que concorda com os resultados experimentais. Assim, a não-linearidade geométrica deve ser considerada sempre, mesmo quando os lados da laje puderem se movimentar livremente no próprio plano.

Na Fig. 7.1.4, apresentam-se as variações de N_x e M_x em uma seção transversal paralela ao eixo y , passando pelo ponto de integração mais próximo do centro da laje, para a carga de ruptura $14,75 \text{ kN/m}^2$. Observa-se que as faixas próximas às bordas da laje ficam solicitadas à flexo-compressão, enquanto a faixa central está sob flexo-tração. Os esforços de membrana são autoequilibrados na superfície da laje, ou seja, $\int_A N_x dA = \int_A N_y dA = \int_A N_{xy} dA = 0$.

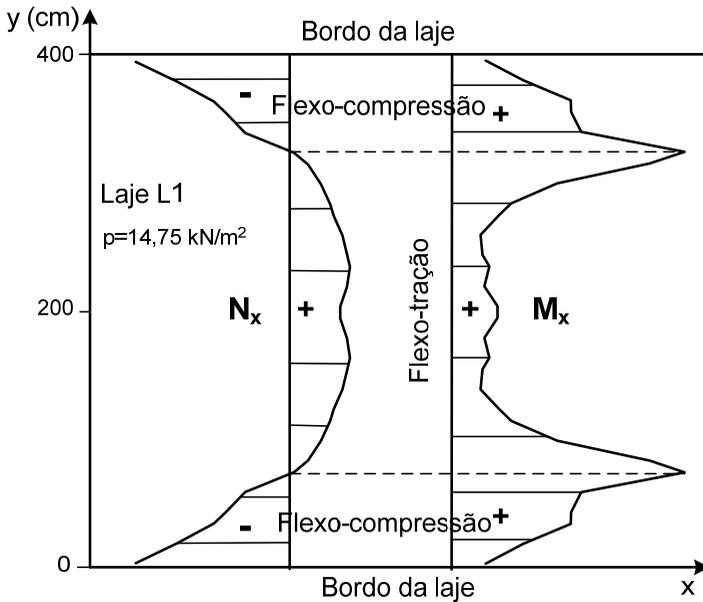


Fig. 7.1.4 – Esforços N_x e M_x em uma seção transversal passando pelo centro da laje na carga de ruptura

Na Fig. 7.1.5, apresenta-se a variação do momento fletor M_x na seção transversal paralela ao eixo y , para a carga de serviço $p_k = 5,0 \text{ kN/m}^2$. Observa-se que M_x tem uma variação senoidal, como no caso elástico linear. Isto ocorre porque a laje está no estágio I para a carga de serviço.

Comparando as figuras 7.1.4 e 7.1.5, verifica-se que a distribuição de M_x na ruptura é totalmente diferente daquela fornecida pela

- $12,75 \text{ kN/m}^2$ (para $\varphi = 0$): o processo foi interrompido após 500 iterações sem convergência (ou seja, não se chegou até a ruína real).
- $17,50 \text{ kN/m}^2$ (para $\varphi = 2,5$): ocorreu deformação plástica excessiva (deformação do aço maior que $10^0/_{00}$ em um ponto de integração no centro da laje).

As relações entre as cargas de ruptura e a carga de cálculo $p_d = 7,70 \text{ kN/m}^2$ são: 1,66 (para $\varphi = 0$) e 2,27 (para $\varphi = 2,5$). A relação entre a flecha na ruptura e a espessura da laje é de 0,87 (para $\varphi = 0$) e 1,65 (para $\varphi = 2,5$).

As flechas obtidas para a carga quase permanente $p_o = 4,45 \text{ kN/m}^2$ são as seguintes: $W_o = 5,0 \text{ mm}$ e $W_f = 18,7 \text{ mm}$. Observa-se que esses valores são bem próximos daqueles fornecidos na Tabela 7.1.3, obtidos através do cálculo elástico linear.

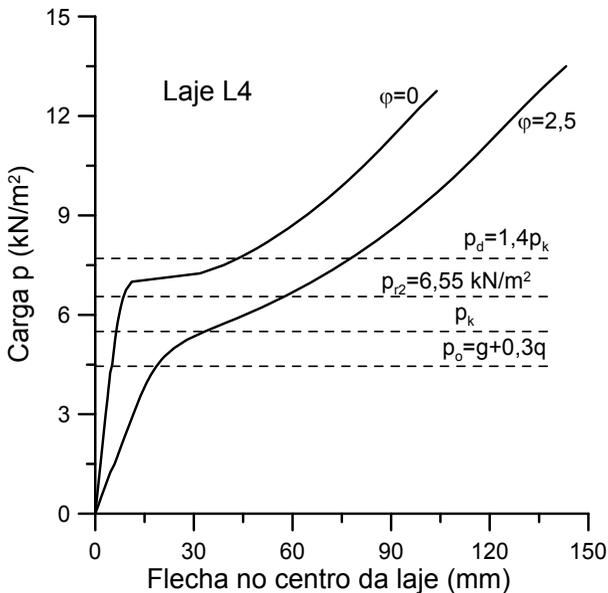


Fig. 7.1.8 – Curvas carga-flecha para a laje L4

E) A colaboração do concreto tracionado

O concreto tracionado entre fissuras tem uma importância significativa sobre o comportamento das lajes, tanto na redução das

Tabela 7.5.1 – Cargas de ruptura – lajes com restrições horizontais

Laje	p_u (1) kN/m ²	p_u (2) kN/m ²	p_u (3) kN/m ²	p_u (4) kN/m ²
L1	14,75	24,75	9,31	28,06
L2	13,25	19,25	8,06	20,06
L3	14,75	17,00	8,49	18,57
L4	12,75	18,75	8,88	20,88

(1): não linear sem impor restrições horizontais
(2): não linear com restrições horizontais nos quatro lados
(3): equação (7.1.5), derivada da teoria de placas
(4): equação (7.1.5) + $h^2 f_{ck} / l^2 =$ uso da equação (7.5.1)

Em todo o estudo apresentado neste capítulo, considerou-se que os apoios das lajes eram indeslocáveis no plano vertical, ou seja, tratou-se apenas de lajes sobre apoios rígidos. Conforme foi amplamente discutido no Volume 2, as deformações das vigas de apoio aumentam as flechas e os momentos fletores positivos no centro das lajes. Para uma correta avaliação dos esforços solicitantes e das flechas das lajes, é necessário fazer uma análise não linear do pavimento completo, incluindo todas as lajes e todas as vigas do pavimento. Essa análise requer um grande esforço computacional, tornando-se, até mesmo, inviável para o projeto estrutural. Os métodos simplificados para a consideração das deformações das vigas de apoio podem ser consultados no Volume 2.

Capítulo 8

VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA

8.1 – O modelo de solo de Winkler

O projeto das estruturas de fundação requer o conhecimento das características do solo, bem como de sua interação com os elementos estruturais. Em geral, adotam-se simplificações no projeto, devido à complexidade do problema de interação solo-fundação-estrutura. As sapatas, por exemplo, são dimensionadas com base em uma distribuição simplificada das pressões de contato, como mostrado na Fig. 8.3.1 do Volume 4. Para as sapatas contínuas sob pilares, empregam-se as pressões de contato da Fig. 8.3.6 do Volume 4. Em ambos os casos, são feitas distinções entre sapatas rígidas e sapatas flexíveis, com base em um critério puramente geométrico.

Para realizar uma análise mais consistente, é necessário considerar as deformações do solo produzidas pela carga transmitida pelo elemento de fundação. O solo sob a fundação se deforma para baixo e se curva lateralmente, o que permite que a fundação se acomode [31]. As argilas saturadas se comportam, aproximadamente, como um material elástico sob a carga. Aplicando-se uma pressão uniforme q sobre sua superfície, tanto a área carregada quanto a superfície adjacente se deformam, como mostrado na Fig. 8.1.1.

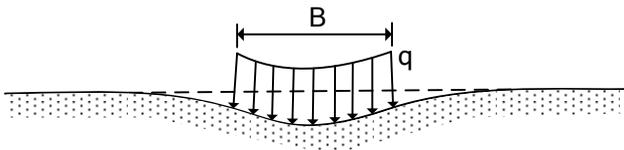


Fig. 8.1.1 - Perfil de deformação de uma fundação flexível carregada uniformemente em um sólido elástico como uma argila saturada [31]

Os recalques ou assentamentos, w_1 nos cantos e w_2 no centro de uma área carregada quadrada de lado B , são dados por

$$\text{nos cantos: } w_1 = \frac{0,42qB}{E_o} \quad (8.1.1)$$

$$\text{no centro: } w_2 = \frac{0,84qB}{E_o} \quad (8.1.2)$$

onde E_o é o módulo de elasticidade do solo* [31].

Se a superfície carregada for retangular, podem-se empregar essas mesmas equações, de forma aproximada, adotando-se $B = \sqrt{A}$, onde A é a área carregada.

Os solos não coesivos, como as areias, submetidos a uma carga uniforme se deformam com uma concavidade para baixo, como ilustrado na Fig. 8.1.2. Como o solo próximo dos bordos da área carregada não está confinado lateralmente, ele é empurrado para fora pela pressão lateral do solo que está mais próximo do centro, deformando-se mais pela falta de suporte. O solo do centro está confinado e possui um módulo de elasticidade maior que o solo dos bordos. Por isso, os recalques nos bordos são maiores que no centro.

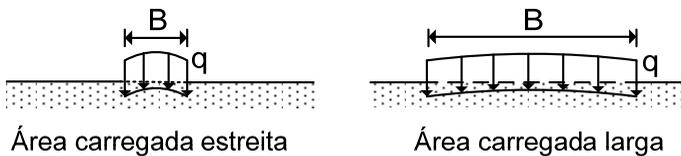


Fig. 8.1.2 – Perfil de deformação de uma fundação flexível carregada uniformemente em um solo não coesivo [31]

As pressões uniformes não são usuais. Elas podem ocorrer sob grandes tanques de petróleo e derivados, por exemplo, nos quais o fundo é uma fina placa de aço apoiada diretamente sobre o solo ou sobre uma laje de concreto de pequena espessura. De um modo geral, as pressões sob uma fundação dependem das características de rigidez do solo e da fundação.

Uma maneira de se calcular essas pressões é por meio de um solo imaginário, representado por um conjunto de molas elásticas,

* Neste livro utiliza-se o símbolo E_o para o módulo de elasticidade do solo, para não confundir com E_s = módulo de elasticidade do aço.

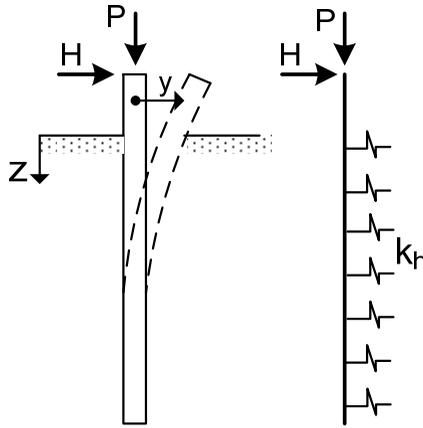


Fig. 8.1.4 – Modelo de Winkler para análise de estacas com carregamento horizontal

8.2 – Análise de vigas sobre base elástica

Na Fig. 8.2.1, apresenta-se uma viga elástica apoiada diretamente sobre o solo. A rigidez à flexão da viga é EI e o coeficiente de reação do solo é k_a kN/m^3 . Se a largura da viga é b , o solo reage com uma força para cima igual a $k_a b w$ kN/m , onde w é a deflexão da viga em metros. Logo, a viga sobre base elástica pode ser analisada considerando o módulo de reação $k = k_a b$ kN/m^2 , como está indicado na Fig. 8.2.1.

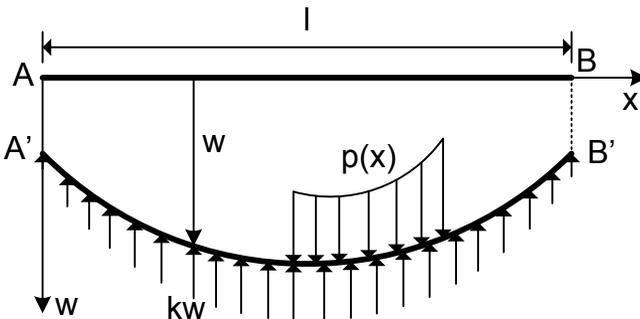


Fig. 8.2.1 – Viga sobre base elástica

8.5 – Exemplo de cálculo de um canal

Na Fig. 8.5.1, apresenta-se a seção transversal de um canal de concreto armado destinado ao escoamento de água. Como o canal é contínuo, o problema se reduz a uma análise de sua seção transversal, considerando um comprimento unitário na direção longitudinal. Se as paredes tiverem contato com o solo, é necessário fazer dois cálculos: considerando o canal vazio e submetido ao empuxo de terra de fora para dentro; considerando o canal cheio de água e as paredes submetidas à pressão hidrostática de dentro para fora. Esse cálculo é o mesmo que se faz para os reservatórios enterrados.

Neste exemplo, não são considerados os efeitos do empuxo de terra. As paredes estão submetidas apenas à pressão hidrostática de dentro para fora. A laje de fundo se comporta como uma viga sobre base elástica.

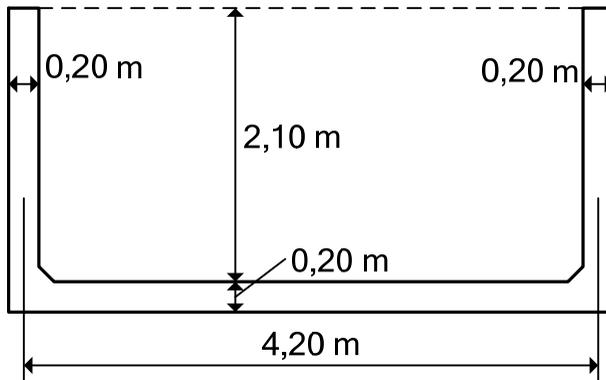


Fig. 8.5.1 – Canal para escoamento de água

Dados:

Concreto: $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$; $E_{cs} = 28518 \text{ MPa}$

$$E_{cs} = 28518 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

Solo: argila muito rijas: $k_a = 48000 \text{ kN/m}^3$ (Tabela 8.1.2)

Largura da viga: $b = 1 \text{ m}$ (largura unitária na direção longitudinal)

$$k = k_a b = 48000 \text{ kN/m}^2$$

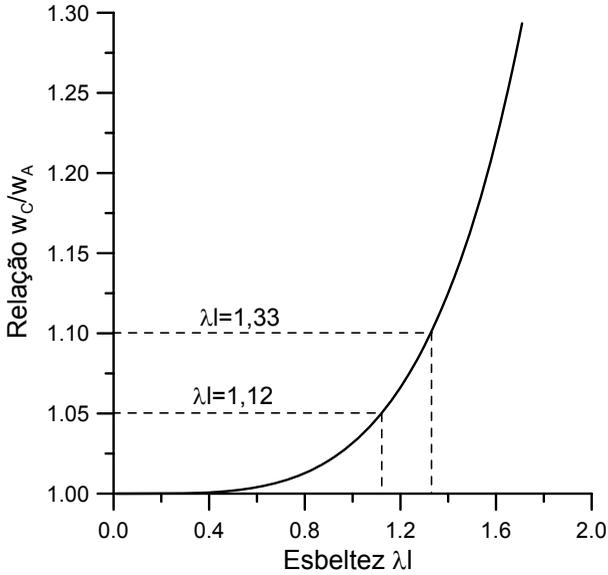


Fig. 8.6.3 – Relação entre as flechas w_c/w_A

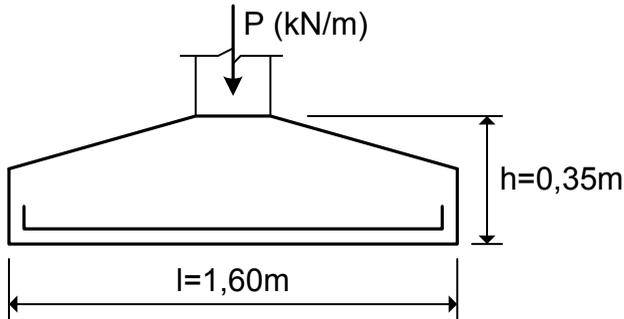


Fig. 8.6.4 - Seção transversal de uma sapata corrida sob parede

Impondo a restrição $\lambda l \leq 1,33$, resulta $E_{cs} \geq 147k$. No exemplo do canal visto anteriormente, tinha-se $E_{cs} = 594k$, valor bem superior ao mínimo exigido.

Considerando o valor máximo recomendado para areias compactas na Tabela 8.1.2, $k_a = 160000 \text{ kN/m}^3$, e como $b = 1 \text{ m}$, tem-se $k = 160000 \text{ kN/m}^2$. Logo, para que as pressões de contato possam ser consideradas uniformes, com um erro máximo de 10%, deve-se

Capítulo 9

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE DE VIGAS E PLACAS SOBRE BASE ELÁSTICA

9.1 – Análise de vigas e estacas pelo método dos elementos finitos

A formulação do método dos elementos finitos para a análise de barras apoiadas em uma base elástica é a mesma utilizada para os pilares esbeltos, a qual foi apresentada no capítulo 9 do Volume 3. A formulação é baseada no princípio dos trabalhos virtuais e inclui a não linearidade geométrica, o que permite analisar estacas esbeltas submetidas a cargas horizontais. A única diferença consiste na inclusão do termo correspondente à base elástica na equação do trabalho virtual interno. Todas as demais relações apresentadas no Volume 3 permanecem válidas.

A equação (9.4.5) do Volume 3 passa a ser escrita como

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l \left(-M \delta w_{,xx} + N \delta u_{o,x} + N w_{,x} \delta w_{,x} \right) dx + \int_0^l k w \delta w dx \quad (9.1.1)$$

onde: $w_{,x} = \frac{dw}{dx}$; $w_{,xx} = \frac{d^2w}{dx^2}$; $u_{o,x} = \frac{du_o}{dx}$.

Na equação (9.1.1), $M = M(x)$ é o momento fletor e $N = N(x)$ é o esforço normal em uma seção transversal genérica da barra. O campo de deslocamentos é representado pela flecha $w = w(x)$ e pelo deslocamento axial $u_o = u_o(x)$. O último termo, que foi acrescido à equação (9.4.5) do Volume 3, representa a contribuição da base elástica ao trabalho virtual interno.

O trabalho virtual devido às forças externas aplicadas à barra é dado por

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^l q(x) \delta w dx + \int_0^l p(x) \delta u_o dx + \sum_{i=1}^n F_i \delta U_i \quad (9.1.2)$$

onde $q(x)$ representa as cargas transversais distribuídas, $p(x)$ é uma força axial distribuída (como o peso próprio ou o atrito lateral em estacas), F_i e U_i são forças e deslocamentos generalizados.

O princípio dos trabalhos virtuais estabelece a condição necessária e suficiente para o equilíbrio da barra na forma

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \quad (9.1.3)$$

Empregando o método dos elementos finitos, o eixo da barra é discretizado em pequenos elementos com dois nós e três graus de liberdade por nó, como mostrado na Fig. 9.1.1.

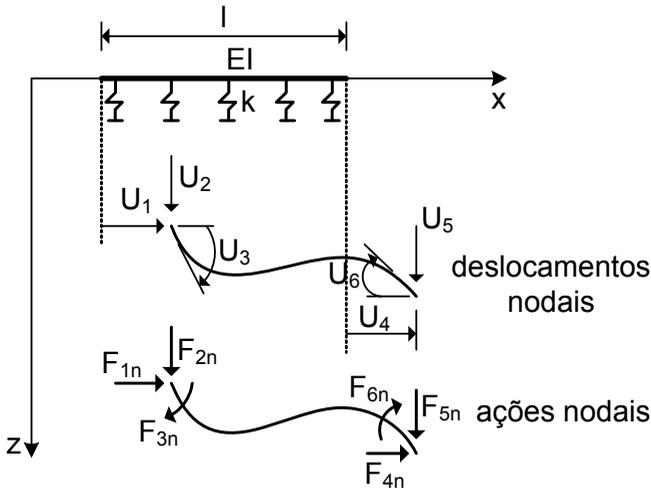


Fig. 9.1.1 - Ações e deslocamentos nodais do elemento

Empregando as funções de interpolação e o procedimento detalhado no capítulo 9 do Volume 3, obtêm-se as seis equações de equilíbrio do elemento:

$$F_{1n} = \int_0^l N \phi_1' dx \quad (9.1.4)$$

$$F_{2n} = \int_0^l -M \phi_2'' dx + \int_0^l N (\phi_2' U_2 + \phi_3' U_3 + \phi_5' U_5 + \phi_6' U_6) \phi_2' dx + \int_0^l k (\phi_2 U_2 + \phi_3 U_3 + \phi_5 U_5 + \phi_6 U_6) \phi_2 dx \quad (9.1.5)$$

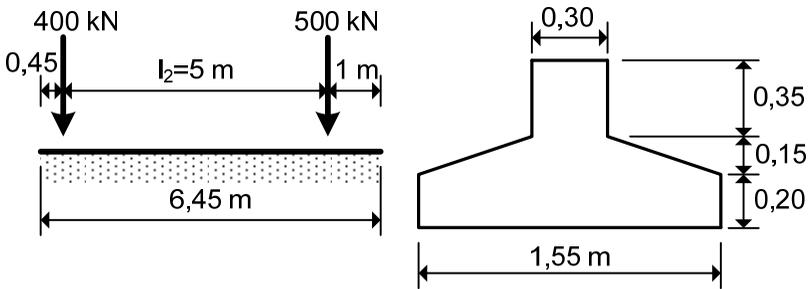


Fig. 9.2.5 – Sapata sob dois pilares

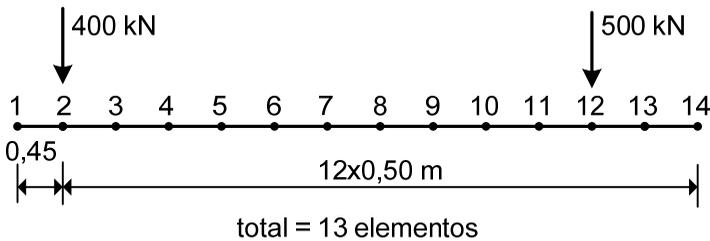


Fig. 9.2.6 – Discretização do eixo da viga

Supondo a sapata sobre uma argila muito rija com coeficiente de reação $k_a = 48000 \text{ kN/m}^3$ (Tabela 8.1.2) e sendo $b = 1,55 \text{ m}$ (largura da sapata), tem-se $k = k_a b = 74400 \text{ kN/m}^2$. Considerando uma areia fofa acima do nível d'água, tem-se $k_a = 13000 \text{ kN/m}^3$ e $k = k_a b = 20150 \text{ kN/m}^2$.

O peso próprio da sapata é $25 \times 0,5538 = 13,85 \text{ kN/m}$. Na Fig. 9.2.7, apresentam-se as reações do solo considerando os módulos de reação para argila muito rija e areia fofa, juntamente com a reação média $13,85 + (400 + 500)/6,45 = 153,38 \text{ kN/m}$. Conforme se observa, a pressão no solo é máxima nas extremidades da sapata corrida e mínima no centro. A pressão média, usualmente admitida no projeto de sapatas rígidas, só seria válida para um solo muito deformável. Essas concentrações de pressão decorrem da hipótese de solo elástico linear. Considerando a não linearidade do solo, as pressões se uniformizam, conforme será mostrado na seção 9.3.

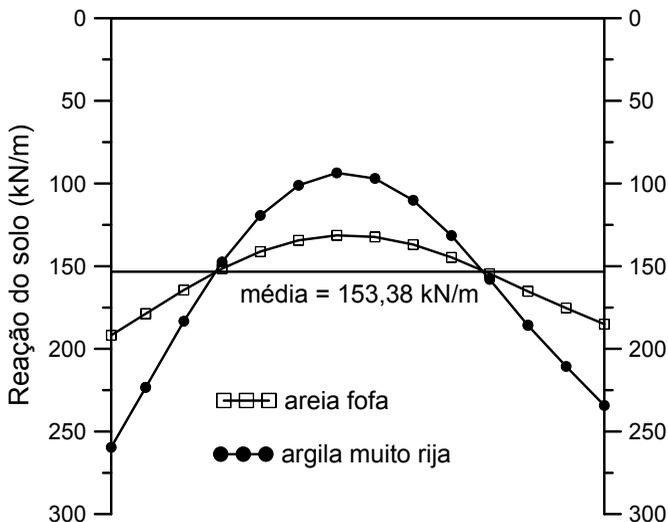


Fig. 9.2.7 – Reações do solo

Na Fig. 9.2.8, apresentam-se os diagramas de esforço cortante.

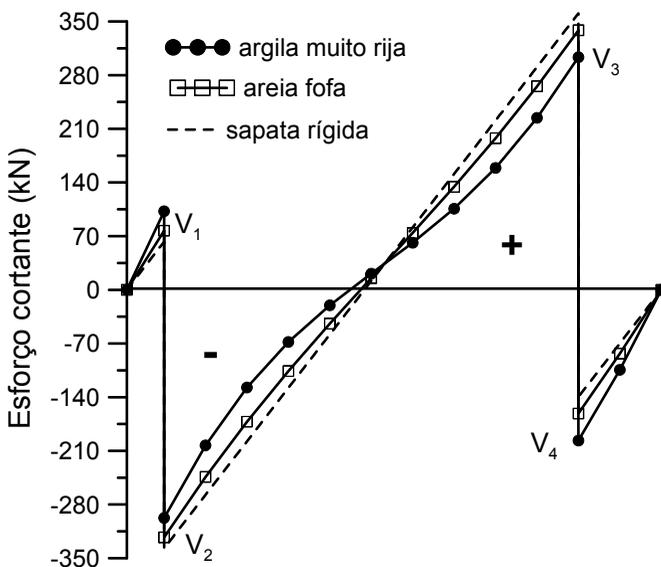


Fig. 9.2.8 – Diagramas de esforços cortantes

como ilustrado na Fig. 9.3.2-a. Em geral, considera-se p_{ref} entre 30% e 50% da pressão de ruptura p_u .

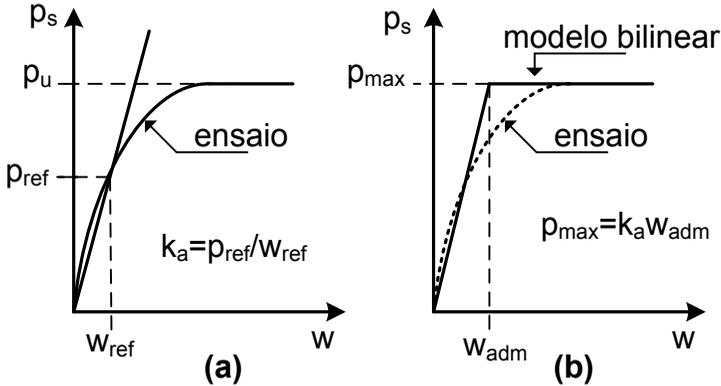


Fig. 9.3.2 – Relação pressão-recalque obtida em prova de carga

Na bibliografia, há vários modelos propostos para tentar representar esse comportamento não linear do solo, o que dá origem aos denominados modelos de Winkler não lineares. Bowles [38], por exemplo, sugere o modelo elasto-plástico perfeito da Fig. 9.3.2-b. O modelo é linear até a pressão $p_{max} = k_a w_{adm}$, onde w_{adm} é um recalque máximo admitido para a fase linear.

Chandra et al. [42], baseando-se em 37 ensaios em placas realizados por diversos autores, propuseram a relação

$$p_s = k_1 w - k_2 w^3 \quad (9.3.9)$$

onde k_1 é o coeficiente de reação linear (em kN/m^3) e k_2 é o coeficiente de reação não linear (em kN/m^5).

Infelizmente, as faixas de variação de k_1 e k_2 são muito grandes, o que dificulta a escolha desses parâmetros do modelo.

Uma equação muito usada é

$$p_s = \frac{w}{1/k_t + w/p_r} \quad (9.3.10)$$

onde k_t é o coeficiente de reação tangente à origem da curva $p_s - w$ e p_r é o valor final da pressão quando $w \rightarrow \infty$.

todo o eixo da estaca. O atrito lateral f é considerado como uma carga uniformemente distribuída, de baixo para cima, no trecho de 14 m de comprimento.

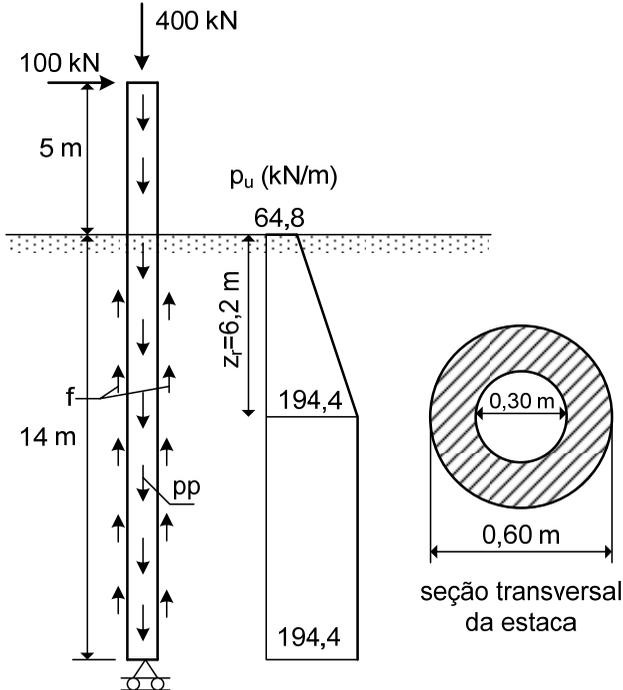


Fig. 9.4.2 – Estaca com carga axial e carga lateral

O peso total da estaca é 100,73 kN. Logo, a carga axial total é igual a 500,73 kN. Admitindo que 80% dessa carga sejam resistidos pelo atrito lateral, tem-se $f = 0,8(500,73/14) = 28,6$ kN/m. Se o atrito lateral não for considerado, a reação vertical na base da estaca é igual a 500,73 kN. Considerando o atrito lateral, a reação na base é igual a 100,33 kN. Logo, o diagrama de esforços normais sofrerá grande influência do atrito lateral.

O concreto da estaca possui um módulo de deformação longitudinal $E_{CS} = 28518$ MPa. A não linearidade física da estaca não é considerada.

A consideração do atrito lateral tem pouca influência sobre os resultados, exceto em relação aos esforços normais na estaca. Porém,

como a estaca está submetida à flexo-compressão, as armaduras obtidas no dimensionamento sofrerão influência do atrito lateral.

Na Fig. 9.4.3, apresentam-se as deformadas da estaca para o caso linear geométrico e para o caso não linear geométrico. O deslocamento horizontal máximo, no topo da estaca, é de 160 mm para o caso linear geométrico e de 178 mm quando a não linearidade geométrica é considerada. O fator de amplificação é $178/160=1,11$.

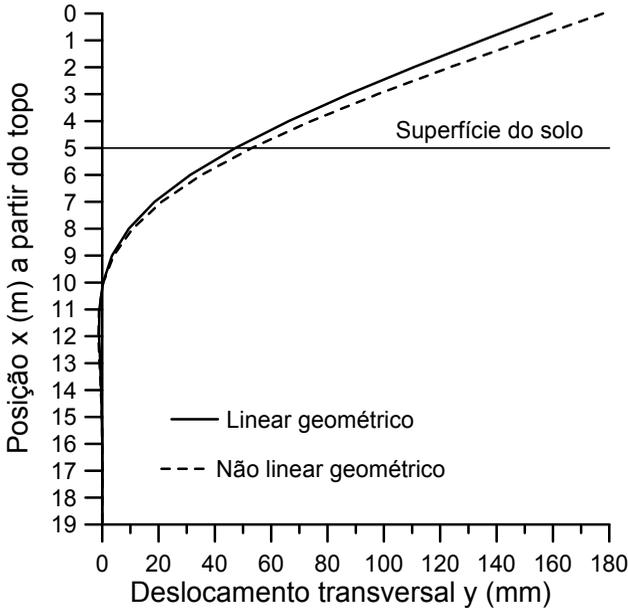


Fig. 9.4.3 – Deformadas da estaca

Na Fig. 9.4.4, apresentam-se os diagramas de momentos fletores. Observa-se que a parte inferior da estaca fica submetida a momentos positivos, ao contrário da parte superior. Os momentos máximos negativos, em valor absoluto, são iguais a -595 kNm para o caso linear geométrico e -655 kNm quando a não linearidade geométrica é considerada. O fator de amplificação é $655/595=1,10$.

Na Fig. 9.4.5, apresentam-se os diagramas de esforços normais para os casos em que se considera o atrito lateral $f = 28,6$ kN/m e para $f = 0$. Conforme se observa, os esforços normais são fortemente influenciados pelo atrito lateral na estaca.

$$p = \frac{300}{0,60 \times 0,60} = 833,33 \text{ kN/m}^2$$

Além disso, deve-se acrescentar o peso próprio da laje, que vale 10 kN/m^2 para todos os elementos.

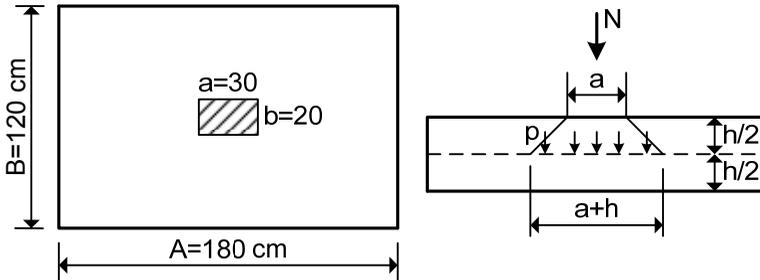


Fig. 9.5.2 – Sapata isolada com espessura constante

Na Fig. 9.5.3, apresenta-se a discretização de um quarto da laje, para aproveitar a dupla simetria. As condições de contorno nos dois eixos de simetria são indicadas na figura. Os elementos hachurados são submetidos a uma carga de $843,33 \text{ kN/m}^2$. Nos demais elementos, considera-se apenas a carga de 10 kN/m^2 .

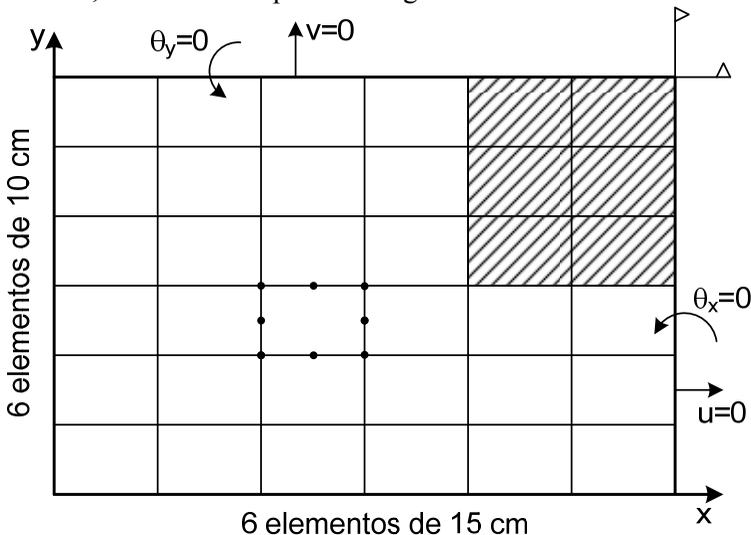


Fig. 9.5.3 – Discretização de 1/4 da laje

Capítulo 10

FUNDAMENTOS DA ANÁLISE ESTRUTURAL PROBABILÍSTICA

10.1 – O método dos coeficientes parciais de segurança

Os atuais procedimentos de projeto das estruturas são baseados nos denominados estados limites. No caso das estruturas de concreto armado, consideram-se os estados limites de utilização e os estados limites últimos. Nos primeiros, analisa-se o comportamento da estrutura sob a ação das cargas previstas em função da sua finalidade. Assim, consideram-se as cargas nominais (cargas características) e as propriedades médias dos materiais, verificando-se a estrutura em relação ao estado limite de deformações excessivas e ao estado limite de abertura das fissuras.

Nas verificações relativas aos estados limites últimos, são introduzidos coeficientes parciais de segurança para majorar as ações e minorar as resistências dos materiais (aço e concreto). Os coeficientes parciais de segurança são definidos em normas específicas em função das combinações das ações, conforme foi visto no capítulo 3 do Volume 1. A partir das ações majoradas (ações de cálculo), determinam-se os esforços solicitantes de cálculo S_d , empregando algum tipo de análise estrutural: análise linear, análise linear com redistribuição de esforços, análise plástica, análise não linear. Considerando as resistências de cálculo dos materiais (as resistências minoradas), determinam-se os esforços resistentes de cálculo R_d para os diversos tipos de solicitação: flexão simples ou composta, cisalhamento, torção, etc. A segurança estrutural é comprovada se $R_d \geq S_d$ em todos os pontos ou seções transversais da estrutura.

Esse método leva em conta alguns aspectos probabilísticos do problema, uma vez que os valores dos coeficientes parciais de segurança são definidos em função do grau de incerteza ou de variabilidade das ações e das propriedades dos materiais. Por isso, adota-se

$\gamma_s = 1,15$ para o aço e $\gamma_c = 1,4$ para o concreto, pois se admite que as propriedades do concreto possuem uma maior variabilidade que as propriedades mecânicas do aço, dadas as diferenças nos processos de fabricação e controle desses materiais.

Apesar desses importantes avanços em relação ao antigo método das tensões admissíveis¹, alguns aspectos do problema continuam sendo tratados de maneira determinística. Por exemplo, nenhuma referência é feita em relação às variações espaciais das resistências dos materiais na estrutura. As condições de contorno, posições das cargas e dimensões dos elementos estruturais também são tratadas de maneira determinística.

Considere-se a viga biapoiada da Fig. 10.1.1, submetida a uma carga de cálculo p_d uniformemente distribuída. Admite-se que a carga seja determinística e que os apoios não conferem nenhum engastamento parcial à viga. Assim, o diagrama de momentos fletores de cálculo M_d é conhecido deterministicamente e é representado pela parábola do segundo grau mostrada na figura.

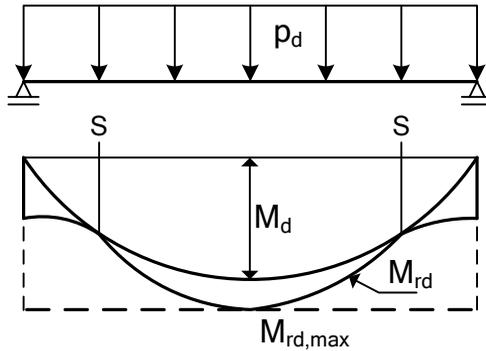


Fig. 10.1.1 – Viga com resistência variável ao longo do vão

O dimensionamento da viga é feito para o momento fletor máximo solicitante no meio do vão, $M_{d,max}$. As armaduras são obtidas de forma que $M_{d,max} = M_{rd,max}$, onde $M_{rd,max}$ é o momento fletor resistente com as propriedades de cálculo. Se esse momento

¹ A norma de fundações NBR-6122 ainda permite o uso do método dos fatores globais de segurança, conforme visto no capítulo anterior.

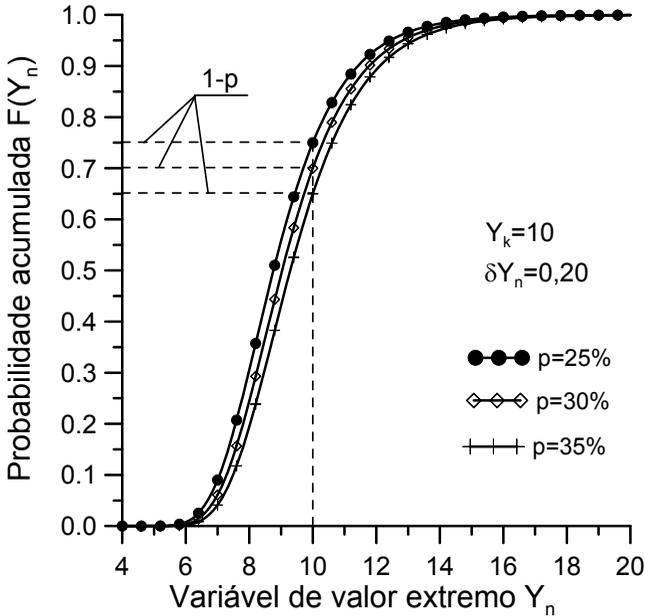


Fig.10.4.2-Função de probabilidade acumulada de valores extremos

10.5 – Geração de variáveis aleatórias

Diversos métodos para análise estrutural probabilística têm sido pesquisados e bastante difundidos na bibliografia. Em geral, empregam-se o método de Monte Carlo, o método de Monte Carlo com expansão de Neumann e técnicas de perturbação, que são obtidas a partir de expansões da resposta estrutural em série de Taylor em função das variáveis aleatórias envolvidas [52].

O método de Monte Carlo constitui a forma mais simples e evidente para a realização de uma análise probabilística e, por isso, é largamente empregado. Nesse método, as propriedades dos materiais, as cargas, ou outra variável aleatória são introduzidas por simulação digital. Uma rotina gera números aleatórios que passam a representar as variáveis do problema. Assim, utiliza-se o mesmo modelo de análise estrutural determinística, sem qualquer alteração significativa. Além disso, o método de Monte Carlo é estatisticamente consistente e serve para testar a validade de outras técnicas mais simplificadas.

Assim, a primeira providência ao empregar o método de Monte Carlo consiste na geração de amostras das variáveis aleatórias en-

terminada pelo evento $S < 1$. Outros métodos para determinação da confiabilidade podem ser encontrados nas referências [49,53].

De acordo com a equação (10.6.4), se $R > 0$ tem-se uma situação segura; se $R < 0$ tem-se uma situação de falha. O estado limite é dado pela condição $R = 0$. Uma interpretação geométrica dessas condições pode ser obtida, definindo-se as variáveis reduzidas

$$X' = \frac{P_u - \mu_{P_u}}{\sigma_{P_u}} ; \quad Y' = \frac{P_s - \mu_{P_s}}{\sigma_{P_s}} \quad (10.6.8)$$

onde:

μ_{P_u} e σ_{P_u} = média e desvio padrão da carga de ruptura;

μ_{P_s} e σ_{P_s} = média e desvio padrão da carga solicitante.

Substituindo (10.6.8) em $R = P_u - P_s = 0$, resulta

$$\sigma_{P_u} X' - \sigma_{P_s} Y' + \mu_{P_u} - \mu_{P_s} = 0 \quad (10.6.9)$$

que é uma reta, como mostrado na Fig. 10.6.1.

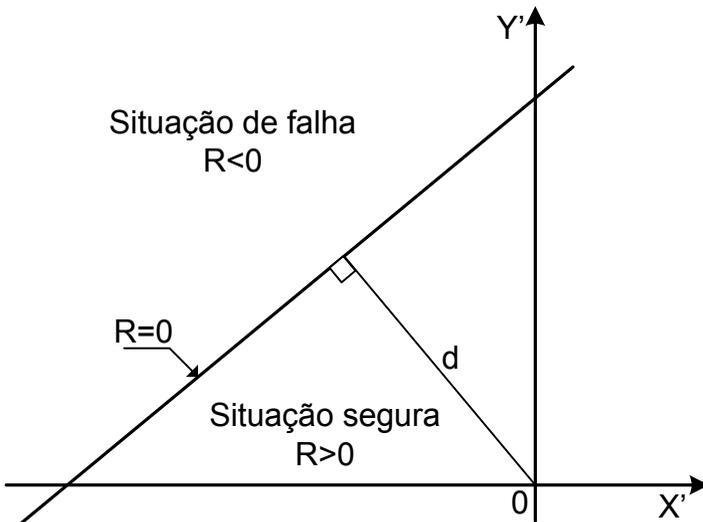


Fig. 10.6.1 – Função de falha no espaço das variáveis reduzidas

A distância da reta de falha $R = 0$ até a origem é

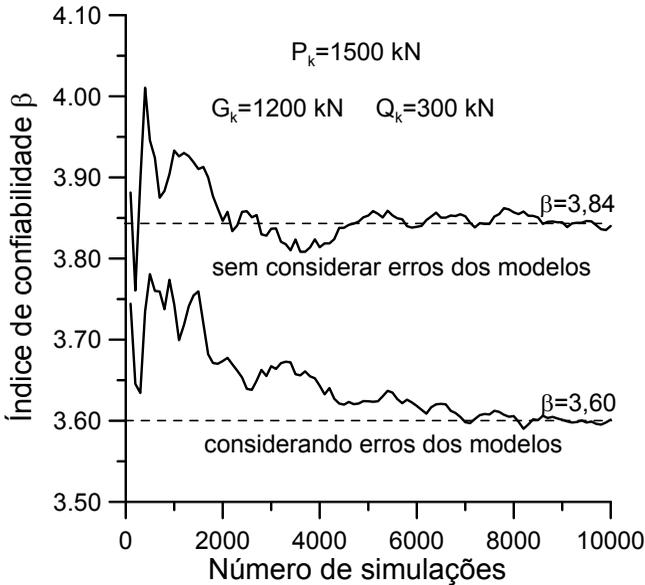


Fig. 10.8.2 - Variação do índice de confiabilidade com o número de simulações (compressão simples)

O índice de confiabilidade depende da combinação das variabilidades de todas as variáveis aleatórias envolvidas. Como o aço apresenta menor variabilidade que o concreto, o índice de confiabilidade aumenta com o crescimento da taxa de armadura. Desse modo, quanto maior for a força normal de compressão solicitante, maior será a armadura obtida no dimensionamento e maior será o índice de confiabilidade. Esse efeito é mostrado na Fig. 10.8.3, onde se consideram diversas relações $Q_k / (G_k + Q_k)$ entre a carga variável e a carga total de serviço.

De acordo com as Tabelas 10.6.1 e 10.6.2, o índice de confiabilidade mínimo exigido pelo MC-FIB 2010 e pela EN 1990 para os edifícios é $\beta_{\min} = 3,8$. Esse valor só é alcançado para uma taxa de armadura elevada, como se verifica pela Fig. 10.8.3. Entretanto, na análise teórica foi considerado um coeficiente de variação $\delta_{f_c} = 0,20$ para a resistência do concreto. Esse coeficiente é, provavelmente, bem superior ao coeficiente de variação que seria verificado na estrutura. Como o problema é de compressão simples (a seção se encontra totalmente comprimida), a contribuição do concreto

é muito importante na capacidade resistente, o que afeta diretamente o valor do índice de confiabilidade.

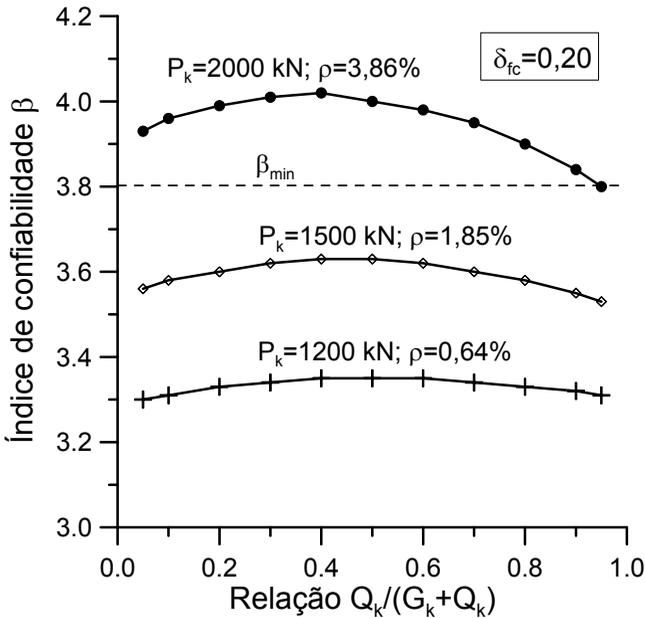


Fig. 10.8.3 – Variação do índice de confiabilidade com o crescimento da carga e da taxa de armadura ($\delta_{fc} = 0,20$)

A NBR-12655 [55] considera, para efeito de dosagem do concreto na condição de preparo A (condição válida para todas as classes de resistência), um desvio padrão $\sigma_{fc} = 4,0$ MPa. A resistência média é dada por $f_{cm} = f_{ck} + 1,645\sigma_{fc}$. Com isso, resultam os coeficientes de variação da Tabela 10.8.3.

Tabela 10.8.3- Coeficientes de variação para dosagem (NBR-12655)

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	δ_{fc}
20	26,6	0,15
30	36,6	0,11
40	46,6	0,09
50	56,6	0,07

Capítulo 11

MODELOS DE FISSURAÇÃO

11.1 – Modelos para previsão da abertura das fissuras

A estimativa da abertura das fissuras em elementos de concreto armado é extremamente imprecisa. Isto se deve à influência da retração e da evolução das propriedades do concreto com a idade, bem como à grande dispersão dos resultados experimentais. Diversos autores têm proposto modelos para cálculo do espaçamento e da abertura das fissuras, os quais são elaborados a partir de um dado conjunto de ensaios. Um bom apanhado desses modelos pode ser encontrado em [58].

Em geral, os modelos podem ser classificados como: modelos de aderência-escorregamento (*bond-slip models*), modelos sem escorregamento (*no-slip models*) e modelos combinados (*combined models*).

Nos modelos de aderência-escorregamento, admite-se que a abertura das fissuras é governada pelo escorregamento entre a barra de aço e o concreto. Esse é o único modelo teórico com demonstração matemática, como o modelo do CEB/90 [1], conforme demonstrado no capítulo 7 do Volume 2. Nesse caso, a abertura w_k da fissura é igual ao dobro do escorregamento. A abertura das fissuras depende da qualidade da aderência (função da resistência à tração do concreto e da conformação superficial da barra de aço), do diâmetro ϕ da barra e da taxa de armadura ρ_{se} em uma área efetiva.

Nos modelos sem escorregamento, admite-se que a abertura da fissura é nula no contato com a barra de aço e aumenta em direção à superfície do concreto. Assim, a abertura das fissuras depende unicamente do cobrimento c , sendo independente dos fatores anteriormente mencionados.

Os modelos combinados consideram ambos os efeitos, de modo que a abertura das fissuras é obtida por uma superposição desses

dois mecanismos. Às vezes, também é incluído o espaçamento das barras nos modelos combinados.

Na Fig. 11.1.1, ilustram-se esses três modelos.

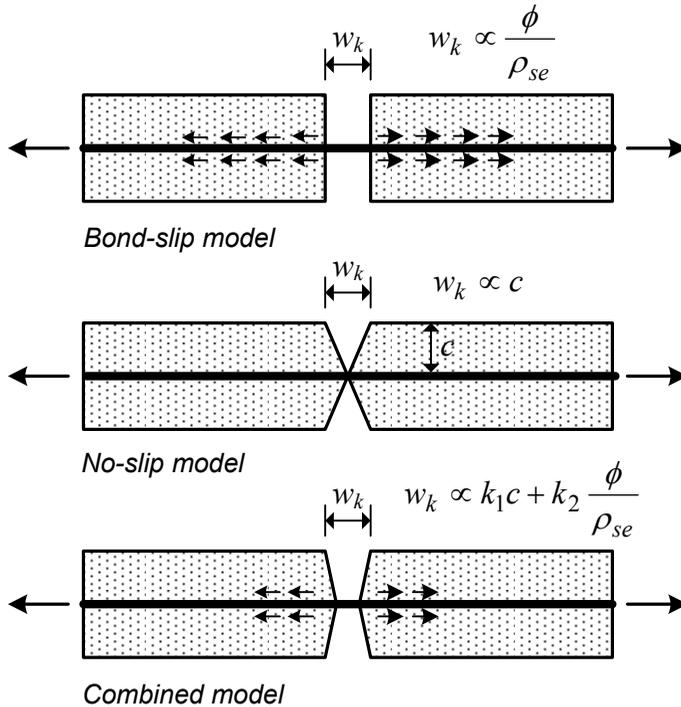


Fig. 11.1.1 – Comparação dos modelos para cálculo da abertura das fissuras (reproduzido da ref. [59])

O modelo do CEB/90 [1] é do tipo aderência-escorregamento. A NBR-6118 [5] utiliza duas expressões para o cálculo da abertura das fissuras, sendo uma derivada de um modelo do tipo aderência-escorregamento e outra correspondente a um modelo combinado. Até o ano de 1995, o ACI 318 [4] adotava um modelo do tipo sem escorregamento. A partir da edição de 1999, o ACI 318 abandonou o cálculo da abertura das fissuras, passando a especificar um espaçamento máximo para as barras de aço. O CEB/78 [10], EHE [18], EC2 [2] e MC-FIB 2010 [3] adotam um modelo combinado. Esses modelos são analisados neste capítulo, mostrando-se as diferenças entre os mesmos.

sendo h a altura total da seção, d a altura útil e x a profundidade da linha neutra no estágio II.

Como uma simplificação, pode-se adotar $\beta = 1,35$ para as lajes e $\beta = 1,20$ para as vigas.

A área efetiva é dada por

$$A_e = \frac{2bd'}{m} \quad (11.4.3)$$

sendo b a largura da seção transversal, d' a distância do centróide da armadura até a borda tracionada e m o número de barras da armadura tracionada.

Na Fig. 11.4.1, indicam-se os parâmetros do modelo.

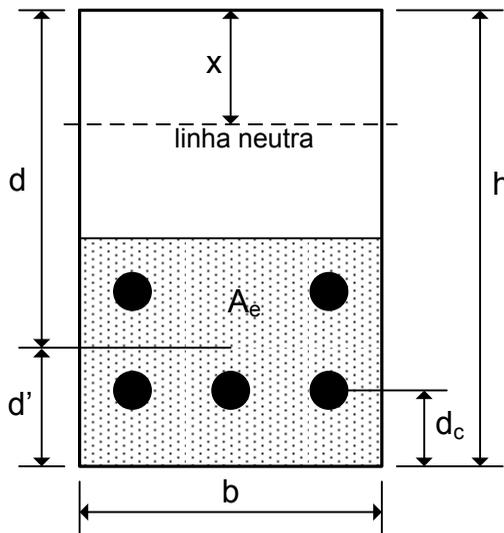


Fig. 11.4.1 – Parâmetros do modelo de Gergely-Lutz

Deve-se observar que o diâmetro das barras de aço não é considerado de forma explícita na equação (11.4.1). Entretanto, ao reduzir o diâmetro das barras, usando um grande número de barras para se obter uma dada área de aço, tem-se um aumento do parâmetro m e uma redução da área efetiva A_e . Conseqüentemente, a equação (11.4.1) fornecerá uma menor abertura das fissuras.

diferem pouco do CEB/90. A média da relação $w_k/w_{k,CEB/90}$ para esses métodos varia entre 0,90 e 1,10, aproximadamente, indicando que os métodos de 1 a 5 são equivalentes para a estimativa da abertura das fissuras.

Por outro lado, o modelo do MC-FIB 2010 (métodos 6 e 7) fornece uma abertura de fissura excessiva, devendo ser revisado para ajustar os coeficientes que multiplicam c e ϕ/ρ_{se} .

Atualmente, há uma tendência nas normas de projeto de se utilizar um modelo combinado para o cálculo da abertura das fissuras. Nesses modelos, a abertura das fissuras é calculada como

$$w_k = S_{r,\max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} + R\varepsilon_{cn}) \quad (11.8.1)$$

com algumas diferenças no cálculo de $(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} + R\varepsilon_{cn})$.

A forma mais usual para o espaçamento máximo entre as fissuras é uma combinação do cobrimento c e do parâmetro ϕ/ρ_{se} .

Assim, $S_{r,\max}$ é escrito como

$$S_{r,\max} = \alpha_1 c + \alpha_2 (\phi/\rho_{se}) \quad (11.8.2)$$

onde α_1 e α_2 são coeficientes que retratam os pesos das variáveis c e ϕ/ρ_{se} na abertura das fissuras.

As normas de projeto manipulam esses coeficientes, proporcionando diferentes métodos para cálculo de w_k . Considerando apenas barras nervuradas e o problema de flexão simples, obtêm-se:

$$\text{EC2 [2]:} \quad \alpha_1 = 3,4 \quad ; \quad \alpha_2 = 0,17$$

$$\text{AS 3600 [60]:} \quad \alpha_1 = 3,4 \quad ; \quad \alpha_2 = 0,12$$

$$\text{CEB/90 [1]:} \quad \alpha_1 = 0,0 \quad ; \quad \alpha_2 = 0,28$$

$$\text{MC-FIB 2010 [3]:} \quad \alpha_1 = 2,0 \quad ; \quad \alpha_2 = 0,28$$

onde foi incluída a norma australiana AS 3600/2018.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *CEB-FIP Model Code 1990*. Published by Thomas Telford, London, 1993.
2. COMITÉ EUROPEU DE NORMALIZAÇÃO. NP EN 1992-1-1. *Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão – Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. Março, 2010.
3. INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE – FIB. *Model Code 2010*. Final draft. 2 v. Lausanne, April, 2012.
4. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-19) and Commentary (ACI 318R-19)*. 2019.
5. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-6118: Projeto de Estruturas de Concreto*. Rio de Janeiro, 2023.
6. ARAÚJO, J.M. *Programas para Dimensionamento e Verificação de Concreto Armado*. 1ª. ed., Ed. Dunas, 2018.
7. BOHIGAS, A. C. *Shear Design of Reinforced High-Strength Concrete Beams*. Doctoral Thesis. Universitat Politècnica de Catalunya, Departament d'Enginyeria de la Construcció, Barcelona, 2002.
8. RÜSCH, H. *Concreto Armado e Protendido*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1981.
9. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-7197: Projeto de Estruturas de Concreto Protendido*. Rio de Janeiro, 1989.
10. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *Code-modèle CEB/FIP pour les Structures en Béton*. Bulletin d'Information 124/125, Paris, 1978.

11. ARAÚJO, J. M. *A non-linear model for analysis and design of slender reinforced-concrete columns*. Magazine of Concrete Research. Vol. 71, No. 6, p.287-297, March, 2019.
12. ARAÚJO, J.M. *Projeto Estrutural de Edifícios de Concreto Armado*. Rio Grande. Editora Dunas, 4. ed. 2021.
13. ARAÚJO, J. M. *JMPILAR: Software para análise e dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado*. 2014. Informações disponíveis em <www.editoradunas.com.br>.
14. ARAÚJO, J. M. *Pilares esbeltos de concreto armado. Parte 1: Um modelo não linear para análise e dimensionamento*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, Rio Grande, Ed. Dunas, n.18, p.81-93, Novembro, 2011. Disponível em <www.editoradunas.com.br/revistatpec>.
15. ARAÚJO, J. M. *PACON: Programa Auxiliar para projeto de estruturas de CONcreto*. 2014. Informações disponíveis em www.editoradunas.com.br.
16. ARAÚJO, J. M. *Pilares esbeltos de concreto armado. Parte 2: Verificação dos métodos simplificados da NBR-6118*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, Rio Grande. Ed. Dunas, n. 19, p.25-35, Maio, 2012. Disponível em <www.editoradunas.com.br/revistatpec>.
17. ARAÚJO, J. M.; BIGNON, P. G. - *Métodos de minimização para análise não-linear de estruturas*. Relatório de Pesquisa RP-110/93, CPGE, UFRGS, Porto Alegre, 1993. Disponível em: <<http://www.editoradunas.com.br/dunas/RP110.pdf>>.
18. COMISIÓN PERMANENTE DEL HORMIGÓN. *Instrucción de Hormigón Estructural, EHE-08*, 5.ed., Ministério de Fomento, Madrid, 2011.
19. FUSCO, P. B. *Estruturas de Concreto: Solicitações Normais*. Rio de Janeiro: Ed. Guanabara Dois, 1981.
20. NARAYANAN, R. S.; BEEBY, A. *Designers' Guide to EN1992-1-1 and EN1992-1-2*. London: Thomas Telford, 2005.
21. ABDUL-WAHAB, H. M. S., KHALIL, M. H. - *Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs*. Journal

- of Structural Engineering, ASCE, Vol. 126, No. 2, p.219-227, 2000.
22. JOFRIET, J. C.; MCNEICE, G. M. - *Finite element analysis of reinforced concrete slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST3, p.785-806, 1971.
 23. TAYLOR, R., MAHER, D. R. H., HAYES, B. - *Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs*. Magazine of Concrete Research, Vol.18, No. 55, p.85-94, 1966.
 24. ARAÚJO, J. M. *Análise não-linear de lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, Lisboa, n. 52, p. 43-52, Setembro, 2003.
 25. MINDLIN, R. D. - *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. Journal of Applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 18, No. 1, p.31-38, 1951.
 26. REAL, M. V. - *Análise estática de lajes de concreto armado incluindo não-linearidade física e geométrica*. Dissertação de mestrado, CPGEC, UFRGS, Porto Alegre, 1990.
 27. ZIENKIEWICZ, O. C.; Taylor, R. L. *The Finite Element Method*. 3 v., 5. ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2000.
 28. SCHEGG, A.; DECANINI, L. *Sobre las deformaciones en elementos de hormigon armado*. Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Anais, v.2, p.1070-1120, Porto Alegre, 1971.
 29. PORTLAND CEMENT ASSOCIATION. *Design criteria for deflection capacity of conventionally reinforced concrete slabs. Phase I: State-of-the-art report*. Construction Technology Laboratories Illinois, 1980.
 30. CHRISTIANSEN, K.P.; FREDERIKSEN, V. T. *Experimental investigation or rectangular concrete slabs with horizontal restraints*. Matériaux et Constructions, vol. 16, N. 93, p. 179-192, RILEM, Paris, 1983.

31. SOWERS, G. B.; SOWERS, G. F. *Introducción a la Mecánica de Suelos y Cimentaciones*. Mexico: Editorial Limusa, 1978.
32. HETÉNYI, M. *Beams on Elastic Foundation*. Michigan, University of Michigan, Ann Arbor, 1946.
33. TEODORU, I. B. *Beams on Elastic Foundation. The Simplified Continuum Approach*. Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. Tomul LV (LIX), Fasc. 4, România, 2009.
34. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-6489: Solo - Prova de carga estática em fundação direta*. Rio de Janeiro, 2019.
35. VELLOSO, D. A.; LOPES, F. R. *Fundações*. Volume completo. 1. ed., São Paulo: Oficina de Textos, 2011.
36. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE MECÂNICA DOS SOLOS E ENGENHARIA GEOTÉCNICA. *Fundações. Teoria e Prática*. 2. ed., São Paulo: Pini, 1998 (vários autores, vários editores técnicos).
37. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-6484: Solo – Sondagem de simples reconhecimento com SPT – Método de ensaio*. Rio de Janeiro, 2020.
38. BOWLES, J. E. *Foundation Analysis and Design*. 5. ed., New York, McGraw-Hill, 1997.
39. TING, B. Y.; MOCKRY, E. F. *Beam on elastic foundation finite element*. Journal of the Structural Division, v. 110, n. 10, p. 2324-2339, 1984.
40. PATEL, A. *Geotechnical Investigations and Improvement of Ground Conditions*. Elsevier, 2019.
41. RUSSI, D. *Estudo do comportamento de solos através de ensaios de placa de diferentes diâmetros*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFSM, Santa Maria, 2007.
42. CHANDRA, S.; MADHAV, M. R.; IYENGAR, N. G. R. *A new model for nonlinear subgrades*. Mathematical Modelling, v. 8, p. 513-518, 1987.

43. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-6122: Projeto e Execução de Fundações*. Rio de Janeiro, 2022.
44. NAVAL FACILITIES ENGINEERING COMMAND. *NAVFAC DM-7.01: Soil Mechanics Design Manual 7.01*. Alexandria, Virginia, USA, 1986.
45. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Suggested Analysis and Design Procedures for Combined Footings and Mats*. ACI 336.2R-88 (Reapproved 2002).
46. CALAVERA, J. *Cálculo de Estructuras de Cimentación*. Instituto Técnico de Materiales y Construcciones, 4ª edición, Madrid, 2000.
47. SCUËLLER, G. I.; SHINOZUKA, M. *Stochastic Methods in Structural Dynamics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1987.
48. ANG, A. H-S; TANG, W. H. *Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Volume I: Basic Principles*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.
49. HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.
50. COMITÉ EUROPEU DE NORMALIZAÇÃO. NP EN 1990. *Eurocódigo: Base para o projecto de estruturas*. Dez., 2009.
51. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-8681: Ações e Segurança nas Estruturas*. Rio de Janeiro, 2003.
52. ARAÚJO, J. M.; AWRUCH, A. M. *Análise Estrutural Probabilística pelo Método dos Elementos Finitos*. Caderno Técnico CT-104, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1992. Disponível em <www.editoradunas.com.br/dunas/CT104.pdf>.
53. ANG, A. H-S; TANG, W. H. *Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Volume II: Decision, Risk and Reliability*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

54. ARAÚJO, J. M. *Probabilistic analysis of reinforced concrete columns*. Advances in Engineering Software. Vol. 32, No. 12, p. 871-879, Dec. 2001.
55. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-12655: Concreto de Cimento Portland: Preparo, controle, recebimento e aceitação*. Rio de Janeiro, 2015.
56. ARAÚJO, J. M. *Análise probabilística de vigas de concreto armado. Parte 1: Avaliação das deformações*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n. 42, p. 19-24, Lisboa, Set., 1997.
57. ARAÚJO, J. M. *Análise probabilística de vigas de concreto armado. Parte 2: Avaliação da segurança*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n. 43, p. 35-39, Lisboa, Fev., 1998.
58. RATNAMUDIGEDARA, P. *Crack spacing, crack width and tension stiffening effect in reinforced concrete beams and one-way slabs*. PhD Doctorate Thesis, School of Engineering, Griffith University, Queensland, Australia, 2003.
59. CARINO, N. J.; CLIFTON, J. R. *Prediction of cracking in reinforced concrete structures*. Building and Fire Research Laboratory, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, USA, 1995.
60. STANDARDS AUSTRALIA COMMITTEE BD-002. *Australian Standard AS 3600: Concrete Structures*. Sydney, Australia, 2018.

Editora Dunas
Rua Tiradentes, 105 – Bairro Cidade Nova
96211-080 Rio Grande – RS
www.editoradunas.com.br
e-mail: contato@editoradunas.com.br