

Aproximação de Ritz no problema de shear locking

Ritz approximation in the shear locking problem

Arlindo Pires Lopes^{1,2}, Adriana Alencar Santos² & Rogerio Coelho Lopes²

¹ *Portland State University – PSU, Department of Civil and Environmental Engineering, Portland, OR, 97201, United States of America*

lopesa@cecs.pdx.edu

² *Universidade do Estado do Amazonas – UEA, Escola Superior de Tecnologia, Manaus, AM, Brasil*
aasn.eng@uea.edu.br e rlopes@uea.edu.br

RESUMO: A utilização de elementos finitos continua sendo uma aplicação de grande interesse na análise estrutural. Atualmente, existem vários tipos de procedimentos baseados em elementos finitos para resolver problemas práticos da engenharia. O procedimento que envolve o deslocamento como incógnita é o preferido dos pesquisadores e o mais utilizado para a criação de códigos computacionais. Entretanto, o Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser interpretado como uma variação do Método de Rayleigh-Ritz e conseqüentemente pode-se ter como incógnitas as tensões ou deformações. Em qualquer análise numérica existe a possibilidade da ocorrência de erros devido a discretização por elementos finitos que pode convergir rapidamente ou não. Entende-se por shear locking a tendência da solução por elementos finitos ser zero à medida que certos parâmetros tornam-se grandes. No presente trabalho estudam-se alguns conceitos necessários ao entendimento do shear locking e tenta-se explicar porque algumas das discretizações são melhores do que outras. Comparam-se as equações da teoria de viga de Timoshenko com as equações da teoria de viga clássica para discutir a natureza dos erros que aparecem durante a aproximação de Ritz. Estes mesmos erros são responsáveis pelo shear locking encontrado nos modelos de elementos finitos para problemas similares de viga. Os resultados numéricos obtidos são comparados com valores analíticos para ilustrar o problema de shear locking.

ABSTRACT: The use of finite elements represents a great interest in structural analysis. Currently, there are several types of procedures based on finite elements to solve practical engineering. The procedure which involves displacement as unknown is the preferred and most used by researchers to develop computer codes. However, the Finite Element Method (FEM) can be interpreted as a variation of the Rayleigh-Ritz method and have unknowns as stresses or strains. Regardless the numerical analysis there is a possibility of errors due to meshing that can converge quickly or not. Shear locking can be understood as the tendency of the solution to become zero as certain parameters become large. In this work, it is studied some concepts that will lead to the understanding of shear locking and explain why some meshes are better than others. Timoshenko beam equations and classical beam theory are compared to discuss the nature of the errors that appear during the Ritz approximation. These errors are responsible for the shear locking found in the finite element models used in beams. The numerical results are compared with analytical values to illustrate the problem of shear locking.

1. INTRODUÇÃO

No início da década de 1980 as bibliotecas de elementos finitos do tipo C^1 foram substituídas por elementos do tipo C^0 . Os elementos do tipo C^0 foram baseados em teorias clássicas de vigas,

placas e cascas refletindo a experiência adquirida por analistas estruturais ao longo de dois séculos (Bathe, 1996). Estas teorias não consideravam a deformação de cisalhamento transversal e permitiam que as estruturas fossem modeladas definindo a deformação em termos de um campo,

de uma deflexão transversal de um ponto e de uma superfície de placa ou casca. Segundo Hughes (2000) as deformações podem então ser obtidas simplesmente assumindo que a normal da superfície permanece normal após a deformação.

Estas foram algumas das conseqüências do pressuposto assumido tanto para o modelo matemático quanto para a discretização por elementos finitos. Notou-se que para capturar a física da deformação de uma estrutura espessa ou o comportamento de placas e cascas feitas de materiais de alta resistência seria necessário recorrer a teorias que levassem em consideração a deformação de cisalhamento transversal.

Os elementos precisavam apenas funções básicas para satisfazer a continuidade e tais elementos foram denominados requisitos C^0 . Na formulação C^1 a continuidade também é requerida, porém deve-se considerar também a curvatura dos graus de liberdade nos nós. (Park, 1986 e Taylor, 1976).

Quando o shear locking foi encontrado pela primeira vez, esforços foram feitos para associá-los com o rank ou a não-singularidade da matriz de rigidez ligada com o termo de penalidade (por exemplo, a matriz de rigidez de cisalhamento de uma viga de Timoshenko torna-se muito grande à medida que a viga torna-se muito fina). Entretanto, percebe-se que estes fatores são sintomas do problema e não a causa. Desta forma, torna-se necessário verificar a ocorrência desde o início do processo, ou seja, nas hipóteses que foram feitas no processo de discretização. O procedimento de "consistência" diz que é necessário discretizar os campos de penalidade de uma forma consistente onde o comportamento físico da estrutura deve ser preservado. Pode-se mostrar como a teoria da viga de Timoshenko pode ser reduzida à teoria da viga clássica utilizando funções de penalidade e desta maneira, mostrar como a solução aproximada de Ritz é muito sensível à forma como os termos são escolhidos. Uma escolha inconsciente de parâmetros, com baixa ordem de aproximação, leva a uma matriz de rigidez de penalidade que pode causar o shear locking. O procedimento teórico a seguir descrito é baseado no trabalho de Prathap (2001).

2. A TEORIA DA VIGA CLÁSSICA

Considere a deflexão transversal de uma viga engastada livre de comprimento L com uma carga uniformemente distribuída q ao longo da vida. Isto produzirá uma distribuição linear de esforço cortante aumentando de zero na extremidade livre até qL no engaste e o correspondente momento fletor varia de zero até $qL^2/2$. Utilizando-se o que é chamada de teoria clássica ou a teoria de Euler-Bernoulli, pode-se representar este problema pela forma fraca com um funcional quadrático dado por:

$$\Pi = \int_0^L \left(\frac{1}{2} EI w_{,xx}^2 - qw \right) dx \quad (1)$$

Esta teoria pressupõe uma condição de deformação de cisalhamento transversal zero e isto permite que a deformação da viga possa ser descrita inteiramente em termos de uma variável dependente, ou seja, a deflexão transversal w . Uma aplicação do Princípio da Energia Potencial Mínima permite que a equação diferencial governante do problema e as condições de contorno sejam recuperadas, mas isto não será feito no presente estudo. As Eq. (2), (3) e (4) estabelecem que a solução exata que satisfaz as equações diferenciais governantes e as condições de contorno é:

$$w(x) = \left(\frac{qL^2}{4EI} \right) x^2 - \left(\frac{qL}{6EI} \right) x^3 - \left(\frac{q}{24EI} \right) x^4 \quad (2)$$

$$EI w_{,xx} = \left(\frac{q}{2} \right) (L-x)^2 \quad (3)$$

$$EI w_{,xxx} = -q(L-x) \quad (4)$$

Considere agora uma aproximação de Ritz baseada em dois termos, $\bar{w} = b_2 x^2 + b_3 x^3$. A solução aproximada é dada pela Eq. (5), conforme a seguir.

$$\bar{w}(x) = \left(\frac{5qL^2}{24EI} \right) x^2 - \left(\frac{qL}{12EI} \right) x^3 \quad (5)$$

Para o momento fletor e esforço cortante aproximado, tem-se, respectivamente,

$$EI \bar{w}_{,xx} = \left(\frac{5qL^2}{12} \right) - \left(\frac{qL}{2} \right) x \quad (6)$$

$$EI \bar{w}_{,xxx} = -qL/2 \quad (7)$$

Caso as Eq. (2) a (7) sejam escritas em termos de coordenadas naturais no sistema ξ , onde $x = (1 + \xi)L/2$ para que as extremidades da viga sejam representadas por $\xi = -1$ e $\xi = +1$, as soluções exata e aproximada podem ser expandidas como

$$EI w_{,xx} = \left(\frac{qL^2}{8} \right) \left[\frac{4}{3} - 2\xi - \frac{1}{3}(1 - 3\xi^2) \right] \quad (8)$$

$$EI \bar{w}_{,xx} = \left(\frac{qL^2}{8} \right) - \left(\frac{4}{3} - 2\xi \right) \quad (9)$$

Observe que há uma certa diferença entre as respostas exata e aproximada. Porém, o polinômio de Legendre de ordem 2 tende a zero para os pontos $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, fazendo com que a solução aproximada coincida com a solução exata (Zienkiewicz, 1971).

3. A TEORIA DA VIGA DE TIMOSHENKO

A teoria de Timoshenko para vigas oferece uma formulação mais geral, pois considera a deformação de cisalhamento transversal. A descrição do comportamento da viga é melhorada quando são introduzidas duas quantias: a deflexão transversal w e a rotação θ . Assim, a deformação por cisalhamento em cada ponto é dada por $\gamma = \theta - w_{,x}$ (Zienkiewicz, 2000).

A energia funcional de deformação é agora construída a partir das duas funções independentes $w(x)$ e $\theta(x)$ e esta equação é dada por:

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \theta_{,x}^2 + \frac{1}{2} \alpha (\theta - w_{,x})^2 - qw \right] dx \quad (10)$$

onde $k = \theta_{,x}$ representa a curvatura, a deformação de cisalhamento é dada por $\gamma = \theta - w_{,x}$ e $\alpha = KGA$ é a rigidez de cisalhamento. O fator K depende da seção transversal, por exemplo, para uma viga de seção transversal retangular o valor de K é igual a $5/6$.

A teoria da viga de Timoshenko torna-se a teoria da viga clássica a partir do momento em que a viga torna-se muito fina ou quando a rigidez de cisalhamento torna-se muito grande ($\alpha \rightarrow \infty$). Para um valor de α tendendo ao infinito as equações aqui tratadas tornam-se a equação diferencial de quarta ordem da teoria da viga clássica.

3.1 Aproximação de Ritz com dois termos

Considere agora uma aproximação de Ritz com dois termos baseados em $\bar{\theta} = a_1 x$ e $\bar{w} = b_1 x$. A deformação de cisalhamento é dada por

$$\bar{\gamma} = a_1 x - b_1 \quad (11)$$

e indica uma variação linear do esforço cortante. O procedimento variacional de Ritz leva ao seguinte conjunto de equações:

$$\left\{ EI \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} L^3/3 & -L^2/2 \\ -L^2/2 & L \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ qL^2/2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Resolvendo estas equações, tem-se

$$a_1 = \frac{-3qL^2}{12EI + \alpha L^2} \quad ; \quad b_1 = -\frac{qL}{2\alpha} - \frac{1,5qL^3}{12EI + \alpha L^2} \quad (13)$$

Nota-se que quando $\alpha \rightarrow \infty$, tanto a_1 quanto b_1 tendem a zero, ou seja, fica evidenciado o efeito do shear locking. Isto poderia ter sido antecipado através de um exame minucioso das Eq. (10) e (11).

Fazendo $\alpha \rightarrow \infty$ na Eq. (10) tem-se uma condição de penalidade na deformação de cisalhamento e isto requer que a deformação de cisalhamento seja zero no processo de aproximação de Ritz. Na Eq. (11) supondo que $a_1 \rightarrow 0$ e $b_1 \rightarrow 0$, claramente $a_1 \rightarrow 0$ impõe uma deformação de flexão igual a zero produzindo uma ação de shear locking na solução e conseqüentemente obtendo uma solução espúria. A seguir, será visto como modelar os termos de aproximação a fim de que se evite o fenômeno do shear locking.

3.2 Aproximação de Ritz com três termos

Seja uma aproximação de três termos que satisfaça o que será chamado de condição de

consistência. Considere $\bar{\theta} = a_1 x$ e $\bar{w} = b_1 x + b_2 x^2$. A deformação de cisalhamento é dada por

$$\bar{\gamma} = -b_1 + (a_1 - 2b_2)x \quad (14)$$

O procedimento variacional de Ritz leva ao seguinte conjunto de equações:

$$EI \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} L^3/3 & -L^2/2 & -2L^3/3 \\ -L^2/2 & L & L^2 \\ -2L^3/3 & L^2 & 4L^3/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ qL^2/2 \\ qL^3/3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Resolvendo estas equações tem-se:

$$\bar{\theta} = -\frac{qL^2}{6EI} x \quad (16)$$

$$\bar{w} = \frac{qL}{\alpha} x - \frac{q}{2\alpha} x^2 + \frac{qL^2}{12EI} x^2 \quad (17)$$

$$-EI \bar{\theta}_{,x} = qL^2/6 \quad (18)$$

$$\alpha(\bar{\theta} - \bar{w}_{,x}) = q(L - x) \quad (19)$$

Observe que não há fenômeno de shear locking nestas equações. Fazendo uma comparação das matrizes nas Eq. (12) e (15) tem-se que a matriz da Eq. (12) é uma matriz não-singular de rank 2 e a matriz da Eq. (15) é uma matriz singular de rank 2 e ordem 3. Nota-se claramente que a singularidade é um resultado da condição de consistência representada por $(\alpha 1 - 2b_2)$ na parte linear relacionada com a deformação de cisalhamento definida na Eq. (14).

Pode-se mostrar que a não-singularidade aparece apenas em formulações inconsistentes com ordens de aproximação baixas, como foi visto com a aproximação de Ritz com dois termos. A seguir, mostra-se que uma aproximação inconsistente quadrática não possui shear locking na solução e que a matriz não é não-singular.

3.3 Aproximação de Ritz inconsistente com quatro termos

Partindo de uma aproximação com quatro termos para uma variação linear na aproximação da deformação de flexão, por exemplo $\bar{\theta} = a_1 x + a_2 x^2$ e $\bar{w} = b_1 x + b_2 x^2$, fazendo com que $\bar{\theta}_{,x} = a_1 + 2a_2 x$ seja a deformação de cisalhamento, tem-se

$$\bar{\gamma} = -b_1 + (a_1 - 2b_2)x + a_2 x^2 \quad (20)$$

O procedimento variacional de Ritz leva ao seguinte conjunto de equações:

$$EI \begin{bmatrix} L & L^2 & 0 & 0 \\ L^2 & 4L^3/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} L^3/3 & L^2/2 & -L^2 & -2L^3/3 \\ L^2/2 & L & -L^2 & -L^3 \\ -L^2 & -L^2 & L & L^2 \\ -2L^3/3 & -L^2 & L^2 & 4L^3/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ qL^2/2 \\ qL^3/3 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Pode-se mostrar que a matriz de penalidade 4x4 é singular devido à representação consistente $(\alpha 1 - 2b_2)$ da parte linear da deformação de cisalhamento na Eq. (20). O rank da matriz é 3 e a solução não deve apresentar shear locking. Entretanto, as forças inconsistentes $a_2 \rightarrow 0$ indicam que a deformação de flexão $\bar{\theta} \rightarrow a_1$. Isto quer dizer que o procedimento inconsistente com quatro termos irá produzir respostas tão eficientes quanto à formulação de Ritz consistente com três termos.

Resolvendo o conjunto de equações em (21), tem-se

$$a_1 = -\frac{qL^2}{6EI} - \frac{15qL^2}{60EI + \alpha L^2} \quad (22)$$

$$a_2 = \frac{15qL^2}{60EI + \alpha L^2} \quad (23)$$

$$b_1 = -\frac{qL}{\alpha} - \frac{5qL^3}{2(60EI + \alpha L^2)} \quad (24)$$

$$b_2 = -\frac{qL^2}{6EI} + \frac{q}{2\alpha} \quad (25)$$

À medida que $\alpha \rightarrow \infty$, a variação do momento fletor e esforço cortante são dados por:

$$-EI \bar{\theta}_{,x} = qL^2/6 \quad (26)$$

$$\alpha(\bar{\theta} - \bar{w}_{,x}) = q(L - x) + 2,5qL \left[6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{L}\right) + 1 \right] \quad (27)$$

Agora existem violentas oscilações quadráticas no esforço cortante e estas oscilações tendem a zero nos pontos $\frac{x}{L} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ e $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ ou $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ que são os pontos correspondentes à integração de Gauss-Legendre com 2 pontos. O

efeito da representação inconsistente reduziu a efetividade da aproximação. A seguir, mostra-se que a efetividade pode ser melhorada fazendo a aproximação consistente antes do processo variacional.

3.4 Aproximação de Ritz com quatro termos

Considere agora uma aproximação de Ritz com uma função consistente para deformação de cisalhamento definido como $\bar{\gamma}$. Isto pode ser obtido notando que na Eq. (20) existe um termo quadrático associado à a_2 e ainda que na Eq. (27) produz um termo quadrático espúrio ($6x^2 - 6Lx + L^2$). Uma formulação consistente via elementos finitos permite trocar o termo x_2 na Eq. (20) por $Lx - L^2/6$, assim tem-se:

$$\bar{\gamma} = -b_1 + (a_1 - 2b_2)x + a_2(Lx - L^2/6) = (-b_1 - a_2L/6) + (a_1 + a_2L - 2b_2)x \quad (28)$$

Agora o procedimento variacional de Ritz leva ao conjunto de equações:

$$\begin{bmatrix} L & L^2 & 0 & 0 \\ L^2 & \frac{4L^3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} & \frac{L^4}{4} & \frac{-L^2}{2} & \frac{-2L^3}{3} \\ \frac{L^4}{4} & \frac{7L^5}{36} & \frac{-L^3}{3} & \frac{-L^4}{2} \\ \frac{-L^2}{2} & \frac{-L^3}{3} & L & L^2 \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & L^2 & \frac{4L^3}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{qL^2}{2} \\ \frac{qL^3}{3} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

A solução aproximada é dada por:

$$-EI \bar{k} = \frac{5}{12} qL^2 - \frac{qL}{2} x \quad (30)$$

$$\alpha \bar{\gamma} = q(L - x) \quad (31)$$

Comparando a Eq. (20) com a Eq. (6) tem-se que a solução aproximada para a equação de Timoshenko para este problema assumindo uma deformação de cisalhamento consistente fornece exatamente o mesmo momento fletor daquele obtido pela teoria clássica de viga. Nota-se também que a Eq. (31) é idêntica à Eq. (19) mostrando que o esforço cortante está sendo calculado de uma forma correta. Em outras palavras, à medida que α tende ao infinito, os termos a_1 , a_2 , b_1 e b_2 representam corretamente o estado físico de equilíbrio.

4. SHEAR LOCKING

Seja um elemento baseado na teoria da viga de Timoshenko, conforme mostrado na Fig. 1, onde existem dois graus de liberdade em cada nó, a deflexão transversal w , a rotação dw/dx e funções de interpolação cúbica para garantir os requisitos de continuidade C1.

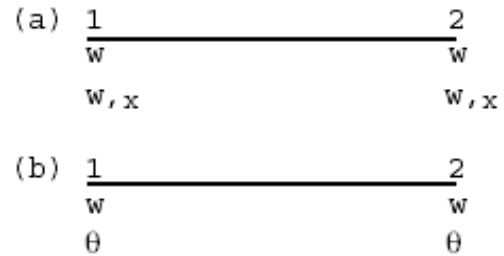


Fig. 1 – (a) Viga fina e (b) Viga de Timoshenko.

A energia de deformação de uma viga de Timoshenko de comprimento $2L$ pode ser escrita como um somatório das componentes de flexão e cisalhamento da seguinte forma:

$$\int \left(\frac{1}{2} EI \chi^T \chi + \frac{1}{2} kGA \gamma^T \gamma \right) dx \quad (32)$$

onde

$$\gamma = \theta - w_{,x} \quad (33)$$

Na Eq. (33) w é o deslocamento transversal, θ é a rotação, E é o módulo de Young, G é o módulo de elasticidade transversal, I é o momento de inércia e A representa a área da seção transversal.

No procedimento convencional são escolhidas funções de interpolação linear para o campo de deslocamento. Assim, tem-se:

$$N_1 = \frac{(1-\xi)}{2} ; \quad N_2 = \frac{(1+\xi)}{2} \quad (34)$$

onde a coordenada $\xi = x/L$ varia de -1 a +1 para um elemento de comprimento $2L$. Pode-se calcular as deformações de flexão e cisalhamento a partir destas funções de interpolação utilizando os operadores de gradiente da Eq. (33). Posteriormente, introduz-se na Eq. (32) referente a

energia de deformação e então a matriz de rigidez do elemento é determinada de uma forma analítica ou numérica.

Para a viga mostrada na Fig. 1, de comprimento h , a matriz de rigidez pode ser dividida em duas partes: flexão e cisalhamento, conforme abaixo:

$$K_b = \frac{EI}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad K_s = \frac{kGt}{h} \begin{bmatrix} 1 & \frac{h}{2} & -1 & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{h^2}{3} & -\frac{h}{2} & \frac{h^2}{6} \\ -1 & -\frac{h}{2} & 1 & -\frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{h^2}{6} & -\frac{h}{2} & \frac{h^2}{3} \end{bmatrix} \quad (35)$$

A seguir, mostra-se o fenômeno do shear locking comparando-se a solução exata de uma viga engastada e livre, com duas discretizações por elementos finitos.

5. APLICAÇÃO NUMÉRICA

Considere uma viga engastada e livre com $E=100$, $M=100$ e $\nu=0.3$ conforme mostrado na Fig. 2.

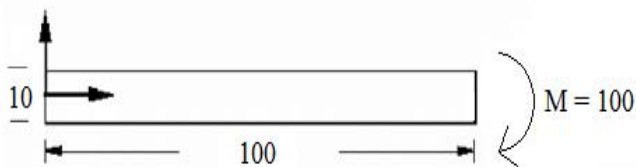


Fig. 2 – Viga engastada e livre a ser analisada.

A solução exata utilizando o estado plano de tensões é dada pelo conjunto de equações abaixo.

$$u = -\frac{M}{EI}xy \quad ; \quad v = \frac{M}{2EI}(x^2 + \nu y^2) \quad (36)$$

Para a geometria do problema, o deslocamento $v(100,0) = 6$. Agora, considere duas discretizações via elementos finitos, uma com elementos finitos retangulares da família Serendipity de quatro nós e a outra com elementos finitos retangulares da família Serendipity de oito nós, conforme as Fig. 3 e 4.

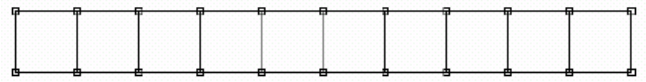


Fig. 3 – Discretização com elementos finitos de quatro nós.

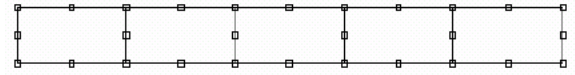


Fig. 4 – Discretização com elementos finitos de oito nós.

Observe que na Fig. 5, para a discretização com elementos finitos de quatro nós, o deslocamento $v(100,0) = 4.04$, ou seja, um erro de aproximadamente 33%. Entretanto, a solução utilizando elementos finitos de oito nós para $v(100,0) = 6.0$, ou seja, idêntica a da solução exata.

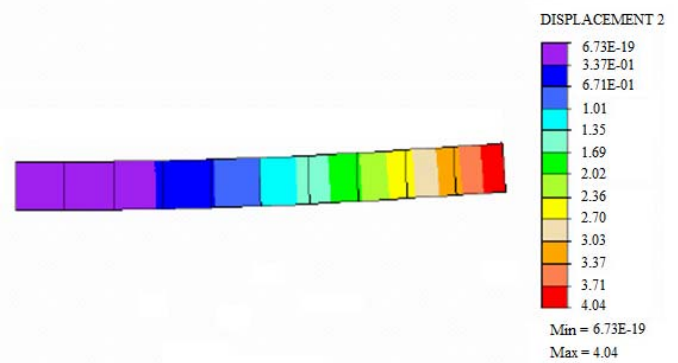


Fig. 5 – Deslocamentos para a discretização com elementos de quatro nós.

6. CONCLUSÕES

Apresentam-se neste trabalho alguns conceitos necessários ao entendimento do shear locking e tenta-se explicar porque algumas discretizações via elementos finitos são melhores do que outras. Comparam-se as equações da teoria de viga de Timoshenko com as equações da teoria de viga clássica para discutir a natureza dos erros que aparecem durante a aproximação de Ritz. Estes mesmos erros são responsáveis pelo shear locking encontrado nos modelos de elementos finitos para problemas de viga, conforme mostrado, matematicamente, na aproximação de Ritz com vários termos utilizados, assim como na aplicação numérica. Dependendo da discretização utilizada no problema, o fenômeno do shear locking poderá causar resultados espúrios na análise.

REFERÊNCIAS

1. Bathe, K. J. *Finite Element Procedures*, 2nd edition, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
2. Hughes, T. J. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, 2nd edition, Dover Editions, New Jersey, 2000.
3. Park, K. C. “Improved strain interpolation for curved C^0 elements”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, 281-288, 1986.
4. Prathap, G. *Finite Element Analysis as Computation*, Centre for Mathematical Modeling and Computer Simulation, India, 2001.
5. Taylor, R. L. and Wilson, E. L. “A non-conforming element for stress analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10, 1211-1219, 1976.
6. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. “Reduced integration technique in general analysis of plates and shells”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, 275 – 290, 1971.
7. Zienkiewicz, O. C. *The Finite Element Method*, 5th edition, Butterworth-Heinemann, London, 2000.