

Variância estatística associada a métodos semi-empíricos para estimativa da capacidade de carga de estacas

Statistical variance associated with semi-empirical methods for estimating the bearing capacity of piles

Antônio Marcos de Lima Alves

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica
Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande, RS
e-mail: antonioalves@furg.br*

Thiago Amadori

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica
Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande, RS
e-mail: thiagoamadori@gmail.com*

RESUMO: O presente trabalho tem por objetivo a dedução de expressões para o cálculo da variância estatística associada a dois dos principais métodos semi-empíricos utilizados no Brasil, para a estimativa da capacidade de carga de estacas. Estas expressões são úteis na estimativa da distribuição de capacidade de carga “a priori” para um dado projeto de fundações. Como resultado secundário, demonstra-se matematicamente a possibilidade de cálculo da capacidade de carga por atrito lateral, através do método de Décourt e Quaresma, de forma cumulativa, aos moldes do procedimento adotado no método de Aoki e Velloso.

ABSTRACT: This work deals with the deduction of expressions for calculating the statistical variance associated with two semi-empirical methods used in Brazil to estimate the bearing capacity of piles. These expressions are useful in estimating the "a priori" distribution of bearing capacity for a given job. As a byproduct, it is demonstrated mathematically the possibility of calculating the shaft bearing capacity cumulatively, using the Décourt and Quaresma method, the same procedure adopted by the Aoki and Velloso method.

1. INTRODUÇÃO

Confiabilidade, segundo Harr [8], é a avaliação probabilística da possibilidade do desempenho adequado de um sistema, por um período específico de tempo, em condições operacionais pré-definidas.

A confiabilidade de um sistema pode ser medida pela relação entre a sua capacidade e a sua demanda. Porém, em Engenharia, todo projeto geralmente tem de lidar com certos graus de incerteza, associados tanto à capacidade (reações) quanto à demanda (ações). Se a capacidade e a demanda de um sistema forem tratadas como variáveis aleatórias, incorporando assim suas incertezas associadas, pode-se estimar, além dos

tradicionais fatores de segurança, o chamado índice de confiabilidade, relacionado a uma probabilidade de falha (Ang e Tang [1], Harr [8]).

A área de Geotecnia e, mais especificamente, de Engenharia de Fundações, vem gradativamente incorporando o conceito de confiabilidade a seus estudos. A proposta de Aoki [2] e os trabalhos de Oliveira [10], Silva [12], Silva [13], Santos [11], Cabral [5] e Magalhães [9] são exemplos dos esforços atualmente empreendidos no sentido de tratar as incertezas inerentes ao projeto de fundações de uma maneira mais racional.

A norma NBR 6122 [4] aponta para a importância do controle executivo e da realização de ensaios nas estacas, visando a redução das incertezas associadas à capacidade de carga.

Dentro deste contexto, os trabalhos específicos de Santos [11], Cabral [5] e Magalhães [9] exploram metodologias para atualização da distribuição de probabilidade da capacidade de carga estimada na fase de projeto (capacidade “a priori”), com base em resultados de controle de execução, ensaios de carregamento dinâmico e provas de carga estática realizados durante a fase executiva da obra. A distribuição atualizada de capacidade de carga (capacidade “a posteriori”) é obtida através da aplicação do teorema de Bayes (para uma revisão acerca deste teorema, ver, por exemplo, Harr [8]).

O presente trabalho busca contribuir para o corpo de conhecimento relacionado à confiabilidade de fundações. O artigo tem por objetivo a dedução de expressões para o cálculo da variância associada a dois dos principais métodos semi-empíricos utilizados no Brasil, baseados no ensaio SPT (“Standard Penetration Test”), para a estimativa da capacidade de carga de estacas. Estas expressões são úteis na estimativa da distribuição de capacidade de carga “a priori” para um dado projeto de fundações. Como resultado secundário, demonstra-se matematicamente a possibilidade de cálculo da capacidade de carga por atrito lateral, através do método de Décourt e Quaresma [7], de forma cumulativa, aos moldes do procedimento adotado no método de Aoki e Velloso [3].

2. MÉTODO DO SEGUNDO MOMENTO DE PRIMEIRA ORDEM

Conforme resumido em Harr [8], existem diversos métodos para a medida da distribuição de probabilidade de funções de variáveis aleatórias, como, por exemplo, o método de Monte Carlo, o método das estimativas pontuais, e o método do segundo momento de primeira ordem (em inglês, “first-order, second-moment method” ou “FOSM method”). Este último método será abordado no presente trabalho.

Seja $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ uma função de n variáveis aleatórias não correlacionadas. Se os dois primeiros momentos probabilísticos das variáveis (média e variância) são conhecidos, os dois primeiros momentos probabilísticos de f podem ser estimados a partir da expansão da função f em série de Taylor, ao redor dos pontos correspondentes às médias das variáveis.

Truncando a série de Taylor após os termos de primeiro grau (uma aproximação de primeira ordem, portanto), o valor esperado e a variância de

f podem ser estimados a partir do valor esperado e da variância das variáveis aleatórias, de acordo com as seguintes expressões:

$$E[f] \cong f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n) \quad (1)$$

$$V[f] \cong \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot V[x_i] \right] \quad (2)$$

onde $\bar{x}_n = E[x_n]$ é o valor esperado ou média e $V[x_n]$ é a variância da variável aleatória x_n . Todas as derivadas são avaliadas para os valores médios de todas as variáveis aleatórias contidas em suas expressões.

3. ESTIMATIVA DA CAPACIDADE DE CARGA DE ESTACAS

A capacidade (geotécnica) de carga vertical de uma estaca isolada pode ser representada pela soma de dois termos:

$$Q_u = Q_b + Q_s \quad (3)$$

onde Q_u é a capacidade de carga vertical, Q_b é parcela de resistência oferecida pela ponta da estaca, e Q_s é a parcela de resistência oferecida por atrito ao longo da superfície lateral da estaca.

Uma forma simplificada de análise da capacidade de carga consiste em subdividir a estaca em n segmentos, tão pequenos quanto se queira, e não necessariamente idênticos (Figura 1).

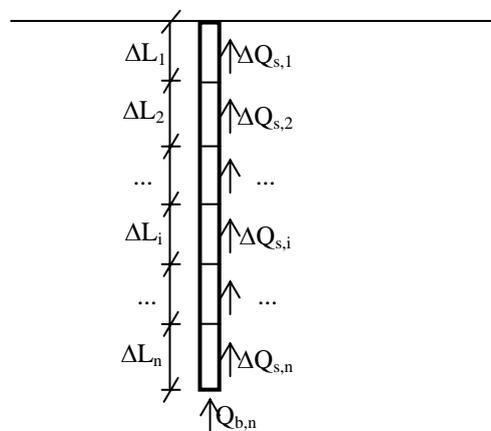


Figura 1 – Discretização das forças resistivas atuantes em uma estaca

A parcela de resistência oferecida pela ponta da estaca será aquela gerada na base do segmento n ($Q_{b,n}$). A parcela de resistência oferecida por atrito lateral será igual ao somatório das contribuições individuais de cada segmento ($\Delta Q_{s,i}$), desde o segmento 1 até o segmento n . Portanto, a capacidade de carga da estaca, subdividida em n segmentos, será:

$$Q_{u,n} = Q_{b,n} + Q_{s,n} = Q_{b,n} + \sum_{i=1}^n \Delta Q_{s,i} \quad (4)$$

Admitindo-se por hipótese que $Q_{b,n}$ e $\Delta Q_{s,i}$ são variáveis aleatórias estatisticamente independentes entre si, pode-se escrever:

$$E[Q_{u,n}] = \bar{Q}_{u,n} = \bar{Q}_{b,n} + \sum_{i=1}^n \bar{\Delta Q}_{s,i} \quad (5)$$

$$V[Q_{u,n}] = V[Q_{b,n}] + \sum_{i=1}^n V[\Delta Q_{s,i}] \quad (6)$$

As parcelas de capacidade de carga Q_b e Q_s podem ser estimadas por meio de métodos teóricos, semi-empíricos e numéricos (Velloso e Lopes [14]). Serão abordados neste trabalho dois métodos semi-empíricos, baseados em resultados de ensaios de prospecção geotécnica do tipo SPT (“Standard Penetration Test”): o método de Aoki e Velloso [3] e o método de Décourt e Quaresma [7].

Resumidamente, o ensaio SPT consiste na cravação de um amostrador padrão, utilizando-se um martelo caindo de uma altura de queda especificada. A cada metro de profundidade, mede-se um índice de resistência definido pelo número de golpes necessários para a cravação do amostrador ao longo de 30 cm.

Este índice, chamado de N_{SPT} , pode estar associado a variabilidades de diversos tipos, principalmente relacionadas à manutenção e padronização dos equipamentos e ao correto atendimento aos procedimentos normatizados de ensaio. Também a heterogeneidade espacial do solo tem influência na dispersão observada em certas campanhas de ensaios SPT.

4. MÉTODO DE AOKI E VELLOSO

Aoki e Velloso [3] propõem que a capacidade de carga na ponta de uma estaca possa ser estimada pela seguinte expressão:

$$Q_{b,n} = \frac{A_b \cdot k}{F1} \cdot N_{b,n} \quad (7)$$

onde A_b é a área da base da estaca, k é um fator relacionado ao tipo de solo onde a ponta da estaca está imersa, $F1$ é um fator relacionado ao tipo de estaca, e $N_{b,n}$ é a média aritmética entre o valor do N_{SPT} medido na profundidade anterior à posição da ponta da estaca, na profundidade da ponta e na profundidade posterior à posição da ponta da estaca:

$$N_{b,n} = \frac{N_{n-1} + N_n + N_{n+1}}{3} \quad (8)$$

Admitindo-se que as variáveis aleatórias são os valores de N_{SPT} , e aplicando-se o método “FOSM” (Equações 1 e 2), podem-se obter as expressões para a média e a variância de $Q_{b,n}$:

$$E[Q_{b,n}] = \bar{Q}_{b,n} = \frac{A_b \cdot k}{F1} \cdot \bar{N}_{b,n} \quad (9)$$

$$V[Q_{b,n}] = \left(\frac{A_b \cdot k}{F1} \right)^2 \cdot V[N_{b,n}] \quad (10)$$

Se N_{n-1} , N_n e N_{n+1} forem variáveis aleatórias estatisticamente independentes, pode-se escrever também:

$$E[N_{b,n}] = \bar{N}_{b,n} = \frac{\bar{N}_{n-1} + \bar{N}_n + \bar{N}_{n+1}}{3} \quad (11)$$

$$V[N_{b,n}] = \left(\frac{1}{3} \right)^2 (V[N_{n-1}] + V[N_n] + V[N_{n+1}]) \quad (12)$$

Para a estimativa da capacidade de carga por atrito lateral, Aoki e Velloso [3] sugerem um procedimento cumulativo, onde a parcela de atrito lateral em cada trecho da estaca pode ser estimada a partir da seguinte expressão:

$$\Delta Q_{s,i} = \frac{U \cdot \Delta L_i \cdot \alpha \cdot k}{F2} \cdot N_i \quad (13)$$

onde U é o perímetro da estaca, α e k são fatores relacionados ao tipo de solo onde o trecho da estaca está imerso, $F2$ é um fator relacionado ao tipo de estaca, e N_i é o valor do N_{SPT} medido na profundidade onde o trecho da estaca está localizado.

Admitindo-se mais uma vez que as variáveis aleatórias são os valores de N_{SPT} , e aplicando-se o método "FOSM", podem-se obter as expressões para a média e a variância de $\Delta Q_{s,i}$:

$$E[\Delta Q_{s,i}] = \overline{\Delta Q_{s,i}} = \frac{U \cdot \Delta L_i \cdot \alpha \cdot k}{F2} \cdot \bar{N}_i \quad (14)$$

$$V[\Delta Q_{s,i}] = \left(\frac{U \cdot \Delta L_i \cdot \alpha \cdot k}{F2} \right)^2 \cdot V[N_i] \quad (15)$$

O limite superior para os valores de N_{SPT} , indicado por Aoki e Velloso [3], é 50.

5. MÉTODO DE DÉCOURT E QUARESMA

As expressões expostas a seguir, componentes do método de Décourt e Quaresma [7] (e também Décourt [6]), são válidas quando adotam-se o kilonewton como unidade de força e o metro como unidade de comprimento.

A capacidade de carga na ponta de uma estaca é estimada da seguinte forma:

$$Q_{b,n} = A_b \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot N_{b,n} \quad (16)$$

onde C_1 é um fator relacionado ao tipo de solo onde a ponta da estaca está imersa, e C_2 é um fator relacionado ao tipo de solo e ao tipo de estaca. Os demais parâmetros (A_b e $N_{b,n}$) já foram descritos anteriormente.

Aplicando-se o método "FOSM", podem-se obter as expressões para a média e a variância de $Q_{b,n}$:

$$E[Q_{b,n}] = \bar{Q}_{b,n} = A_b \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \bar{N}_{b,n} \quad (17)$$

$$V[Q_{b,n}] = (A_b \cdot C_1 \cdot C_2)^2 \cdot V[N_{b,n}] \quad (18)$$

Os resultados expressos em (17) e (18) coincidem com as expressões anteriormente deduzidas por Cabral [5].

Décourt e Quaresma [7] e Décourt [6] sugerem o cálculo da capacidade de carga total por atrito lateral, conforme a seguinte expressão:

$$Q_{s,n} = 10 \cdot C_3 \cdot U \cdot L_n \cdot \left(\frac{N_{s,n}}{3} + 1 \right) \quad (19)$$

onde C_3 é um fator relacionado ao tipo de solo e ao tipo de estaca (admitido como constante ao longo da estaca), L_n é o comprimento total da estaca, U é o perímetro da estaca, e $N_{s,n}$ é o valor médio de N_{SPT} ao longo do comprimento da estaca, excluídos os valores de N_{SPT} utilizados no cálculo de $N_{b,n}$. Assim:

$$N_{s,n} = \frac{\sum_{j=1}^{n-2} (N_j)}{n-2}, \quad \text{para } n > 2 \quad (20)$$

Devido ao limite inferior para o valor de n , imposto pela Equação (20), todas as equações subsequentes são válidas para n maior do que 2. Portanto, nos dois primeiros trechos da estaca, a parcela de capacidade por atrito lateral não é calculada.

Um procedimento de cálculo muito frequente consiste em subdividir a estaca em n segmentos de igual comprimento ΔL (em geral igual a 1,0 metro, que é a distância entre as medidas de N_{SPT}). Assim:

$$L_n = n \cdot \Delta L \quad (21)$$

Portanto:

$$Q_{s,n} = 10 \cdot C_3 \cdot U \cdot n \cdot \Delta L \cdot \left[\frac{\sum_{j=1}^{n-2} (N_j)}{3 \cdot (n-2)} + 1 \right] \quad (22)$$

Ou:

$$Q_{s,n} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot n \cdot \Delta L}{3 \cdot (n-2)} \left[\sum_{j=1}^{n-2} (N_j) + 3 \cdot (n-2) \right] \quad (23)$$

Utilizando-se as regras dos somatórios, pode-se escrever:

$$3 \cdot (n-2) = \sum_{j=1}^{n-2} (3) \quad (24)$$

Substituindo-se (24) em (23), obtém-se:

$$Q_{s,n} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot n \cdot \Delta L}{3 \cdot (n-2)} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n-2} (N_j + 3) + \sum_{j=1}^{n-2} (3) \right] \quad (25)$$

Ou ainda:

$$Q_{s,n} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot n \cdot \Delta L}{3 \cdot (n-2)} \cdot \sum_{j=1}^{n-2} (N_j + 3) \quad (26)$$

A Equação (26) representa a capacidade de carga total por atrito lateral de uma estaca na profundidade n. É possível obter a capacidade de carga por atrito lateral caso a estaca tivesse um segmento a menos, ou seja, se ela tivesse sua ponta localizada na profundidade n-1:

$$Q_{s,n-1} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot (n-1) \cdot \Delta L}{3 \cdot (n-3)} \cdot \sum_{j=1}^{n-3} (N_j + 3) \quad (27)$$

Assim, o acréscimo de capacidade de carga, por atrito lateral, ocorrido entre as profundidades n-1 e n pode ser calculado:

$$\Delta Q_{s,n} = Q_{s,n} - Q_{s,n-1} \quad (28)$$

E portanto:

$$\Delta Q_{s,n} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot \Delta L}{3} \cdot \left[\frac{n}{(n-2)} \cdot \sum_{j=1}^{n-2} (N_j + 3) - \frac{(n-1)}{(n-3)} \cdot \sum_{j=1}^{n-3} (N_j + 3) \right] \quad (29)$$

Desenvolvendo a expressão, vem:

$$\Delta Q_{s,n} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot \Delta L}{3} \cdot \left[\frac{n}{(n-2)} \cdot \left((N_{n-2} + 3) + \sum_{j=1}^{n-3} (N_j + 3) \right) - \frac{(n-1)}{(n-3)} \cdot \sum_{j=1}^{n-3} (N_j + 3) \right] \quad (30)$$

$$\Delta Q_{s,n} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot \Delta L}{3} \cdot \left[\frac{n}{(n-2)} \cdot (N_{n-2} + 3) + \left(\frac{n}{(n-2)} - \frac{(n-1)}{(n-3)} \right) \cdot \sum_{j=1}^{n-3} (N_j + 3) \right] \quad (31)$$

$$\Delta Q_{s,n} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot \Delta L}{3} \cdot \left[\frac{n}{(n-2)} \cdot (N_{n-2} + 3) - \frac{2}{(n-2) \cdot (n-3)} \cdot \sum_{j=1}^{n-3} (N_j + 3) \right] \quad (32)$$

A Equação (32) pode ser generalizada para qualquer segmento i da estaca (Figura 1), da seguinte forma:

$$\Delta Q_{s,i} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot \Delta L}{3} \cdot \left[\frac{i}{(i-2)} \cdot (N_{i-2} + 3) - \frac{2}{(i-2) \cdot (i-3)} \cdot \sum_{j=1}^{i-3} (N_j + 3) \right] \quad (33)$$

Os resultados expressos pelas Equações (32) e (33) demonstram que o cálculo de capacidade por atrito lateral, através do método de Décourt e Quaresma [7] e Décourt [6], pode ser realizado de forma cumulativa, aos moldes do procedimento adotado por Aoki e Velloso [3].

Admitindo-se que as variáveis aleatórias são os valores de N_{SPT} , e aplicando-se o método “FOSM”, podem-se obter as expressões para a média e a variância de $\Delta Q_{s,i}$:

$$E[\Delta Q_{s,i}] = \overline{\Delta Q_{s,i}} = \frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot \Delta L}{3} \cdot \left[\frac{i}{(i-2)} \cdot (\overline{N}_{i-2} + 3) - \frac{2}{(i-2) \cdot (i-3)} \cdot \sum_{j=1}^{i-3} (\overline{N}_j + 3) \right] \quad (34)$$

$$V[\Delta Q_{s,i}] = \left(\frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot \Delta L}{3} \cdot \frac{i}{(i-2)} \right)^2 \cdot V[N_{i-2}] + \sum_{j=1}^{i-3} \left[\left(\frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot \Delta L}{3} \cdot \frac{2}{(i-2) \cdot (i-3)} \right)^2 \cdot V[N_j] \right] \quad (35)$$

O segundo termo da Equação (35), formado por um somatório, tende a zero à medida que o valor de i aumenta, ou seja, à medida que se tomam trechos mais profundos da estaca para o cálculo de $\Delta Q_{s,i}$. Se este termo for desprezado:

$$V[\Delta Q_{s,i}] \cong \left(\frac{10 \cdot C_3 \cdot U \cdot \Delta L}{3} \cdot \frac{i}{(i-2)} \right)^2 \cdot V[N_{i-2}] \quad (36)$$

Ressalte-se que os resultados expressos em (34), (35) e (36) são diferentes de expressões análogas deduzidas anteriormente por Cabral [5].

Décourt e Quaresma [7] e Décourt [6] indicam 50 como limite superior para os valores de N_{SPT} , e 3 como limite inferior.

6. CONCLUSÕES

Foram deduzidas as expressões para o cálculo da variância estatística associada aos métodos de Aoki e Velloso [3] e Décourt e Quaresma [7]. Estes dois métodos semi-empíricos, baseados no ensaio SPT (“Standard Penetration Test”), são muito utilizados no Brasil para a estimativa da capacidade de carga de estacas. O cálculo da variância é útil para a estimativa da distribuição de

capacidade de carga “a priori” para um dado projeto de fundações, levando em conta a variabilidade associada aos resultados do ensaio SPT.

Como resultado secundário, foi demonstrada matematicamente a possibilidade de cálculo da capacidade de carga por atrito lateral, através do método de Décourt e Quaresma [7], de forma cumulativa, aos moldes do procedimento adotado no método de Aoki e Velloso [3].

REFERÊNCIAS

1. Ang, A.H-S.; Tang, W.H. - *Probability concepts in engineering planning and design: decision, risk and reliability*. New York, John Wiley, Vol. 2, 1984.
2. Aoki, N. - *Probabilidade de falha e carga admissível de fundação por estacas*. Revista Militar de Ciência e Tecnologia, Vol. XIX, p.48-64, 2002.
3. Aoki, N.; Velloso, D.A. - *An approximate method to estimate the bearing capacity of piles*. Proceedings, 5th Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Buenos Aires, Vol. 1, p.367-376, 1975.
4. Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Projeto e Execução de Fundações*. NBR-6122. Outubro, 2010.
5. Cabral, E.V. - *Contribuição à confiabilidade de estacas cravadas através de um estudo de caso com aplicação da teoria Bayesiana*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UERJ, Rio de Janeiro, 2008.
6. Décourt, L. - *Prediction of the bearing capacity of piles based exclusively on N values of the SPT*. Proceedings, 2nd European Symposium of Penetration Testing, Amsterdam, 1982.
7. Décourt, L.; Quaresma Filho, A.R. - *Capacidade de carga de estacas a partir de valores de SPT*. Anais, 6^o Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Engenharia de Fundações, Rio de Janeiro, Vol. 1, p.45-53, 1978.
8. Harr, M.E. - *Reliability-based design in civil engineering*. New York, McGraw-Hill, 1987.
9. Magalhães, F.C. - *Análise das fundações da obra de modernização do cais do Porto Novo de Rio Grande (RS) aplicando metodologia Bayesiana*. Dissertação de mestrado, Programa

- de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, FURG, Rio Grande, 2011.
- 10.Oliveira, S.K.F. – *Contribuição ao estudo da verificação da segurança das fundações profundas*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, EE-USP, São Carlos, 1998.
 - 11.Santos, M.S. – *Inferência Bayesiana na avaliação da segurança de fundações em estacas de deslocamento*. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica, USP, São Paulo, 2007.
 - 12.Silva, F.C. – *Análise de segurança e confiabilidade de fundações profundas em estacas*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, EE-USP, São Carlos, 2003.
 - 13.Silva, J.L. – *Metodologia de projeto de fundações por estacas incluindo probabilidade de ruína*. Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, EE-USP, São Carlos, 2006.
 - 14.Velloso, D.A.; Lopes, F.R. – *Fundações*. São Paulo, Oficina de Textos, Vol. 2, 2010.