

# **Um modelo de fissura incorporada com a inclusão dos efeitos de flexão e cisalhamento – aplicação a vigas de concreto armado**

## **An embedded crack model with the inclusion of shearing and bending effects – application to reinforced concrete beams**

**Daiane de Sena Brisotto<sup>1</sup>, Virgínia Maria Rosito d'Avila<sup>2</sup> & Eduardo Bittencourt<sup>3</sup>**

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, Porto Alegre, RS*

<sup>1</sup> [daiabrisotto@yahoo.com.br](mailto:daiabrisotto@yahoo.com.br)

<sup>2</sup> [vichy@ufrgs.br](mailto:vichy@ufrgs.br)

<sup>3</sup> [bittenco@cpgec.ufrgs.br](mailto:bittenco@cpgec.ufrgs.br)

**RESUMO:** A fissuração do concreto é caracterizada pelo crescimento de microfissuras e a junção destas em macrofissuras, que permanecem descontínuas durante um período, permitindo a transferência de esforços. No concreto simples, devido a este comportamento, as deformações tendem a se localizar em uma pequena banda da estrutura. No concreto armado, a aderência entre a armadura e o concreto adjacente possibilita a transmissão da tensão do concreto para o aço e vice-versa, fazendo com que as fissuras se distribuam ao longo da peça e que o concreto entre fissuras permaneça com capacidade de absorver solicitação. O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo de fissura incorporada, com a inclusão dos efeitos de flexão e cisalhamento, capaz de simular o comportamento pós-fissuração de vigas de concreto armado. Por fim, as previsões numéricas obtidas são comparadas com resultados experimentais com o objetivo de comprovar a eficácia do modelo proposto.

**ABSTRACT:** The concrete cracking is characterized by the growth of microcracks and their linking in macrocracks that remain discontinuous during a period, allowing tension transfer. In plain concrete, due to this behavior, a strain localization in a small band of the structure takes place. In reinforced concrete, the adherence between the reinforcement and the adjacent concrete enables the stress transfer between both materials, resulting a smeared cracking along the member and allowing that the concrete between cracks remains capable to resist loads. The objective of this this paper is to present an embedded crack model, with the inclusion of the shearing and bending effects, capable of simulate the post-cracking behavior of reinforced concrete beams. To verify the performance of the proposed model, the numerical results obtained are compared with experimental results.

### **1. INTRODUÇÃO**

O processo de evolução da fissuração em estruturas de concreto, após a aplicação da carga, é caracterizado pelo crescimento de microfissuras através da argamassa e a junção destas em macrofissuras, que permanecem descontínuas durante um período, permitindo a transferência de esforços. Este processo de evolução da fissuração faz com que o concreto não rompa quando a tensão máxima é alcançada, mas sim que ele sofra um decréscimo gradual de tensão com o aumento de deformação, chamado amolecimento.

No concreto simples, devido a este comportamento de amolecimento, as deformações

tendem a se localizar em uma pequena parte da estrutura, denominada banda de fissuração.

No concreto armado, a aderência entre as barras de aço da armadura e o concreto adjacente possibilita a transmissão da tensão de tração do concreto para a armadura e vice-versa, fazendo com que as fissuras se distribuam ao longo da estrutura. O concreto entre fissuras permanece com uma significativa capacidade de absorver solicitação, acarretando uma resposta mais rígida do que a do comportamento frágil. Este fenômeno é conhecido na literatura como “tension-stiffening”. Portanto, na determinação do comportamento em tração do concreto armado fissurado, deve-se considerar a contribuição das

rigidezes da armadura e do concreto, tanto na fissura como na região entre fissuras.

Devido à natureza localizada, a correta modelagem da fissura via Método dos Elementos Finitos é um tópico difícil, pois trata da descontinuidade no campo dos deslocamentos. Em estruturas de concreto armado, esta dificuldade aumenta devido ao fato de que se deve simular, além dos comportamentos do concreto e do aço, o complexo comportamento da interação entre eles.

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo de fissura incorporada, com a inclusão dos efeitos de flexão e cisalhamento, capaz de simular numericamente o comportamento pós-fissuração de vigas de concreto armado.

O modelo de fissura incorporada para concreto armado empregado neste trabalho, proposto por d'Avila [1], é baseado no modelo para concreto simples de Dvorkin et al. [2,3]. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrão.

Para representar o comportamento do concreto intacto, utiliza-se o modelo constitutivo de Ottosen [8,9]. O comportamento do material fissurado é representado através do modelo de transferência de tensão por aderência de Russo et al. [10,11]. O aparecimento da primeira fissura ocorre quando a tensão de tração no concreto supera o valor da resistência à tração. A formação de novas fissuras, até que uma configuração final seja estabelecida, está associada ao fato de se ter espaço suficiente para transferir tensão por aderência entre os materiais.

Já para representar as barras de aço da armadura, emprega-se o modelo incorporado desenvolvido por Elwi e Hruday [5]. O modelo constitutivo adotado para a armadura é do tipo elasto-plástico com endurecimento.

## 2. MODELO DE TRANSFERENCIA DE TENSÃO POR ADERENCIA

A seguir, é feita uma descrição geral do modelo de transferência de tensão por aderência empregado neste trabalho, ref. [10,11].

Um escorregamento relativo entre a armadura e o concreto adjacente ocorre quando as deformações dos dois materiais têm valores diferenciados. O escorregamento está associado à degradação do vínculo entre os materiais e ao aparecimento de fissuras no entorno das barras de aço. Basicamente, estas fissuras são devidas à

tensão de tração proveniente da transferência de tensões do aço para o concreto através da aderência. Para que o concreto fissure em uma certa seção, sua tensão deve ser igual à resistência à tração do concreto, fazendo com que, conseqüentemente, a deformação de fissuração do concreto,  $\varepsilon_{cr}$ , seja atingida. Novas distribuições de tensão e deformação no concreto e no aço vão acontecer após a fissuração. Assim, o estudo do fenômeno da fissuração deve ser baseado na análise da distribuição das deformações ao longo da peça de concreto armado.

Antes de prosseguir, cabe fazer alguns comentários à respeito da formulação empregada. O problema que se está querendo resolver não pode ser resolvido de forma explícita para todas as situações. Para os casos que não existe solução explícita, o problema deve ser resolvido através de um processo iterativo, chegando-se a determinadas situações para as quais não existe solução. Assim, segundo FIB [6], é recomendável que se faça uma avaliação qualitativa prévia da possível distribuição de deformações e escorregamento relativo ao longo do elemento antes de tentar resolver o problema. Em particular, a existência de um ponto ou região onde o escorregamento  $s$  e sua derivada são nulos ( $s = s' = 0$ ) permite o uso de uma expressão explícita na solução do problema, já que nesta região as deformações no aço e no concreto apresentam o mesmo valor. Assim, fazendo esta avaliação prévia, é possível saber qual função ou conjunto de funções que deve ser utilizado em cada situação.

Considerando um trecho da peça entre duas fissuras consecutivas, de comprimento  $L$ , ver Fig. 1, dois comportamentos são possíveis, diretamente relacionados com o valor da carga externa e o comprimento da peça:

- a) comportamento de peça longa, Fig. 1(a): caracterizado pela existência de uma região onde não existe escorregamento relativo entre o aço e o concreto adjacente ( $s = 0$  entre  $R$  e  $S$ ), e onde os dois materiais possuem a mesma deformação ( $\varepsilon_s = \varepsilon_c$  entre  $R$  e  $S$ );
- b) comportamento de peça curta, Fig. 1(b): caracterizado pelo fato de o aço e o concreto apresentarem deformações diferentes ( $\varepsilon_s > \varepsilon_c$ ) ao longo de todo o comprimento e o escorregamento relativo entre os materiais é

zero apenas no centro do trecho devido à simetria ( $s = 0$  somente em  $S$ ).

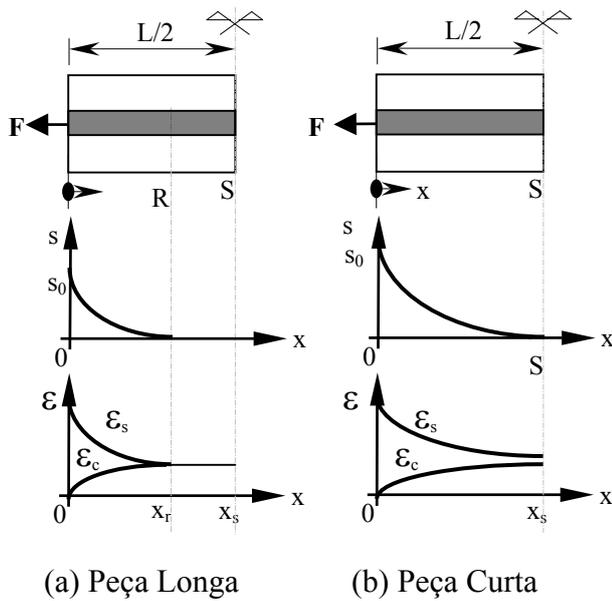


Figura 1 - Distribuição do escorregamento e das deformações no concreto e no aço.

A seguir, analisar-se-á a fissuração progressiva de um trecho entre fissuras adjacentes inicialmente não fissurado.

Para valores muito baixos de carga e, conseqüentemente, de deformação na extremidade fissurada, o escorregamento relativo se anula antes do eixo de simetria. O trecho ainda não fissurou, e  $\varepsilon_{cR} < \varepsilon_{ct}$ , sendo  $\varepsilon_{cR}$  o valor de  $\varepsilon_c$  no ponto  $R$  da Fig. 1(a) com  $s' = 0$  e  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cmax}$ .

Qualquer incremento de carga desloca o ponto  $R$  em direção ao eixo de simetria e  $\varepsilon_{cR}$  aumenta, podendo produzir duas respostas diferentes na peça:

a) pode ocorrer que a deformação no concreto alcance o valor de fissuração no ponto  $R$  com  $x_R \leq L/2$ . Neste caso,  $x_R = x_{Rcrack}$ , sendo  $x_{Rcrack}$  o comprimento requerido para satisfazer a condição de igualdade entre as deformações, dado por

$$x_{Rcrack} = \frac{2}{1-\alpha} \left[ \left( \frac{\xi+1}{\xi} \right) \varepsilon_{ct} \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^{1-\alpha} \right]^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \quad (1)$$

onde  $\xi = (E_s A_s) / (E_c A_c)$ .  $E_c$  e  $E_s$  são, respectivamente, os módulos de elasticidade do concreto e do aço.  $A_s$  é área de aço e  $A_c$  é área de

concreto da seção transversal envolvida na transferência de tensão.  $\gamma$  e  $\alpha$  são parâmetros que levam em consideração o tipo de relação *tensão de aderência x escorregamento* empregada (ver Ref.[1]).

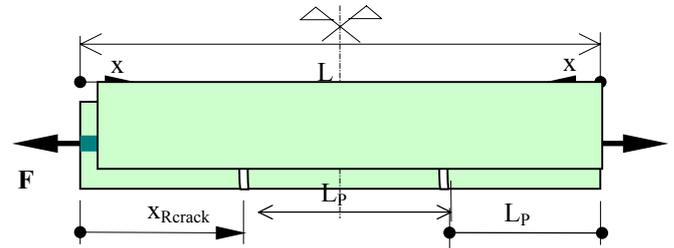


Figura 2: Fissuração em uma peça longa.

As primeiras fissuras primárias se formam e a peça é subdividida em "m" partes, conforme Fig. 2. O comprimento  $L_p$  de cada uma das partes deve estar entre  $x_{Rcrack}$  e  $2x_{Rcrack}$ , sendo o comprimento médio igual a  $L/m$ . Este caso pode ser definido como a fissuração de uma peça longa;

b) por outro lado, pode acontecer que o ponto  $R$  alcance o eixo de simetria com a deformação do concreto permanecendo menor que  $\varepsilon_{ct}$ . Para fissurar a peça, uma carga ainda maior deve ser aplicada. Com o incremento da carga, a deformação do concreto vai aumentar, mas seu valor máximo,  $\varepsilon_{cmax}$ , continuará acontecendo no centro do trecho já que o valor de  $x_R$  não pode ir além de  $L/2$  devido à simetria. Conseqüentemente, a primeira fissura primária aparecerá, na seção de simetria, quando  $\varepsilon_{cmax}$  alcançar o valor  $\varepsilon_{ct}$ . Assim, na fissuração a peça é dividida em duas partes iguais, de dimensão  $L/2$ , Fig. 3. Este caso é definido como fissuração de uma peça curta.

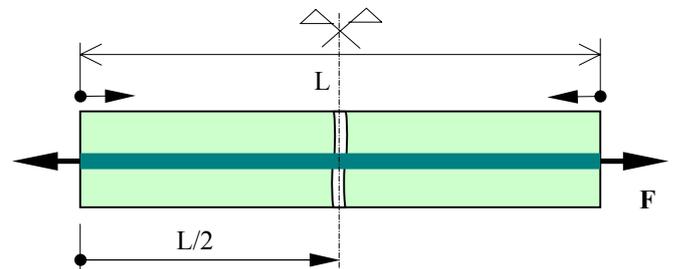


Figura 3: Fissuração em uma peça curta.

A condição que garante que a fissuração da peça irá acontecer antes que  $x_R$  alcance o eixo de simetria, ou seja, que a peça funcionará como peça longa é  $x_{Rcrack} \leq L/2$ . Caso contrário, ou seja,  $x_{Rcrack} > L/2$ , a peça funcionará como peça curta

desde a primeira fissura, o que gera apenas uma fissura na seção de simetria.

As equações (2) e (3) mostram, de forma implícita, o escorregamento  $s$  como função de  $x$

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2C}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{\gamma}{C}\right)^k \frac{s^{1+k(1+\alpha)}}{1+k(1+\alpha)} \quad (2)$$

$$\text{para } 0 \leq s < \left| \frac{C}{\gamma} \right|^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

$$x = B - \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} \left(\frac{C}{\gamma}\right)^k \frac{s^{\frac{1-\alpha}{2}-k(1+\alpha)}}{1-\frac{\alpha}{2}-k(1+\alpha)} \quad (3)$$

$$\text{para } \left| \frac{C}{\gamma} \right|^{\frac{1}{1+\alpha}} < s$$

onde  $B$  e  $C$  são constantes de integração que dependem das condições de contorno.

No caso do comportamento de peça longa (Fig.1(a)), a constante de integração  $C$  é nula e o escorregamento  $s$  como função de  $x$  pode ser escrito de forma explícita

$$s = \left[ -((1-\alpha)/2)\sqrt{2\gamma}(x-B) \right]^{2/(1-\alpha)} \quad (4)$$

Finalmente, as deformações no aço e no concreto em função do escorregamento são dadas por

$$\varepsilon_s = \frac{\xi \varepsilon_{s0} + \sqrt{2(\gamma s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (5)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\xi \varepsilon_{s0} - \xi \sqrt{2(\gamma s^{(1+\alpha)} + C)}}{1 + \xi} \quad (6)$$

onde  $\varepsilon_{s0}$  é a deformação no aço na extremidade fissurada.

Depois da formação da primeira geração de fissuras, uma segunda geração de fissuras pode ocorrer, para um nível de carga ainda maior. O estado de fissuração estabilizada é atingido quando o comprimento de cada parte não é mais suficiente para permitir que a deformação do concreto atinja o valor de fissuração.

A diferença entre os alongamentos do aço e do

concreto na metade da peça, é igual ao escorregamento da extremidade carregada,  $s_0$ . A abertura da fissura é dada por  $w = s_{01} + s_{02}$ , sendo  $s_{01}$  e  $s_{02}$  os escorregamentos das extremidades de dois trechos consecutivos.

### 3. O MODELO DE FISSURA INCORPORADA

Como já foi mencionado, o modelo incorporado para concreto armado empregado neste trabalho, proposto por d'Avila [1], é baseado no modelo de fissura incorporada para concreto simples de Dvorkin et al [2,3]. Desta forma, antes de se apresentar o modelo empregado, far-se-á uma breve descrição do modelo original para o concreto simples.

#### 3.1 Modelo original de Dvorkin et al.

Os três principais aspectos do modelo original de Dvorkin et al.[2,3] são: 1) a localização de deformações envolve o elemento completo como domínio mínimo - forma-se apenas uma fissura por elemento; 2) considera-se a localização de deformações na forma de uma linha de descontinuidade de deslocamentos, que passa pelo centro do elemento; 3) existem duas equações constitutivas definindo o comportamento pós-localização do concreto simples: uma relação tensão-deslocamento para a linha de descontinuidade e uma relação convencional tensão-deformação para o resto do domínio.

O elemento finito usado é o *QMTC* (*Quadrilateral with Mixed Interpolation of Tensorial Components*). Trata-se de um elemento quadrilátero bidimensional de cinco nós, ver Fig. 4(a), baseado no método de interpolação mista das componentes tensoriais (ref. [4]). Este elemento adota uma interpolação para os deslocamentos e uma para as deformações e realiza as duas interpolações em conjunto.

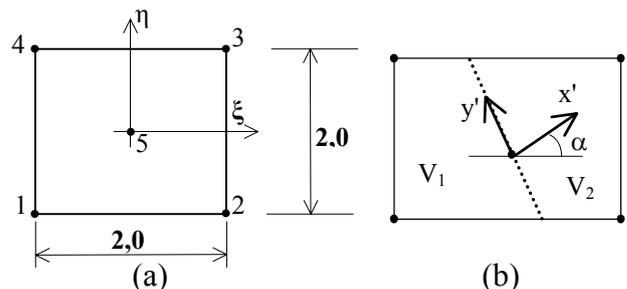


Figura 4 - a) Elemento QMTC; b) Elemento com a linha de descontinuidade.

Na Fig. 4(b), está representado o elemento finito com a linha de descontinuidade de deslocamentos - a fissura. A fissura, que passa pelo nó central (nó 5), divide o elemento em dois subdomínios:  $V_1$  e  $V_2$ .

A deformação incremental, para qualquer ponto em  $V_1$  ou  $V_2$ , é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} (\mathbf{d} - \boldsymbol{\phi} \mathbf{R} \mathbf{e}') = \mathbf{B} \mathbf{d}_N \quad (7)$$

onde  $\mathbf{B}$  é a matriz deformação-deslocamento e  $\mathbf{d}_N$  é o deslocamento associado às deformações (sem o movimento de corpo rígido relativo à abertura da fissura).

Os deslocamentos para  $V_1$  ou  $V_2$  resultam, respectivamente

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{N}(\mathbf{d} - \boldsymbol{\phi} \mathbf{R} \mathbf{e}') = \mathbf{N} \mathbf{d} - \mathbf{N} \boldsymbol{\phi} \mathbf{R} \mathbf{e}' \quad (8)$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{N} \mathbf{d} - (\mathbf{N} \boldsymbol{\phi} - \mathbf{I}) \mathbf{R} \mathbf{e}' = \mathbf{N} \mathbf{d} - \mathbf{N} \boldsymbol{\phi} \mathbf{R} \mathbf{e}' - \mathbf{R} \mathbf{e}' \quad (9)$$

sendo  $\mathbf{N}$  a matriz das funções de interpolação padrão para um elemento isoparamétrico de 5 nós;  $\mathbf{e}'$  o vetor que contém as componentes no sistema local ( $x'$ ,  $y'$ ) da abertura da fissura;  $\mathbf{R}$  a matriz de rotação do sistema de coordenadas local da descontinuidade ( $x'$ ,  $y'$ ) para o sistema de coordenadas do elemento; e,  $\mathbf{d}$  o vetor deslocamento nodal. A matriz  $\boldsymbol{\phi}$  é constituída por submatrizes  $\boldsymbol{\phi}_i$ , que são dadas por  $\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0}$  em  $V_1$  e  $\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{I}$  em  $V_2$ .

O ponto chave deste modelo está na determinação do equilíbrio interno do elemento: as forças transmitidas através da fissura devem estar em equilíbrio com as forças no volume do elemento, ou seja

$$\int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} dS = \int_{S_L} \mathbf{t} dS \quad (10)$$

onde  $S_L$  é a superfície da linha de localização (fissura). A matriz  $\mathbf{P}$  tem a função de selecionar as componentes de tensão no domínio do elemento que serão transmitidas pela fissura.

As relações constitutivas para a fissura e para o domínio do elemento são definidas, respectivamente, como

$$\mathbf{t} = \mathbf{D}^{cr} \mathbf{e}' \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

onde  $\mathbf{D}^e$  é a matriz constitutiva elástica do material e  $\mathbf{D}^{cr}$  é a matriz constitutiva da zona fissurada.

A configuração final de equilíbrio é obtida efetuando-se duas etapas de iterações: no elemento até que a igualdade (10) seja estabelecida; e a nível global.

### 3.2 Modelo modificado empregado

A fissuração em estruturas de concreto armado é caracterizada pelo aparecimento de várias fissuras espalhadas ao longo da peça. A inclusão da armadura causa significativas modificações no processo de formação e crescimento das fissuras e, conseqüentemente, na força transmitida através das mesmas.

Para poder representar esta situação, alterou-se o modelo original de fissura incorporada apresentado na Seção 3.1.

As duas principais modificações realizadas são: incluir a contribuição da armadura no equilíbrio interno de forças do elemento; e, permitir que o modelo seja capaz de representar um número variável de fissuras em cada elemento.

A inclusão da parcela da armadura é feita modificando-se a equação de equilíbrio interno do elemento, equação (10), que agora resulta

$$\mathbf{F}_{ES}' + \int_{S_L} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma} dS = \int_{S_L} \mathbf{t} dS + \mathbf{F}_S' \quad (13)$$

A equação anterior pode ser posta na forma

$$\mathbf{F}_{ES}' + \mathbf{F}_{EL} = \mathbf{F}_{CR} + \mathbf{F}_S' \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}_{ET} = \mathbf{F}_{CT} \quad (14)$$

sendo

$\mathbf{F}_{ES}'$ : vetor de forças do aço na direção local da fissura no domínio do elemento, ver Fig. 5(a)

$\mathbf{F}_S'$ : vetor de forças do aço na fissura, ver Fig. 5(b)

$\mathbf{F}_{EL}$ : vetor de forças no concreto na direção local da fissura, no domínio do elemento

$\mathbf{F}_{CR}$ : vetor de forças no concreto na fissura

$\mathbf{F}_{ET}$ : vetor de forças total no domínio do elemento

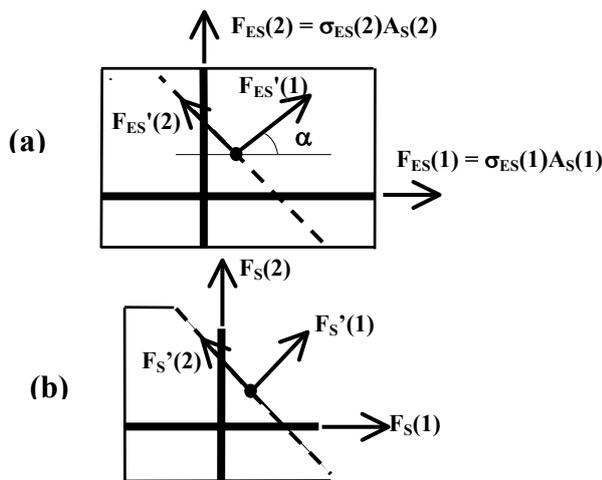
$\mathbf{F}_{CT}$ : vetor de forças total na fissura

Conhecendo-se os valores da força total no domínio do elemento e da força no concreto na fissura, pode-se determinar o valor da força no aço na fissura,  $\mathbf{F}_S'$ , através das equações (14). Com este valor determinado, empregando o modelo de transferência de tensão por aderência apresentado anteriormente, pode-se determinar a quantidade, o espaçamento e a abertura das fissuras.

O procedimento proposto, para quando a linha de localização estiver aberta dentro do elemento e para a  $i$ -ésima iteração da estrutura global, é descrito a seguir.

- 1) Considerar a abertura da fissura,  $e'_{(0)}^{(i)}$ , igual ao valor da iteração global anterior.
- 2) Determinar, para os nós externos, o deslocamento que causa a deformação no elemento,  $d_{N(k)}^{(i)}$ .
- 3) Calcular o deslocamento incremental do nó interno,  $d_{Ni(k)}^{(i)}$ .
- 4) Determinar as deformações e tensões no domínio do elemento usando as Eq. (7) e (12).

Considerando que as barras de armadura somente contribuem com forças na direção de seus eixos ( $F_{ES(1)}$  para a barra longitudinal e  $F_{ES(2)}$  para o estribo), as forças do aço no domínio do elemento devem ser rotacionadas para as direções locais,  $F_{ES}'$ , como mostra a Fig. 5(a).  $A_s(1)$  e  $A_s(2)$  são, respectivamente, as áreas da armadura longitudinal e dos estribos.



(a) domínio do elemento (b) linha de localização  
Figura 5 – Forças na armadura.

- 5) Considerar a deformação média no aço ao longo do elemento, e à na fissura, igual aos valores da iteração global anterior:  $\epsilon_{sm(k)}^{(i)} = \epsilon_{sm(k)}^{(i-1)}$  e  $\epsilon_{s0(k)}^{(i)} = \epsilon_{s0(k)}^{(i-1)}$ .
- 6) Calcular a tensão na armadura no domínio do elemento,  $\sigma_{ES(k)}^{(i)}$ , usando a Eq.(12).
- 7) Determinar as tensões no concreto na linha de localização,  $t_{(k)}^{(i)}$ , usando a Eq. (11).
- 8) Calcular as forças resultantes, no domínio do elemento, nas direções locais ( $x', y'$ ):
  - a) a força no concreto,  $F_{EL(k)}^{(i)}$ , usando a parte esquerda da Eq. (10).

- b) a força no aço:  $F_{ES'(k)}^{(i)} = (\sigma_{ES(k)}^{(i)} A_s) R^{-1}$ ,  $R$  é a matriz que rotaciona as componentes cartesianas do vetor no sistema ( $x', y'$ ), para o sistema de coordenadas global.
  - c) a força total:  $F_{ET(k)}^{(i)} = F_{EL(k)}^{(i)} + F_{ES'(k)}^{(i)}$ , equação (14).
- 9) Calcular as forças resultantes na linha de localização (fissura):
    - a) a força no concreto,  $F_{CR(k)}^{(i)}$ , usando a parte direita da Eq. (10).
    - b) a força no aço:  $F_S'(k)^{(i)} = F_{ET(k)}^{(i)} - F_{CR(k)}^{(i)}$ , usando a equação (14)
  - 10) Calcular a deformação no aço na fissura:  $\epsilon_{s0(k)}^{(i)} = (1/E_s) F_S(k)^{(i)} A_s^{-1}$ , com  $F_S = R F_S'$  (ver Fig. 5(b)).
  - 11) Com o valor da deformação na armadura na fissura,  $\epsilon_{s0(k)}^{(i)}$ , para cada nível de carga, entrar na rotina do modelo de transferência de tensão por aderência e calcular:
    - a) comprimento de transferência,  $x_{Rcrack}$ , através da Eq. (1).
    - b) a deformação média do aço ao longo do elemento,  $\epsilon_{sm(k)}^{(i)}$ , utilizando a Eq. (5).
    - c) a deformação média no domínio do elemento,  $\epsilon_{cm(k)}^{(i)}$ , utilizando a Eq. (6).
    - d) o escorregamento relativo máximo entre a armadura e o concreto adjacente,  $s_0$ , utilizando as Eq. (4) ou as Eq. (2) e (3).
    - e) Após a solução do passo 11(d) ter sido alcançada, a configuração final das fissuras pode ser determinada por:
  - 12) Calcular a distância entre fissuras,  $dls = 2x_R$ , e a quantidade de fissuras em cada elemento,  $nf = L_{ele} / dls$ , conforme o comportamento de peça curta ou longa.  $L_{ele}$  é o comprimento do elemento normal à linha de localização.
  - 13) Calcular o valor da abertura de cada fissura usado na Eq. (11):  $Re' = 2s_0$ , sendo  $s_0$  o escorregamento máximo (ver Fig.1).
  - 14) Calcular o valor total da abertura da fissura por elemento:  $e_{(k)} = Re' \times nf$ , que será utilizado nas Eq. (8) e (9).
  - 15) Repetir os passos 6, 7, 8 e 9(a)
  - 16) Calcular as forças resultantes:
    - a) a força no aço na fissura:  $F_S(k)^{(i)} = \epsilon_{s0(k)}^{(i)} E_s A_s$ .
    - b) a força total na linha de localização:  $F_{CT(k)}^{(i)} = F_{CR(k)}^{(i)} + F_S'(k)^{(i)}$ , equação (14)
  - 17)  $k = k + 1$  e voltar para o passo 2.

Após o surgimento da fissura, todas as

solicitações são determinadas apenas para o nó central do elemento.

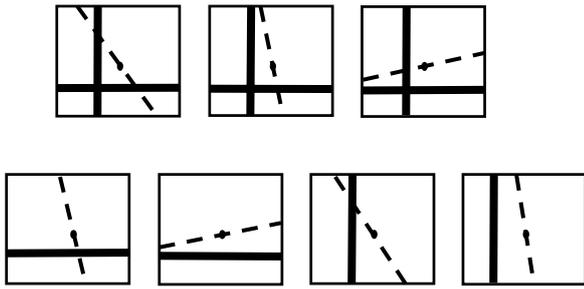


Figura 6 – Situações possíveis para a fissura interceptar a armadura.

Outro aspecto importante, é que o processo de transferência de tensão através da fissura deve ser feito somente pelos elementos que possuem barras de armadura interceptadas pela linha de localização. Todas as possíveis situações indicando as posições das barras da armadura e da linha de localização são mostradas na Fig. 6.

Para os elementos mostrados nas situações (c) e (f) na Fig. 6, o passo 11 do procedimento proposto é realizado para os estribos (As(2)); para os elementos caracterizados pelas situações (b) e (d) na Fig. 6, é realizado para a barra longitudinal (As(1)); e, para os elementos com ambas (estribos e longitudinal) barras interceptadas pela fissura, Fig. 6(a), o passo 11 do procedimento proposto é feito somente para a barra longitudinal (As(1)).

Para os elementos sem as barras de armadura atravessando a linha de localização, situações (e) e (g) na Fig. 6 e/ou elementos 2 e 3 na Fig. 7 o valor da abertura da fissura é determinado por uma variação linear em relação ao elemento com armadura próximo. Conseqüentemente, as aberturas de fissura para os três elementos fissurados mostrados na Fig. 7 são determinados por: elemento 1:  $uc_1$  é determinado pelo procedimento exposto acima; elemento 2:  $uc_2 = 2/3 uc_1$ ; elemento 3:  $uc_3 = 1/3 uc_1$ .

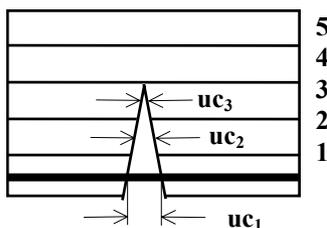


Figura 7 – Aberturas da fissura para elementos sem barras de armadura.

## 4. RESULTADOS

Para comprovar a eficácia do modelo proposto, os resultados numéricos obtidos são comparados com resultados experimentais obtidos por Leonhardt e Walther (1962) para uma série de quatro vigas simétricas (ET1, ET2, ET3 e ET4), simplesmente apoiadas, carregadas verticalmente por duas cargas concentradas. O detalhamento do conjunto de vigas (dimensões em centímetros) é mostrado na fig. 8.

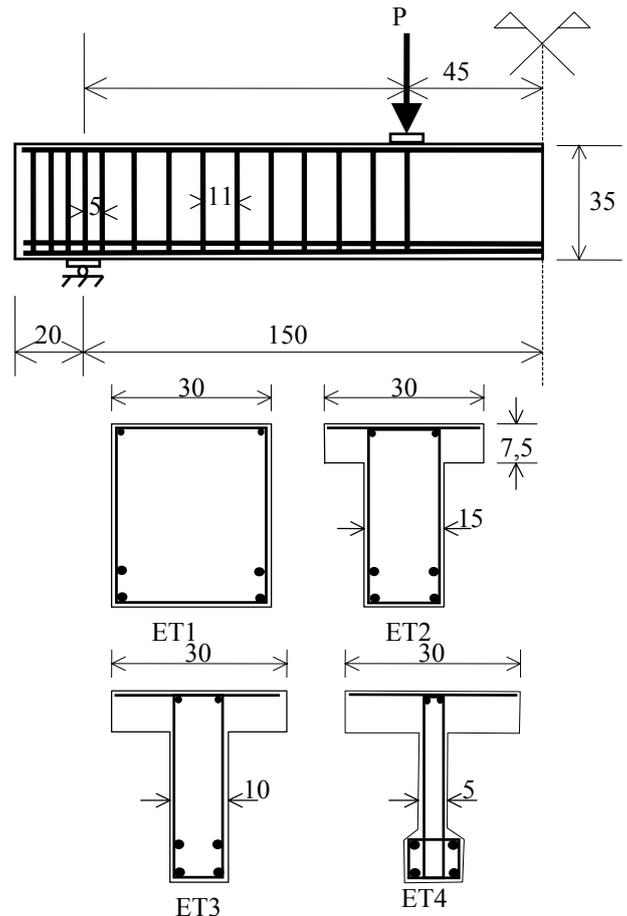


Figura 8: Detalhamento das vigas.

As quatro vigas estudadas são armadas com a mesma quantidade de armadura tanto longitudinalmente como transversalmente, mas possuem diferentes larguras de alma.

A armadura longitudinal inferior é composta por quatro barras de 20 mm de diâmetro, com tensão de escoamento,  $f_y = 42.8 \text{ kN/cm}^2$ , e a longitudinal superior consiste de duas barras de 8mm de diâmetro com tensão de escoamento,  $f_y = 46.5 \text{ kN/cm}^2$ . Os estribos têm diâmetro de 6mm e tensão de escoamento,  $f_y = 32.0 \text{ kN/cm}^2$ .

As propriedades mecânicas do concreto são:

- coeficiente de Poisson -  $\nu = 0.2$

- resistência à tração -  $f_t = 0.233 \text{ kN/cm}^2$
- resistência à compressão -  $f_c = 2.42 \text{ kN/cm}^2$
- módulo de elasticidade -  $E_c = 3400 \text{ kN/cm}^2$
- energia de fratura -  $G_f = 0.000487 \text{ kN/cm}$

Para o concreto na linha de localização é empregada uma lei de amolecimento linear.

Empregou-se uma malha de 20 (5x4) elementos QMITC, na análise numérica, como está mostrado na fig. 9.

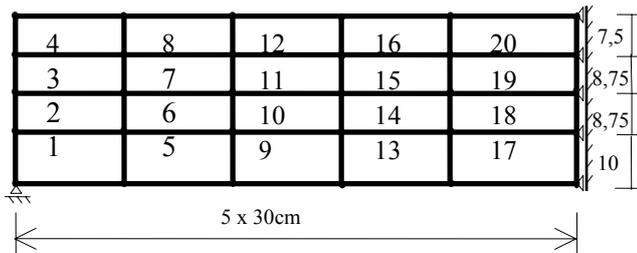


Figura 9: Discretização adotada

Nas figuras 10 a 19, mostra-se uma série de resultados obtidos para a viga ET1.

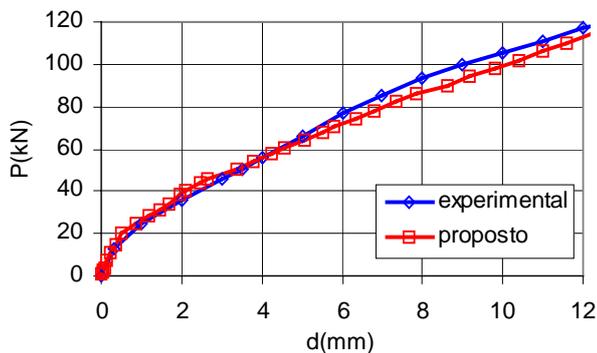


Figura 10: Flechas obtidas experimentalmente e pelo modelo computacional – ET1.

Na fig. 10, mostra-se a evolução da flecha ao longo do carregamento, segundo os resultados obtidos experimentalmente e através do modelo proposto.

A variação da tensão na armadura longitudinal inferior, ao longo do carregamento, para os elementos 5 e 17, está representada na fig. 11.

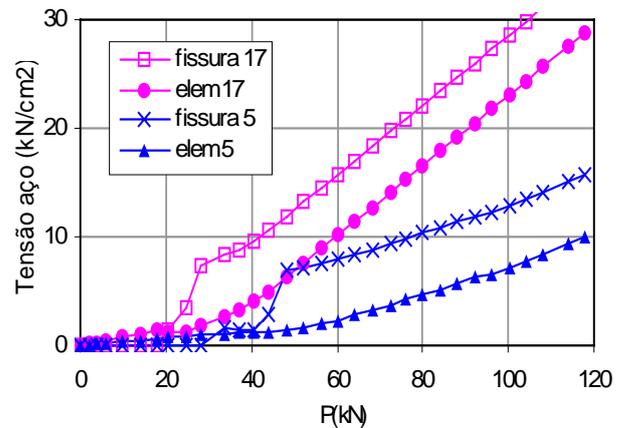


Figura 11: Tensão no aço x carga aplicada – ET1.

Foram plotados dois valores de tensão para o modelo incorporado proposto: um relativo à tensão no aço na fissura e o outro relativo à tensão média na armadura no trecho entre fissuras. Além disso, estes valores foram plotados em dois pontos distintos da peça: um correspondente ao elemento 17, situado na seção de simetria, e outro relativo ao elemento 5, próximo ao apoio da viga, ver figura 9. Verifica-se que a tensão no aço na fissura é maior que a tensão média na armadura no trecho entre fissuras, para os dois elementos fissurados, como era esperado.

Na fig. 12, estão plotadas as curvas *tensão no concreto para os elementos 5 e 17 x carga aplicada*. Estas curvas representam a contribuição do concreto entre fissuras ("*tension-stiffening*") para a rigidez global da peça. Verifica-se que a contribuição do concreto entre fissuras é menor para o elemento 5. Isso é comprovado pela fig. 11, já que a tensão média na armadura no trecho entre fissuras para este elemento é menor do que para o elemento 17.

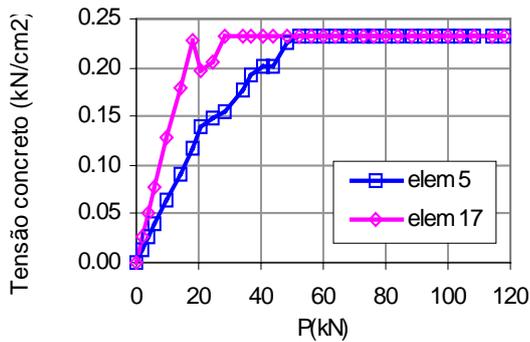


Figura 12: Curvas de tensão no concreto x carga aplicada – ET1.

Na fig. 13, mostra-se a evolução da abertura total das fissuras (número de fissuras x abertura de cada fissura) ao longo do carregamento para o elemento 17.

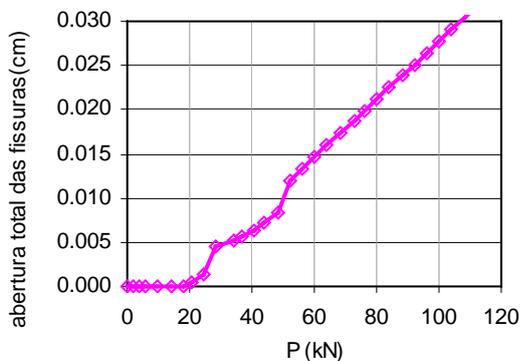


Figura 13: Abertura total das fissuras x carga aplicada - ET1.

A evolução do número total de fissuras ao longo do carregamento para o elemento 17 está graficada na fig. 14. A formação da primeira geração de fissuras acontece para um nível de carga igual a 19 kN. A segunda geração de fissuras, a configuração final, se forma no nível de carga de 48kN.

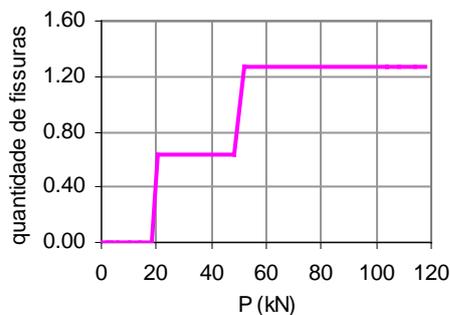


Figura 14: Número total de fissuras x carga Aplicada – ET1.

Na fig. 15, está representada o crescimento da abertura de cada uma das fissuras do elemento 17 ao longo do carregamento. Verifica-se que há uma diminuição da abertura de cada fissura no instante da formação da segunda geração de fissuras. Contudo, a abertura total das fissuras, figura 13, é sempre crescente.

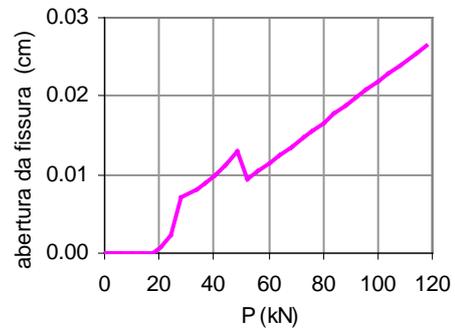


Figura 15: Abertura de uma fissura x carga aplicada.

Na figura 16, está plotada a curva *tensão transmitida na fissura no elemento 17 x carga aplicada*. A partir da carga de 29 kN, a fissura não transmite mais tensão.

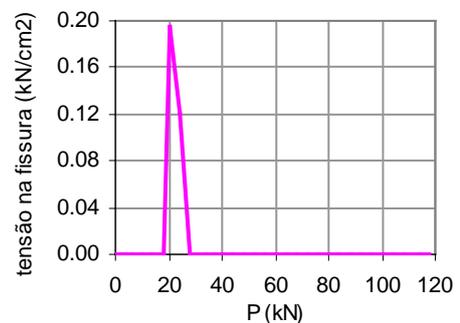


Figura 16: Tensão transmitida na fissura x carga aplicada.

Na figura 17, comparam-se as tensões nos estribos, obtidas pelo modelo proposto e experimentalmente, Ref. [7]. Os valores analisados são as tensões médias, na altura da alma, de quatro estribos posicionados entre 38 e 71 cm a partir do apoio.

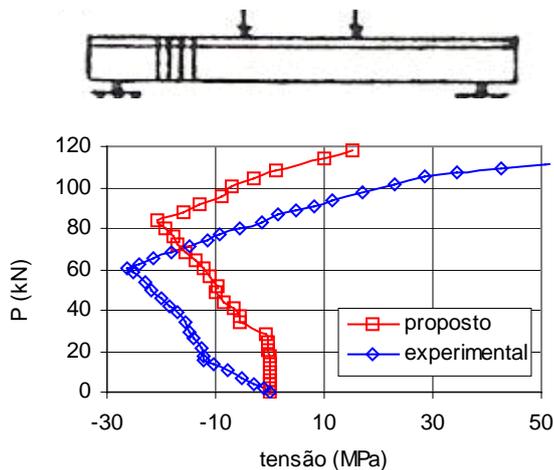


Figura 17: Comparação das tensões nos estribos, obtidas experimentalmente e pelo modelo proposto.

Finalmente, nas figuras 18 e 19 comparam resultados obtidos através do modelo proposto e experimentalmente, Ref. [7], para os valores de abertura de fissuras, na região compreendida entre o apoio e a carga concentrada.

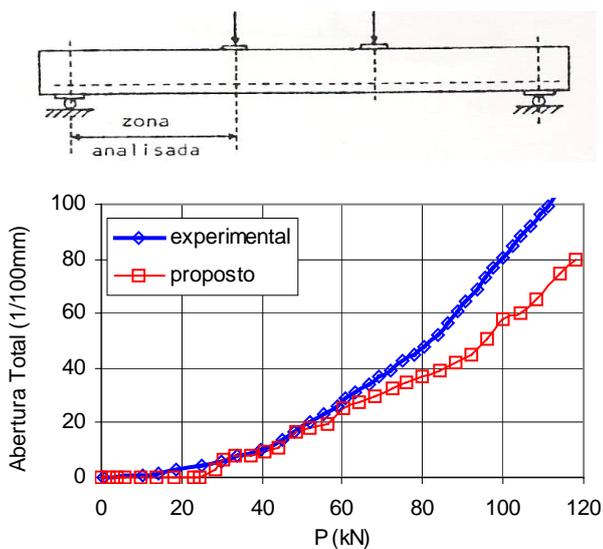


Figura 18: Abertura total das fissuras, obtidas experimentalmente e pelo modelo proposto.

Na fig. 18, os valores correspondem a abertura total de fissuras (somatório de todas as aberturas de fissura), enquanto que na figura 19, analisam-se os valores da máxima abertura de fissura. Os valores correspondem a aberturas de fissuras na altura da armadura tracionada.

A diferença de valores para a máxima abertura de fissuras, encontrada no trecho entre 30 e 60kN, na figura 19, pode ser explicada pelo fato da quantidade de fissuras determinada pelo algoritmo

numérico para cada elemento ser menor que 1 para

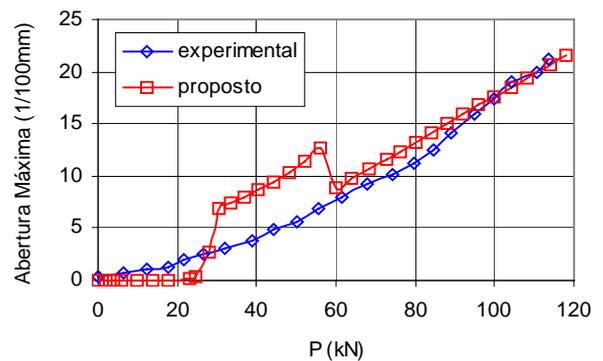


Figura 19: Aberturas máximas de fissura, obtidas experimentalmente e pelo modelo proposto.

Já as outras três vigas analisadas (ET2, ET3 e ET4), são consideravelmente mais esbeltas que a viga ET1, pois apresentam larguras da alma menores.

Devido às condições de geometria e carregamento, elas apresentam um estado de tensões mais complexo ao longo da alma. Assim, nesse caso, o modelo numérico proposto não foi capaz de simular a evolução da flecha até a ruptura.

Contudo, os resultados obtidos até a carga de 50kN, aproximadamente metade da carga de ruptura das vigas, são coerentes com os resultados obtidos experimentalmente, como mostram as figuras 20 a 22.

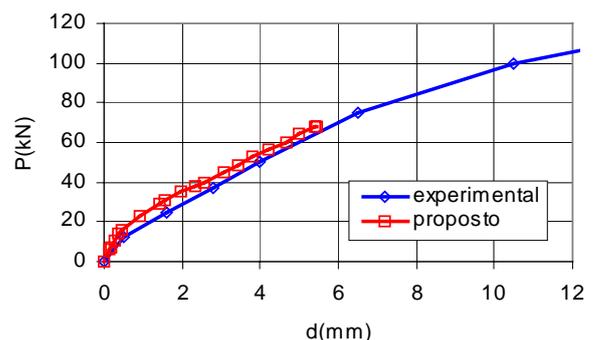


Figura 20: Flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais - ET2.

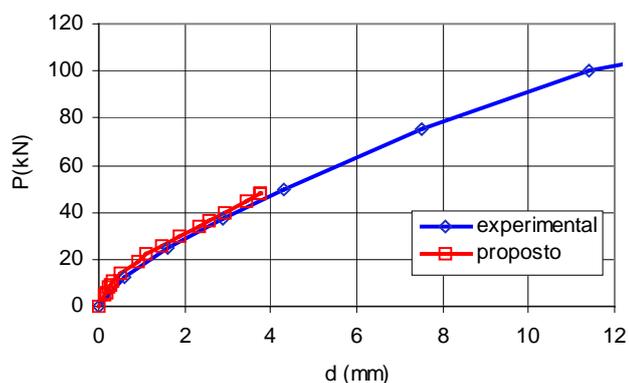


Figura 21: Flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais - ET3.

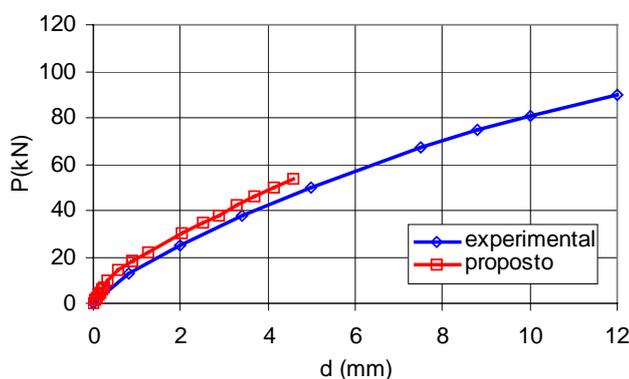


Figura 22: Flechas obtidas experimentalmente e pelos modelos computacionais - ET4.

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentou-se um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, para simulação do comportamento de fissuração de peças de concreto armado submetidas aos esforços de corte e flexão, através de um modelo de fissura do tipo incorporada.

Da análise dos resultados anteriores, pode-se afirmar que o modelo proposto é capaz de simular de forma correta o comportamento de peças de concreto armado fletidas, alcançando uma boa aproximação frente aos resultados experimentais analisados, considerando a variabilidade inerente ao comportamento destas estruturas. Esta concordância é uma forma de validar o modelo.

Na análise numérica do comportamento de vigas isostáticas de concreto armado, o modelo simula de forma correta não só a flecha no meio do vão, mas também a evolução da tensão nas barras da armadura longitudinal e transversal e da tensão do concreto, ao longo do carregamento.

Outra constatação é que o modelo consegue representar de forma correta a existência de mais de uma zona de fissuração independente ao longo da peça de concreto armado. Desta forma, não há limitações em relação à malha de elementos finitos empregada, possibilitando as barras de armadura ocuparem qualquer posição dentro da malha de elementos finitos.

O modelo também é capaz de representar a transferência de tensão por aderência, não só em fissuras normais ao eixo longitudinal das barras da armadura, mas também em fissuras inclinadas, bem como a influência dos estribos no processo de fissuração.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES pelos recursos financeiros obtidos.

## REFERÊNCIAS

1. d'Avila, V.M.R. *Estudo sobre Modelos de Fissuração de Peças de Concreto Armado via Método dos Elementos Finitos*, Tese (Doutorado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2003.
2. Dvorkin, E.N., Cuitiño, A.M., Gioia, G. Finite Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines Insensitive to Mesh Size and Distorsions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.30, pp.541-564, 1990.
3. Dvorkin, E.N., Assanelli, A.P. 2D Finite-Elements with Displacement Interpolated Embedded Localization Lines - The Analysis of Fracture in Frictional Materials, *Comput Method Appl Mec*, vol. 90: (1-3), pp. 829-844. 1991.
4. Dvorkin, E. N., Vassolo, S. A quadrilateral 2-D finite element based on mixed interpolation of tensorial components, *Engineering Computations*, vol.6, pp.217-224, 1989.
5. Elwi, A.E., Hrudrey, M. Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, v.115, n.4, p.740-754, New York, 1989.
6. FIB. *Bond of Reinforcement in concrete*. Bulletin d'Information de la Federation Internationale du Beton, n.10, Lausanne, Switzerland, 2000.

7. Leonhardt, F., Walther, R. Beiträge zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetonbau, *Beton- und Stahlbetonbau*, v.57, n.7, p.161-173, Berlin,1962.
8. Ottosen, N.S. A Failure Criterion for Concrete, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.103, n.EM4, p.527-535, New York, 1977.
9. Ottosen, N.S. Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.105, n.EM1, p.127-142, New York, 1979.
10. Russo, G., Zingone, G., Romano, F. Analytical Solution for Bond-Slip of Reinforcing Bars in R. C. Joints, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 116: (2), pp. 336-355, 1990.
11. Russo, G., Romano, F. Cracking Response of RC Members Subjected to Uniaxial Tension, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol. 118: (5), pp. 1172-1190, 1992.