

Avaliação dos métodos simplificados para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis

Evaluation of the simplified methods for calculation of solid slabs supported on flexible beams

José Milton de Araújo

Escola de Engenharia da FURG – Rio Grande, RS

e-mail: ed.dunas@mikrus.com.br

RESUMO: Neste trabalho são estudados quatro métodos para análise de pavimentos de concreto armado, formados por vigas e lajes maciças. O método dos elementos finitos (MEF) é empregado para fazer uma análise acoplada do sistema laje-vigas. Os resultados obtidos com o MEF são utilizados para a aferição de três métodos simplificados. Um método simplificado, de fácil emprego em projetos estruturais, é proposto e tem seus resultados confirmados pelo MEF.

ABSTRACT: In this work we studied four methods for analysis of reinforced concrete floors, constituted by beams and solid slabs. The finite elements method (FEM) is used to accomplish a coupled analysis of the slab-beam system. The results obtained with FEM are used for verification of three simplified methods. A simplified method, of easy employment in structural design, it is proposed and has its results confirmed by FEM.

1. INTRODUÇÃO

O cálculo dos esforços solicitantes nos pisos de concreto armado, formados por vigas e lajes maciças, é uma das tarefas de maior complexidade dentro do projeto estrutural dos edifícios. Isto se deve à interação entre esses dois elementos estruturais, o que possibilita a redistribuição de esforços conforme a rigidez relativa dos mesmos. A rigor, somente através de uma análise não-linear podem-se obter resultados precisos, apesar de que esses resultados também são dependentes dos valores adotados para os parâmetros do modelo não-linear. Além disso, é sempre possível questionar a validade do próprio modelo não-linear.

Não existe “a solução exata” para o problema, pois os resultados dependem da rigidez estabelecida para os elementos estruturais. Desse modo, os resultados obtidos com um software sofisticado podem ser totalmente irrealistas, dependendo dos valores de rigidez adotados como dados de entrada. É certo que o software sempre garantirá o equilíbrio da estrutura como um todo, porém as redistribuições de esforços entre vigas e

lajes podem ser incompatíveis com sua capacidade de acomodação plástica, o que tornará a estrutura inadequada.

Assim, antes de utilizar um software sofisticado para a realização de projetos estruturais, é imprescindível que o projetista entenda o funcionamento da estrutura, o que se consegue com a adoção de modelos simples. Esses modelos simplificados têm sido utilizados desde os primórdios do projeto estrutural e têm sido comprovados na prática, através do projeto de estruturas que foram construídas e se mantiveram seguras e em bom funcionamento durante toda a sua vida útil.

A questão fundamental no projeto de um pavimento de concreto armado consiste no atendimento aos dois requisitos: a solução não deve se afastar muito da solução elástica, para garantir um bom funcionamento da estrutura em serviço; o equilíbrio do pavimento como um todo deve ser garantido. Qualquer método simplificado que atenda a esses dois requisitos pode ser utilizado para projetar os pisos de edifícios de concreto armado.

Neste trabalho são estudados quatro métodos para análise de pavimentos de concreto armado, formados por vigas e lajes maciças. O método dos elementos finitos (MEF), tido como o método de referência, é empregado para validar ou para invalidar os três métodos simplificados.

2. EXEMPLO 1 – PAVIMENTO COM QUATRO LAJES QUADRADAS

Neste primeiro exemplo, considera-se o piso de um edifício residencial, formado por quatro lajes quadradas, conforme está indicado na fig. 1. O pavimento é formado por 4 lajes, apoiadas em 6 vigas, as quais são apoiadas em 9 pilares. As lajes possuem vãos de cálculo $l_x = l_y = 5$ m.

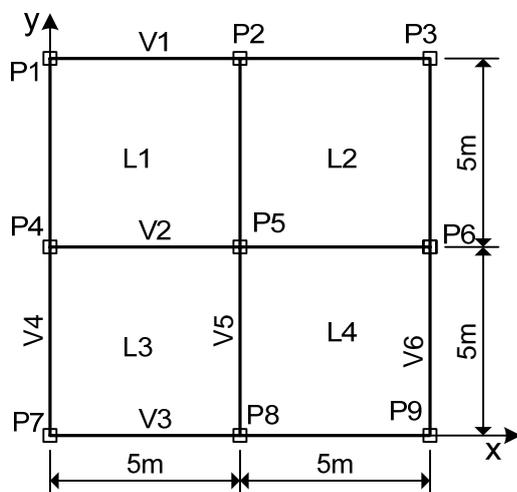


Fig. 1 – Pavimento do exemplo 1

Os seguintes dados são considerados para o cálculo do pavimento:

- carga uniforme nas lajes: $p = 5 \text{ kN/m}^2$
- espessura das lajes: $h = 10 \text{ cm}$
- seção transversal de todas as vigas: largura $b = 20 \text{ cm}$; altura $h = 50 \text{ cm}$ (seção retangular)
- carga adicional sobre as vigas, decorrente do peso próprio e de uma parede: $\Delta p = 7 \text{ kN/m}$
- concreto: resistência característica $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$; módulo secante $E_{cs} = 28520 \text{ MPa}$; coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$; coeficiente de fluência $\phi = 0$ (fluência desconsiderada na análise).

2.1 – Cálculo tradicional por meio de tabelas

No cálculo tradicional, as lajes são isoladas, considerando-se um engaste perfeito onde há

continuidade com a laje vizinha. Nesse caso, o pavimento é tratado como quatro lajes isoladas, como indicado na fig. 2.

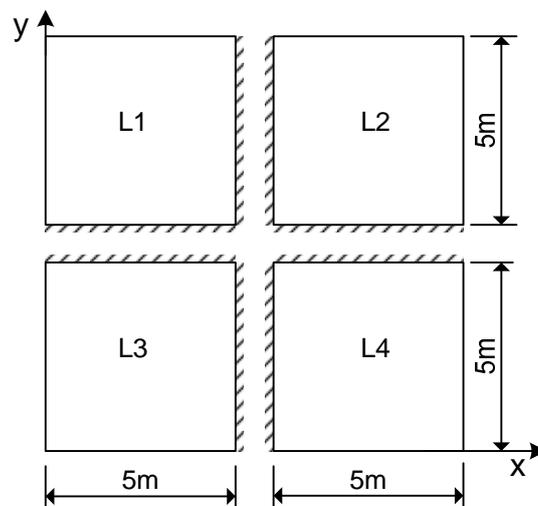


Fig. 2. – Separação das lajes para a realização do cálculo tradicional

Os esforços e a flecha das lajes podem ser obtidos com o emprego da Tabela A2.4, constante no Volume 2 da referência [1]. Utilizando a tabela, obtêm-se os seguintes resultados:

- flecha no centro das lajes: $W_o = 2,65 \text{ mm}$
- momento fletor positivo no centro das lajes, segundo a direção x: $M_x = 3,51 \text{ kNm/m}$
- momento fletor positivo no centro das lajes, segundo a direção y: $M_y = 3,51 \text{ kNm/m}$
- momento negativo nas ligações L1-L2 e L3-L4, segundo a direção x: $M_{xe} = -8,46 \text{ kNm/m}$
- momento negativo nas ligações L1-L3 e L2-L4, segundo a direção y: $M_{ye} = -8,46 \text{ kNm/m}$
- momento torçor nos cantos simplesmente apoiados: $M_{xy} = \pm 3,33 \text{ kNm/m}$.

2.2 – Análise integrada do pavimento, empregando o método dos elementos finitos

O pavimento da fig. 1 também é analisado com o emprego de um programa de elementos finitos. Nessa formulação, as lajes são discretizadas em elementos finitos isoparamétricos quadráticos de 8 nós, conforme descrito nas referências [2,3]. A formulação do elemento é baseada na teoria de placas de Mindlin. As vigas são discretizadas com elementos finitos de três nós, formulados com base

na teoria de vigas de Timoshenko, conforme descrito na referência [4].

A análise é elástica linear, onde se considera que as lajes estão no estágio I. Para as vigas, consideram-se duas situações: vigas no estágio I, com rigidez à flexão $E_{cs}I$, e vigas no estágio II com uma rigidez reduzida $0,4E_{cs}I$, conforme sugerido na NBR-6118[5], onde I é o momento de inércia da seção de concreto simples.

Além disso, são feitas duas considerações quanto à rigidez à torção das vigas: vigas sem rigidez à torção e vigas com rigidez à torção GJ , onde $G = 0,5E_{cs}$ é o módulo de elasticidade transversal e a constante de torção J é dada por

$$J = \alpha hb^3 \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{1}{3} - 0,21 \left(\frac{b}{h} \right) \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{b}{h} \right)^4 \right] \quad (2)$$

sendo $h > b$, as dimensões da seção da viga, conforme a referência [6].

Na formulação do método dos elementos finitos, considera-se o efeito da excentricidade e entre o eixo da viga e o plano médio da laje, como indicado na fig. 3.

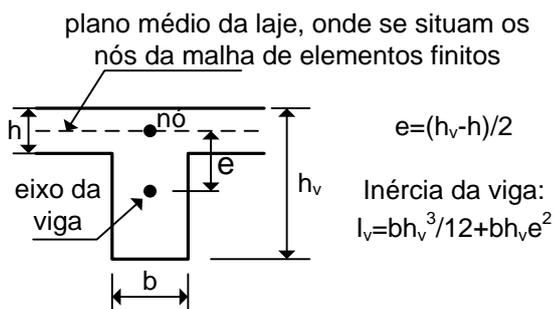


Fig. 3 – Efeito da excentricidade do eixo da viga

Na fig. 4, apresenta-se a discretização da laje em elementos finitos. A malha é formada por 100 elementos de placa e 60 elementos de viga.

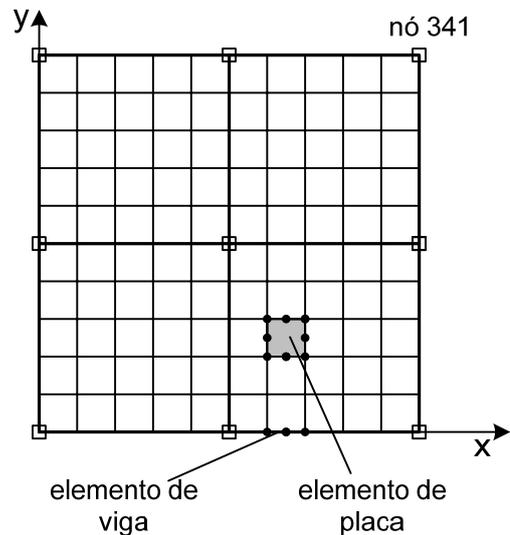


Fig. 4 – Malha de elementos finitos

A) Resultados para vigas sem rigidez à torção

Na fig. 5, apresenta-se a variação dos momentos fletores na laje, segundo a direção x , obtidos considerando-se a rigidez $0,4E_{cs}I$ para as vigas.

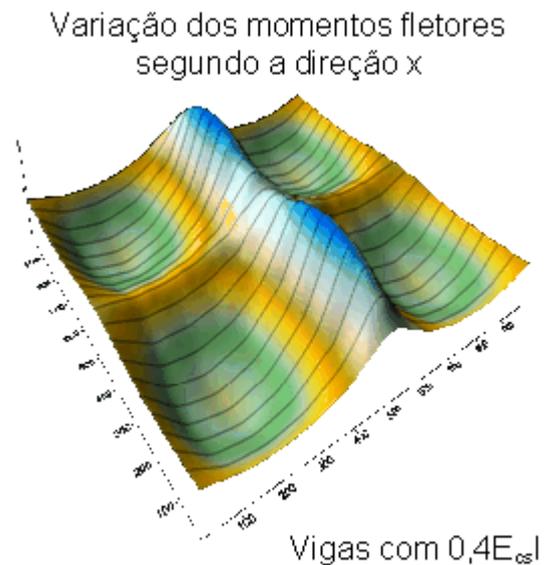


Fig. 5 – Momentos fletores segundo a direção x

Na fig. 6, apresentam-se as variações do momento negativo M_{xe} nas ligações L1-L2 e L3-L4, em função da coordenada y . Esses momentos são obtidos nos pontos de integração que se situam em uma linha paralela o eixo da viga V5 e dela distante 11 cm, aproximadamente. Ou seja, os momentos negativos são avaliados nas faces da viga V5.

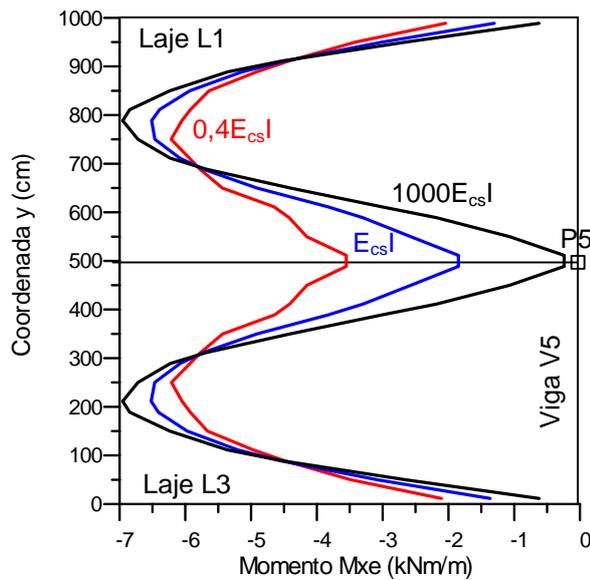


Fig. 6 – Variação do momento negativo em função da rigidez das vigas de apoio

Conforme se observa na fig. 6, a função $M_{xe}(y)$ sofre grandes variações conforme se altera a rigidez das vigas de apoio.

Do ponto de vista do projeto estrutural, é conveniente determinar um momento negativo médio ao longo da viga V5. Assim, as armaduras negativas da laje podem ser dimensionadas para esse momento médio e podem ser distribuídas uniformemente ao longo de todo o bordo onde há continuidade entre duas lajes. O momento médio é dado por

$$\bar{M}_{xe} = \frac{1}{l} \int_0^l M_{xe}(y) dy \quad (3)$$

onde $l = 500$ cm é o comprimento do bordo comum de cada laje, neste exemplo.

Na tabela 1, apresentam-se os resultados obtidos com o método dos elementos finitos (MEF) e com o cálculo tradicional, já discutido. A flecha W_o é dada em mm e os momentos são dados em kNm/m.

Conforme se observa pela tabela 1, o cálculo tradicional subestima a flecha e os momentos fletores positivos na laje. Por outro lado, o cálculo tradicional superestima os momentos negativos e os momentos torçores nos cantos simplesmente apoiados.

A armadura positiva da laje, se dimensionada para o momento de 3,51 kNm/m, corresponderia a apenas 80% da armadura necessária para o

momento de 4,38 kNm/m. Isto fará com que a região central da laje atinja o estado limite último para cargas pouco maiores que as cargas de serviço. Mesmo que haja redistribuição de esforços para manter o equilíbrio, a fissuração da laje poderá ser inaceitável.

A flecha $W_o = 2,65$ mm, obtida com o cálculo tradicional, corresponde a apenas 63% da flecha $W_o = 4,20$ mm, obtida com o MEF.

Tabela 1 – Resultados para vigas sem rigidez à torção

| Resultado | Tradicional | MEF | |
|-------------------------------|-------------|------------|--------------|
| | | $E_{cs}I$ | $0,4E_{cs}I$ |
| W_o | 2,65 | 3,45 | 4,20 |
| $M_x = M_y$ | 3,51 | 4,10 | 4,38 |
| $M_{xe} = M_{ye}$ | -8,46 | -6,52 | -6,22 |
| $\bar{M}_{xe} = \bar{M}_{ye}$ | | -4,52 | -4,87 |
| M_{xy} | $\pm 3,33$ | $\pm 3,06$ | $\pm 2,88$ |

B) Resultados para vigas com rigidez à torção

Na tabela 2, apresentam-se os resultados obtidos quando se considera a rigidez à torção das vigas, dada pela equação (1). Neste caso, considera-se que a rigidez à flexão das vigas é $0,4E_{cs}I$.

Tabela 2 – Resultados para vigas com rigidez à torção

| Resultado | MEF | |
|-------------------------------|------------|-------------|
| | $GJ = 0$ | $GJ \neq 0$ |
| W_o | 4,20 | 3,86 |
| $M_x = M_y$ | 4,38 | 3,97 |
| $M_{xe} = M_{ye}$ | -6,22 | -5,76 |
| $\bar{M}_{xe} = \bar{M}_{ye}$ | -4,87 | -4,53 |
| M_{xy} | $\pm 2,88$ | $\pm 1,39$ |
| $M_{xb} = M_{yb}$ | 0 | -1,10 |

Quando se considera a rigidez à torção das vigas, surge um momento fletor negativo nas bordas de extremidade da laje. O valor máximo desse momento, em valor absoluto, é M_{xb} , nos

apoios em V4 e V6, e M_{yb} , nos apoios em V1 e V3. Em virtude da dupla simetria do pavimento, resulta $M_{xb} = M_{yb}$.

Observando a tabela 2, verifica-se que os resultados sofrem uma alteração desprezível, quando se considera a rigidez à torção das vigas. De fato, as vigas de seção retangular, com as dimensões usualmente adotadas nos edifícios ($h \gg b$), possuem uma rigidez à torção muito pequena. Observa-se, também, que os momentos negativos nos apoios de extremidade são muito pequenos, não havendo necessidade de uma armadura negativa nessa região, a menos em casos excepcionais de vigas de grande rigidez à torção.

Outra conclusão a que se chega pela tabela 2 é que o momento torçor nos cantos simplesmente apoiados é pequeno ($M_{xy} = \pm 1,39 \text{ kNm/m}$). Esse momento é bem inferior ao momento de fissuração da laje, mesmo considerando uma resistência à tração reduzida para o concreto, $f_{ctd} = f_{ctk,inf} / 1,4$. Com isso, pode-se concluir que, nos casos usuais, é possível omitir as denominadas armaduras de canto.

2.3 – Cálculo alternativo proposto

Com base nos resultados apresentados anteriormente, conclui-se que o mais indicado é sempre fazer uma análise acoplada do pavimento como um todo, onde são incluídas as lajes e as vigas, simultaneamente. O cálculo tradicional, engastando-se as lajes onde há continuidade e empregando as tabelas da teoria de placas não fornece valores confiáveis para os esforços solicitantes nas lajes apoiadas em vigas flexíveis. Esse modelo simplificado só deve ser usado para analisar lajes apoiadas em paredes ou em vigas de grande rigidez à flexão.

Entretanto, é possível utilizar as tabelas da teoria de placas e encontrar uma solução satisfatória, quando não se dispõe de um programa de elementos finitos para a análise do pavimento como um todo. Neste caso, adota-se o seguinte procedimento:

- consideram-se todas as lajes simplesmente apoiadas, para efeito de cálculo dos momentos positivos, flecha e reações de apoio; para isto, pode-se empregar a tabela A2.1 da referência [1], para o caso de carga uniforme;

- em um bordo comum (apoio interno), adota-se um momento negativo de valor absoluto igual ao do maior momento positivo das duas lajes adjacentes, na direção considerada;
- as armaduras de canto e as armaduras negativas nos bordos de extremidade podem, em geral, ser omitidas.

Na tabela 3, apresentam-se os resultados obtidos com esse modelo simplificado e com o MEF.

Tabela 3 – Resultados para vigas sem rigidez à torção

| Resultado | Modelo proposto | MEF com $GJ = 0$ e $0,4E_{cs}I$ |
|-------------------------------|-----------------|---------------------------------|
| W_o | 5,12 | 4,20 |
| $M_x = M_y$ | 5,53 | 4,38 |
| $\bar{M}_{xe} = \bar{M}_{ye}$ | -5,53 | -4,87 (ou -6,22) |

Observando a tabela 3, verifica-se que o modelo proposto fornece uma solução a favor da segurança, havendo uma boa concordância com o MEF.

3. EXEMPLO 2 – PAVIMENTO COM QUATRO LAJES DESIGUAIS

Neste exemplo, considera-se o piso indicado na fig. 7, onde se observa que há duas lajes quadradas e duas lajes retangulares, armadas em uma direção (relação entre os vãos $7/3 > 2$).

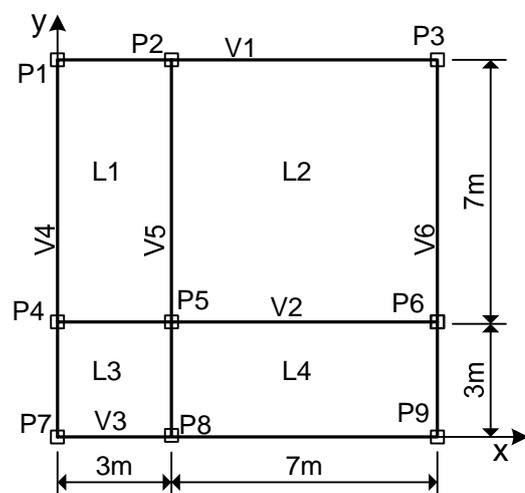


Fig. 7 – Pavimento do exemplo 2

3.1 – Análise integrada do pavimento, empregando o método dos elementos finitos

Na análise pelo MEF, considera-se a rigidez $0,4E_{cs}I$ para as vigas e despreza-se sua rigidez à torção.

Na fig. 8, indicam-se os momentos fletores máximos positivos em cada laje, com o sentido de colocação das armaduras correspondentes.

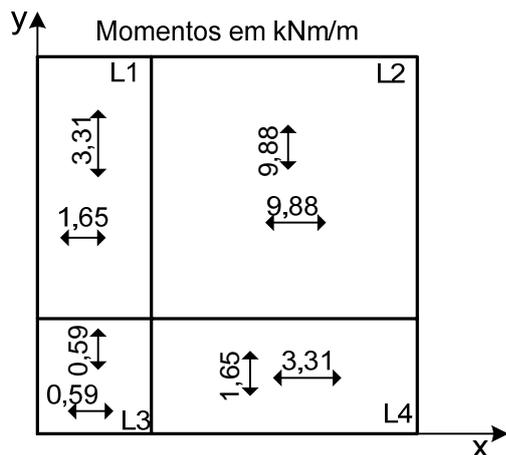


Fig. 8 – Momentos máximos positivos nas lajes obtidos com o MEF

Conforme se observa na fig. 8, nas lajes L1 e L4, os momentos positivos são maiores segundo a direção do maior vão, o que contraria os resultados do método tradicional de cálculo. Isto ocorre porque a flexão da viga V5 impõe uma grande curvatura à laje L1, segundo a direção y. Do mesmo modo, a flexão da viga V2 faz com que a laje L4 apresente uma maior curvatura segundo a direção x.

Uma vez que os métodos tradicionais de cálculo consideram os apoios das lajes indeformáveis (a condição de contorno $w=0$ é introduzida na solução da equação diferencial da placa), eles vão sempre indicar um maior momento fletor segundo a direção do vão menor da laje.

Assim, se esse pavimento for calculado pelos métodos tradicionais, deve-se esperar uma significativa redistribuição de esforços entre as lajes e as vigas para a manutenção do equilíbrio. Felizmente, as lajes de concreto armado possuem uma grande capacidade de redistribuição de esforços, o que garante a segurança do cálculo tradicional. Entretanto, não será surpresa se as lajes L1 e L4 apresentarem fissuras

perpendiculares aos vãos maiores, em sua face inferior.

Deve-se observar que o momento correspondente à armadura mínima, para uma laje com $h=10$ cm, $f_{ck}=30$ MPa e aço CA-60, é $M_{k,min}=4,07$ kNm/m, conforme a tabela 4.4.2 do Volume 2 da referência [1]. Logo, se for respeitada a armadura mínima nas duas direções das lajes L1 e L4, essa armadura será suficiente para corrigir os erros de cálculo dos métodos tradicionais. Essa exigência, inclusive, é feita pelo BS 8110:1997 (norma britânica para projeto de estruturas de concreto, conforme [7]).

Assim, ao contrário do que está indicado na NBR-6118 [5], é recomendável que as armaduras de distribuição das lajes armadas em uma direção também respeitem a armadura mínima.

Na fig. 9, indicam-se os momentos negativos mínimos nos bordos comuns das lajes. Os valores entre parêntesis correspondem aos momentos negativos médios, calculados de forma similar à equação (3).

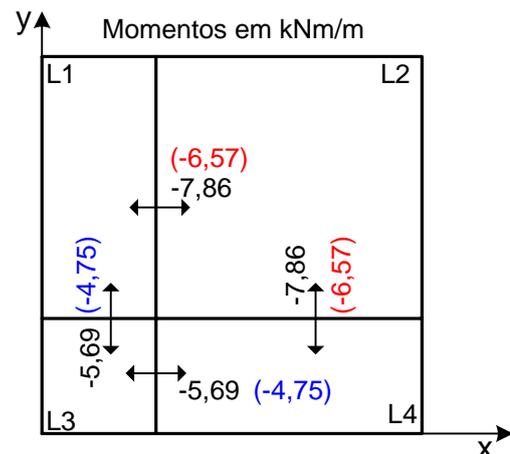


Fig. 9 – Momentos negativos mínimos e médios obtidos com o MEF

A flecha máxima do pavimento ocorre na laje L2 e vale $W_o = 21,67$ mm.

Salienta-se que, em um projeto real, haveria necessidade de aumentar a espessura dessa laje para atender as exigências relativas ao estado limite de deformações excessivas. Isto é necessário, pois a flecha final da laje, incluindo a fluência do concreto, será muito superior à flecha admissível.

Entretanto, esse fato não altera as conclusões a que se pretende chegar, de modo que será mantida a espessura original de todas as lajes do pavimento.

3.2 – Resultados obtidos com o cálculo alternativo proposto

Empregando o cálculo simplificado proposto, todas as lajes são consideradas simplesmente apoiadas. As lajes L2 e L3 são lajes armadas em cruz, podendo ser calculadas através da tabela A2.1 da referência [1]. As lajes L1 e L4 são armadas em uma direção, sendo calculadas como uma viga biapoiada, segundo a direção do vão menor. O momento fletor segundo a direção do vão maior não é calculado; para essa direção, adota-se uma armadura de distribuição, respeitando-se a armadura mínima.

Utilizando a tabela A2.1 para calcular a flecha no centro da laje L2, resulta $W_o = 19,69$ mm. Observa-se que, mesmo considerando a laje simplesmente apoiada, resulta uma flecha igual a 90% da flecha obtida com o MEF. Isto demonstra bem o efeito das deformações das vigas de apoio sobre as flechas das lajes. Conclui-se que, ao comparar a flecha das lajes, obtida por meio das tabelas da teoria de placas, com a flecha admissível, deve-se ter uma boa folga, pois na verdade a flecha total da laje será maior por causa das deformações das vigas de apoio.

Se a laje L2 fosse calculada pelo método tradicional, considerando engaste perfeito nas ligações com as lajes L1 e L4, e empregando a tabela A2.4 [1], seriam obtidos os seguintes resultados:

- flecha $W_o = 10,18$ mm
- momentos negativos:
 $M_{xe} = M_{ye} = -16,59$ kNm/m
- momentos positivos: $M_x = M_y = 6,88$ kNm/m

Observa-se que, neste caso, os resultados seriam totalmente incoerentes.

Na fig. 10, apresentam-se os momentos fletores obtidos com o modelo simplificado proposto: cálculo de todas as lajes como simplesmente apoiadas, adotando-se um negativo cujo módulo é igual ao momento máximo positivo das lajes adjacentes, na direção considerada. Onde o momento resultou menor que o momento mínimo $M_{k,min} = 4,07$ kNm/m, esse valor foi adotado.

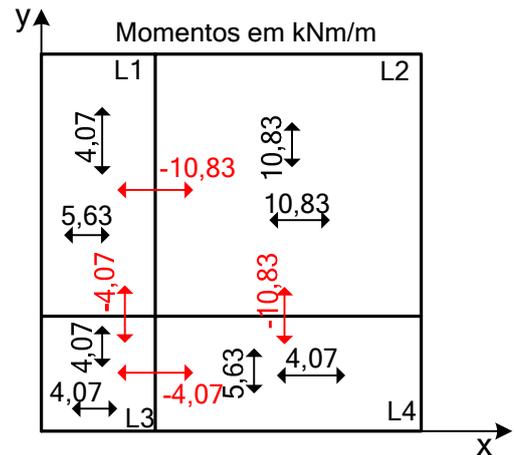


Fig. 10 – Momentos fletores obtidos com o modelo simplificado proposto

Comparando as figuras 8 e 9 com a figura 10, verifica-se que o cálculo simplificado proposto concorda satisfatoriamente com o MEF.

As reações de apoio das lajes armadas em cruz (lajes L2 e L3) são obtidas com a tabela A2.1. As reações de apoio das lajes L1 e L4 são obtidas por meio da teoria das linhas de ruptura, conforme o capítulo 1 do Volume 2 [1]. Essas reações são consideradas uniformemente distribuídas, apesar de esta não ser a distribuição correta das reações de apoio das lajes. Superpondo as reações das lajes com a carga adicional de 7,00 kN/m, obtém-se o carregamento das vigas, conforme está indicado na fig. 11.

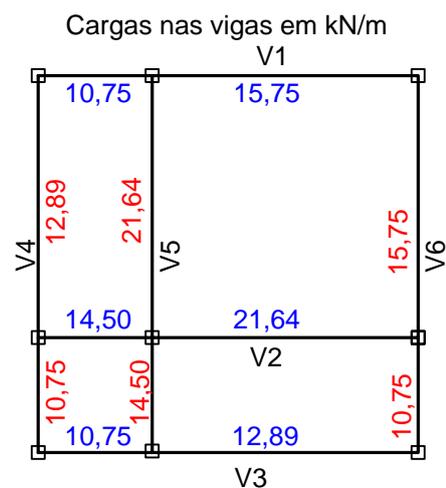


Fig. 11 – Carregamento das vigas de acordo com o cálculo simplificado proposto

4. EXEMPLO 2 – COMPROVAÇÃO DO EQUILÍBRIO DO SISTEMA

Para comprovar o equilíbrio do pavimento, pode-se comparar o momento total solicitante, devido às cargas aplicadas nas lajes e nas vigas, com o momento total resistente, obtido com o modelo simplificado.

O momento total solicitante no pavimento, em uma dada direção, pode ser obtido analisando uma viga contínua segundo essa direção, submetida à carga total que atua nas lajes e em todas as vigas da direção considerada.

Por exemplo, considerando as 3 vigas da direção x (V1, V2 e V3), ambas submetidas à carga de 7kN/m, mais a carga de 5 kN/m², distribuída sobre as lajes, obtém-se a seguinte carga total:

- carga nas 3 vigas: $3 \times 7 = 21 \text{ kN/m}$;
- carga total nas lajes: $10 \times 5 = 50 \text{ kN/m}$, onde se observa que a carga distribuída foi multiplicada pela largura 10 m do pavimento;
- carga total: $21 + 50 = 71 \text{ kN/m}$

Na fig. 12, apresenta-se a viga contínua com a carga total e o diagrama de momentos fletores totais solicitantes, segundo a direção x. Em virtude da simetria, os resultados são os mesmos para a direção y.

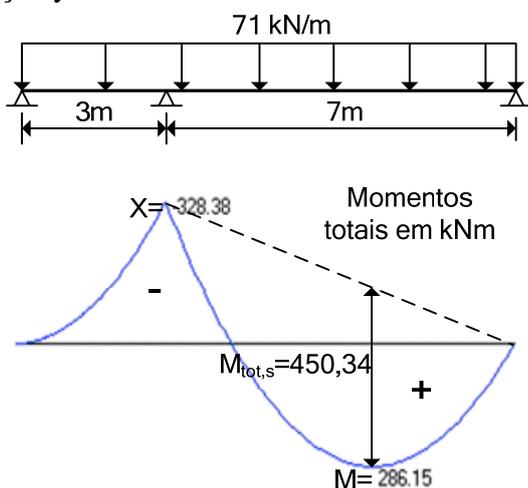


Fig. 12 – Momentos totais solicitantes no pavimento segundo a direção x

Os momentos totais resistentes são obtidos resolvendo-se as três vigas contínuas (V1, V2 e V3) para as cargas dadas na fig. 11. Os momentos negativos X , sobre os apoios internos, e os momentos positivos M , nos vãos maiores das vigas, são dados na tabela 4.

Tabela 4 – Contribuição das vigas V1, V2 e V3 para o momento resistente

| Viga | X (kNm) | M (kNm) |
|------|-----------|-----------|
| V1 | -71,16 | 64,17 |
| V2 | -97,68 | 88,20 |
| V3 | -58,89 | 52,25 |
| Soma | -227,73 | 204,62 |

A contribuição de cada laje para o momento resistente é obtida multiplicando-se os momentos fletores segundo a direção x, dados na fig. 10, pela largura da laje na direção y.

Assim, o momento negativo resistente é dado por $-10,83 \times 7 - 4,07 \times 3 = -88,02 \text{ kNm}$. Somando esse valor com $-227,73 \text{ kNm}$, correspondente à contribuição das três vigas, resulta $X = -315,75 \text{ kNm}$.

O momento positivo resistido pela laje L2, segundo a direção x, é igual a $10,83 \times 7 = 75,81 \text{ kNm}$. A laje L4 resiste a $4,07 \times 3 = 12,21 \text{ kNm}$. Logo, o momento total resistido pelas duas lajes é $75,81 + 12,21 = 88,02 \text{ kNm}$.

Somando a contribuição das lajes L2 e L4 com a contribuição das vigas V1, V2 e V3, resulta $M = 88,02 + 204,62 = 292,64 \text{ kNm}$.

Na fig. 13, apresenta-se o diagrama de momentos resistentes do pavimento.

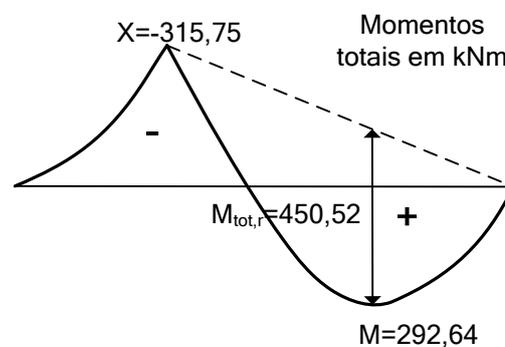


Fig. 13 – Momentos totais resistentes do pavimento segundo a direção x

Comparando as figuras 12 e 13, observa-se uma total concordância entre os dois diagramas. Isto mostra que o sistema laje-viga, projetado de acordo com o procedimento simplificado proposto, satisfaz o equilíbrio dos momentos totais, mesmo considerando que as reações de apoio das lajes são uniformemente distribuídas sobre as vigas.

Este é um ponto de discussão, uma vez que a consideração das reações uniformemente distribuídas pode levar a uma solução contrária à segurança para o projeto das vigas. Isto é verdade

quando as vigas são rígidas, situação que permite calcular as lajes pelo processo tradicional descrito na seção 2.1.

Entretanto, se as lajes são calculadas com o procedimento proposto, para simular o efeito das deformações das vigas de apoio, pode-se considerar que as reações de apoio das lajes são uniformemente distribuídas para o cálculo das vigas. De fato, a solução com o MEF mostra que essas reações tendem a se uniformizar quando as vigas são menos rígidas.

Além disso, no projeto estrutural de um edifício há sempre alguma margem de segurança adicional, decorrente da superavaliação do carregamento. Por exemplo, o peso das alvenarias pode ser superestimado ao não se dar os descontos correspondentes às aberturas de portas e janelas. A carga das paredes também não é uniformemente distribuída sobre as vigas, como se considera no projeto. Essas cargas tendem a se concentrar mais nas extremidades dos vãos, junto aos pilares de apoio, o que contribui para reduzir os momentos solicitantes nas vigas.

5. EXEMPLO 2 – CÁLCULO ALTERNATIVO PELO MODELO DA VIGA EQUIVALENTE

O mesmo pavimento do exemplo 2 será calculado empregando-se um modelo similar ao método dos pórticos virtuais, recomendado pelo ACI [8]. Entretanto, as seguintes adaptações são consideradas:

- calculam-se as reações de apoio das lajes da forma usual e faz-se a superposição com as cargas aplicadas diretamente sobre as vigas para obter as cargas totais nas vigas; essas cargas são indicadas na fig. 11;

- resolvem-se as vigas para a obtenção dos seus esforços solicitantes, da forma usual;

- divide-se o pavimento em faixas segundo as duas direções ortogonais, cada faixa acompanhando um alinhamento de pilares; as faixas para a direção x são apresentadas na fig. 14;

- calculam-se os momentos solicitantes totais em cada faixa, resolvendo-se uma viga contínua equivalente submetida ao carregamento total contido dentro da largura da faixa;

- as diferenças entre os momentos totais na faixa e os momentos fletores obtidos para a viga são distribuídos para os trechos de laje dentro da faixa.

A) Cálculo da faixa 1

A carga total na faixa 1 é dada por $7+5 \times 3,5=24,5$ kN/m, onde foi somada a carga de 7 kN/m atuando na viga V1 com a carga sobre a laje, dentro da faixa.

Resolvendo a viga contínua para essa carga total, obtém-se um diagrama de momentos fletores semelhante ao da fig. 12. Os momentos de referência são:

- negativo sobre o apoio: $X = -113,31$ kNm
- positivo no segundo vão: $M = 98,74$ kNm

Os momentos correspondentes à viga V1 são $X = -71,16$ kNm e $M = 64,17$ kNm, conforme a tabela 4. Logo, o que está faltando para chegar ao momento total deve ser resistido pelo trecho de laje dentro da faixa 1. Assim, os momentos por unidade de comprimento a serem transferidos para esse trecho de laje com 3,5 m de largura são:

- momento negativo na ligação L1-L2:
 $-(113,31 - 71,16)/3,5 = -12,04$ kNm/m;
- momento positivo na laje L2:
 $(98,74 - 64,17)/3,5 = 9,88$ kNm/m.

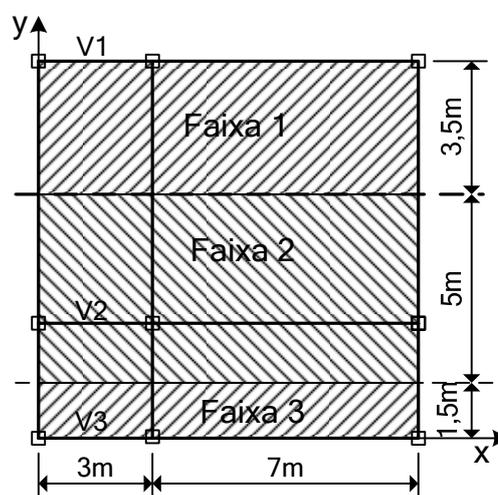


Fig. 14 – Faixas para cálculo dos momentos fletores segundo a direção x

B) Cálculo da faixa 2

A carga total na faixa 2 é dada por $7+5 \times 5=32$ kN/m, onde foi somada a carga de 7 kN/m atuando na viga V2 com a carga sobre a laje, dentro da faixa.

Resolvendo a viga contínua, obtêm-se os momentos de referência :

- negativo sobre o apoio: $X = -148,00$ kNm
- positivo no segundo vão: $M = 128,97$ kNm

Os momentos correspondentes à viga V2 são $X = -97,68$ kNm e $M = 88,20$ kNm, conforme a tabela 4. Logo, o que está faltando para chegar ao momento total deve ser resistido pelo trecho de laje dentro da faixa 2. Assim, os momentos por unidade de comprimento a serem transferidos para esse trecho de laje com 5 m de largura são:

- momento negativo nas ligações L1-L2 e L3-L4:
 $-(148,00 - 97,68)/5 = -10,06$ kNm/m;

- momento positivo nas lajes L2 e L4:
 $(128,97 - 88,20)/5 = 8,15$ kNm/m.

C) Cálculo da faixa 3

A carga total na faixa 3 é dada por $7+5 \times 1,5=14,5$ kN/m, onde foi somada a carga de 7 kN/m atuando na viga V3 com a carga sobre a laje, dentro da faixa.

Resolvendo a viga contínua, obtêm-se os momentos de referência :

- negativo sobre o apoio: $X = -67,06$ kNm
- positivo no segundo vão: $M = 58,44$ kNm

Os momentos correspondentes à viga V3 são $X = -58,89$ kNm e $M = 52,25$ kNm, conforme a tabela 4. Logo, o que está faltando para chegar ao momento total deve ser resistido pelo trecho de laje dentro da faixa 3. Assim, os momentos por unidade de comprimento a serem transferidos para esse trecho de laje com 1,5 m de largura são:

- momento negativo na ligação L3-L4:
 $-(67,06 - 58,89)/1,5 = -5,45$ kNm/m;

- momento positivo na laje L4:
 $(58,44 - 52,25)/1,5 = 4,13$ kNm/m.

Na fig. 15, indicam-se os momentos fletores nas faixas de lajes, obtidos com esse procedimento. Os valores entre parêntesis correspondem à média dos dois valores obtidos para cada laje.

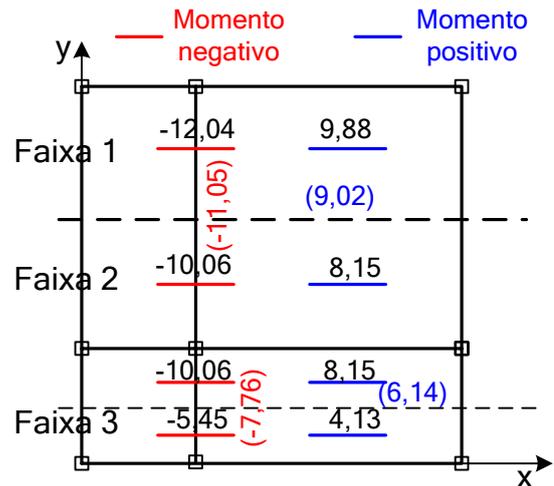


Fig. 15 – Momentos fletores nas lajes, obtidos com o processo da viga equivalente

Comparando os resultados obtidos com o MEF (figuras 8 e 9), com o processo simplificado proposto (figura 10) e com o método da viga equivalente (fig. 15), conclui-se que os três métodos fornecem resultados parecidos. As diferenças detectadas não têm importância prática, devido às redistribuições de esforços que ocorrerão na estrutura real.

Além disso, nos três casos pode-se garantir que o momento total resistente supere o momento total solicitante, ainda mais tendo em vista as considerações feitas sobre a distribuição das cargas de parede sobre as vigas. Logo, o pavimento pode ser armado com base na distribuição de momentos fletores obtidos com qualquer um dos modelos: MEF, modelo proposto e modelo da viga equivalente.

A única distribuição de momentos que não é recomendada é aquela obtida com o procedimento tradicional, que consiste em considerar as lajes isoladas perfeitamente engastadas nas lajes vizinhas. Esse procedimento superestima os momentos negativos e os momentos torçores e subestima os momentos fletores positivos e a flecha das lajes. Essa solução só é adequada para lajes apoiadas em paredes ou em vigas rígidas.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram estudados quatro métodos para análise de pavimentos de concreto armado, formados por vigas e lajes maciças. O método dos elementos finitos (MEF), tido como o método de referência, serviu para validar ou invalidar os métodos simplificados. Do estudo conclui-se que o

tradicional método de cálculo, que consiste em considerar as lajes isoladas perfeitamente engastadas nas lajes vizinhas, não é adequado para a análise de lajes apoiadas em vigas deformáveis. Esse método só é adequado quando as lajes são apoiadas em paredes ou em vigas rígidas.

O método proposto consiste em calcular todas as lajes como simplesmente apoiadas, para a determinação dos momentos fletores positivos, flechas e reações de apoio. O valor absoluto do momento negativo na ligação entre duas lajes é considerado igual ao do maior momento positivo das lajes vizinhas, na direção considerada. Esse método se mostrou compatível com o MEF, além de garantir o equilíbrio do momento total no pavimento.

Por último, foi apresentado o método da viga equivalente, que também pode ser empregado para o cálculo de lajes apoiadas em vigas.

As conclusões obtidas com este trabalho são restritas aos pisos dos edifícios residenciais e de escritórios, com dimensões e carregamentos usuais. Elas não devem ser extrapoladas para outros tipos de estruturas.

REFERÊNCIAS

1. ARAÚJO, J. M. *Curso de Concreto Armado*. 4 v., 2. ed., Rio Grande: Editora Dunas, 2003.
2. ZIENKIEWICZ, O. C. – *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 3. ed., 1977.
3. REAL, M. V. *Análise estática de lajes de concreto armado incluindo não-linearidade física e geométrica*. Dissertação de mestrado, PPGE, UFRGS, Porto Alegre, 1990.
4. ARAÚJO, J. M. *Modelo para análise de vigas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n. 32, p.9-14, Lisboa, julho, 1991.
5. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-6118: Projeto de Estruturas de Concreto*. Rio de Janeiro, 2003.
6. YOUNG, W. C. *Roark's Formulas for Stress and Strain*. New York: McGraw-Hill, 6. ed., 1989.
7. BHATT, P., MACGINLEY, T. J., CHOO, B. S. *Reinforced Concrete. Design Theory and Examples*. New York: Taylor & Francis, 3. ed., 2006.
8. AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *Building Code Requirements for Structural*

Concrete (ACI 318-95) and Commentary (ACI 318R-95). Detroit, 1995.