

Método simplificado para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis: validação por meio da análise não linear

Simplified method for calculation of solid slabs supported on flexible beams: validation through the non-linear analysis

José Milton de Araújo

Escola de Engenharia da FURG – Rio Grande, RS

e-mail: ed.dunas@mikrus.com.br

RESUMO: O objetivo deste trabalho é demonstrar a validade do método simplificado proposto pelo Autor para cálculo de lajes maciças de concreto armado apoiadas em vigas flexíveis. Esse método simplificado foi validado anteriormente, por comparação com resultados numéricos obtidos através de uma análise linear elaborada com o emprego do método dos elementos finitos. Neste trabalho, emprega-se um modelo não linear para a análise integrada de pisos de concreto armado, constituídos por lajes maciças apoiadas em vigas. Esse modelo não linear é utilizado como referência para confirmar a validade do método simplificado proposto.

ABSTRACT: The subject of this work is to demonstrate the validity of the simplified method proposed by the Author for design of reinforced concrete solid slabs supported on flexible beams. This simplified method was validated previously, by its comparison with numerical results obtained through a linear analysis based on the finite element method. In this work, a non-linear model is employed for analysis of reinforced concrete floors, constituted by solid slabs supported on beams. This non-linear model is used as reference to confirm the validity of the simplified method proposed.

1. INTRODUÇÃO

Em artigo anterior [1], foi feita uma análise elástica linear de pavimentos de concreto armado, constituídos por lajes maciças apoiadas em vigas deformáveis. Para a realização dessa análise acoplada do sistema laje-vigas, foi empregado um programa de computador desenvolvido com base no método dos elementos finitos (MEF).

Na formulação do MEF, as lajes são discretizadas em elementos finitos isoparamétricos quadráticos de 8 nós, conforme descrito nas referências [2,3]. A formulação do elemento é baseada na teoria de placas de Mindlin. As vigas são discretizadas com elementos finitos de três nós, formulados com base na teoria de vigas de Timoshenko, conforme descrito na referência [4].

Nessa análise numérica, considerou-se que as lajes estivessem no estágio I. Para as vigas, foram consideradas duas situações: vigas no estágio I, com rigidez à flexão $E_{cs}I$, e vigas no estágio II com uma rigidez reduzida $0,4E_{cs}I$, conforme

sugerido na NBR-6118[5], onde I é o momento de inércia da seção de concreto simples e E_{cs} é o módulo de deformação longitudinal secante do concreto.

Além disso, foram feitas duas considerações quanto à rigidez à torção das vigas: vigas sem rigidez à torção e vigas com rigidez à torção GJ , onde $G = 0,5E_{cs}$ é o módulo de elasticidade transversal do concreto e J é a constante de torção da seção transversal da viga.

Esse modelo numérico, baseado no MEF, foi empregado para verificar a precisão de alguns processos simplificados largamente utilizados no projeto das lajes de concreto armado.

Do estudo realizado em [1] conclui-se que o tradicional método de cálculo, que consiste em considerar as lajes isoladas perfeitamente engastadas nas lajes vizinhas, não é adequado para a análise de lajes apoiadas em vigas deformáveis. Esse método só é satisfatório quando as lajes são apoiadas em paredes ou em vigas muito rígidas. Quando as lajes são apoiadas em vigas

deformáveis, como é usual nos pavimentos de edifícios de concreto armado, o método tradicional superestima os momentos negativos e subestima os momentos positivos e as flechas das lajes.

Da análise numérica realizada com o MEF também foram obtidos os seguintes resultados, como sendo representativos das situações frequentemente encontradas nos edifícios:

- a rigidez à torção das vigas pode ser desprezada na análise do pavimento;
- os momentos negativos nos apoios de extremidade das lajes são muito pequenos e podem ser desprezados;
- os momentos torçores nos cantos simplesmente apoiados são pequenos, podendo-se omitir as armaduras de canto na face superior das lajes.

Essas conclusões são restritas às situações usuais, onde as vigas são deformáveis e possuem uma rigidez à torção pequena.

Uma vez constatado que o método tradicional de cálculo não é satisfatório, foi proposto um método simplificado para cálculo das lajes maciças apoiadas em vigas deformáveis. No método proposto, adota-se o seguinte procedimento:

- consideram-se todas as lajes simplesmente apoiadas, para efeito de cálculo dos momentos positivos, flecha e reações de apoio; esse cálculo é feito conforme detalhado na referência [6] para as lajes armadas em cruz e armadas em uma direção;
- em um bordo comum (apoio interno), adota-se um momento negativo de valor absoluto igual ao do maior momento positivo das duas lajes adjacentes, na direção considerada;
- as armaduras de canto e as armaduras negativas nos bordos de extremidade podem, em geral, ser omitidas.

A análise dos resultados obtidos com esse método simplificado proposto mostrou total coerência com os resultados obtidos através do MEF. Além disso, também foi mostrado que o sistema laje-vigas, projetado de acordo com esse procedimento, satisfaz o equilíbrio dos momentos totais, mesmo considerando que as reações de apoio das lajes são uniformemente distribuídas sobre as vigas, o que não ocorre no cálculo tradicional.

Por último, em função dos resultados numéricos obtidos com o MEF, foi sugerido que as armaduras de distribuição das lajes armadas em uma direção também respeitem a armadura mínima.

No presente trabalho, é feita uma ampliação do estudo anteriormente mencionado, para incluir a não linearidade física das lajes de concreto armado. As vigas do pavimento continuam sendo modeladas com uma rigidez à flexão $\beta E_{cs} I$ constante, onde $\beta \leq 1$. A rigidez à torção das vigas é desprezada, em virtude dos resultados obtidos no trabalho anterior [1].

Para a laje, emprega-se um modelo não linear, o qual é associado ao método dos elementos finitos. Os detalhes desse modelo podem ser obtidos nas referências [7,8]. Nas seções seguintes, apresenta-se uma breve descrição do modelo não linear empregado na modelagem das lajes maciças de concreto armado.

2. MODELO LAMINAR PARA ANÁLISE DE LAJES DE CONCRETO ARMADO

Na fig. 1, apresenta-se uma laje maciça de concreto armado situada no plano x-y, onde a espessura h foi dividida em n camadas de concreto de espessura constante $\Delta h = h/n$. A laje pode ter diversas camadas de armadura, orientadas arbitrariamente em relação ao sistema de eixos x-y.

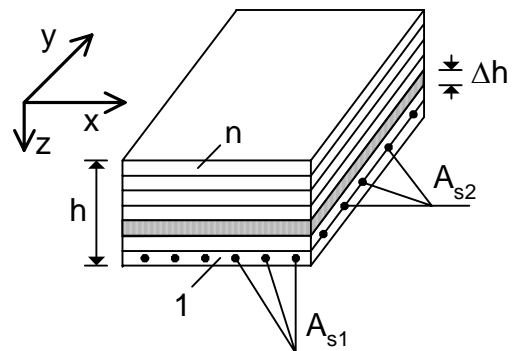


Fig. 1 – Laje maciça de concreto armado

Uma armadura genérica, de área A_{si} por unidade de comprimento, fazendo um ângulo ϕ_{si} com o eixo x, é substituída por uma lâmina contínua de espessura $t_i = A_{si}$.

Na teoria de placas de Mindlin[9], as rotações $\theta_x(x, y)$ e $\theta_y(x, y)$ são independentes da flecha $w(x, y)$ da superfície média da placa. Com isso, são consideradas as deformações por corte da placa. No caso das lajes de concreto armado,

devem-se considerar, ainda, os deslocamentos $u_o(x, y)$ e $v_o(x, y)$ no plano da laje, pois, de um modo geral, a superfície média não coincide com a superfície neutra.

Assim, ao empregar o método dos elementos finitos, consideram-se cinco graus de liberdade para cada nó do elemento: um deslocamento transversal, duas rotações e dois deslocamentos no plano do elemento.

A matriz de rigidez do elemento finito de placa, \mathbf{K}_e , é dada por

$$\mathbf{K}_e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \quad (1)$$

onde a integração é feita ao longo da área A_e do elemento.

Na equação (1), \mathbf{B} é a matriz que relaciona as deformações generalizadas com os deslocamentos nodais e \mathbf{D} é a matriz de constantes elásticas do material, integrada na espessura da laje.

Na montagem de \mathbf{K}_e , pode-se desconsiderar a contribuição das armaduras, pois, como o equilíbrio é garantido através de um processo iterativo, a matriz de rigidez só é empregada para inicializar o processo. As armaduras são incluídas no cálculo das ações nodais não lineares, durante os ciclos iterativos. Desse modo, a matriz \mathbf{D} inclui apenas as propriedades do concreto.

A matriz \mathbf{D} , obtida através de integração exata ao longo da espessura da laje, é dada por

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde a submatriz \mathbf{D}_{11} inclui os termos de estado plano de tensões, \mathbf{D}_{22} inclui os termos de flexão e \mathbf{D}_{33} inclui os termos correspondentes às deformações por corte.

Essas submatrizes dependem da espessura h da laje e das propriedades do concreto: módulo de deformação longitudinal tangente E_c e coeficiente de Poisson ν . Para levar em conta os efeitos da fluência do concreto, considera-se o módulo de deformação efetivo $E_{ce} = E_c / (1 + \varphi)$ no lugar de

E_c , sendo φ o coeficiente de fluência do concreto.

Na submatriz \mathbf{D}_{33} aparece o módulo de deformação transversal $G_{ce} = \frac{E_{ce}}{2(1 + \nu)}$.

Na obtenção da matriz de rigidez do elemento finito, indicada na equação (1), adota-se um processo de integração seletiva. Para os termos correspondentes à submatriz \mathbf{D}_{33} , adota-se integração numérica com 2x2 pontos de Gauss. Os demais termos são integrados com integração completa, adotando-se 3x3 pontos de Gauss ao longo da superfície do elemento finito.

Após a montagem da matriz de rigidez global da estrutura e a introdução das condições de contorno, resolve-se o sistema de equações linearizadas para a obtenção da primeira aproximação para os deslocamentos nodais. O vetor de deformações generalizadas \mathcal{E} , em um ponto de integração situado na superfície de um elemento finito, é igual a $\mathcal{E} = \mathbf{B} \mathbf{U}_e$, onde \mathbf{U}_e representa o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Conhecido \mathcal{E} , podem-se obter as deformações normais ε_x , ε_y e a distorção γ_{xy} no centro de uma camada de concreto genérica, situada ao longo da espessura da laje. As distorções γ_{xz} e γ_{yz} não variam na espessura da laje.

As tensões de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz} são dadas por

$$\tau_{xz} = \frac{5}{6} G_{ce} \gamma_{xz} ; \tau_{yz} = \frac{5}{6} G_{ce} \gamma_{yz} \quad (3)$$

onde G_{ce} é o módulo de elasticidade transversal efetivo do concreto.

Na seção seguinte, apresentam-se os modelos constitutivos para o cálculo das tensões no concreto e nas armaduras, no plano x-y da laje.

3 - MODELOS CONSTITUTIVOS PARA OS MATERIAIS DA LAJE

Na fig. 2, representa-se o diagrama tensão-deformação do concreto, obtido em um ensaio de compressão simples. Nessa figura, f_c corresponde à resistência média à compressão do concreto.

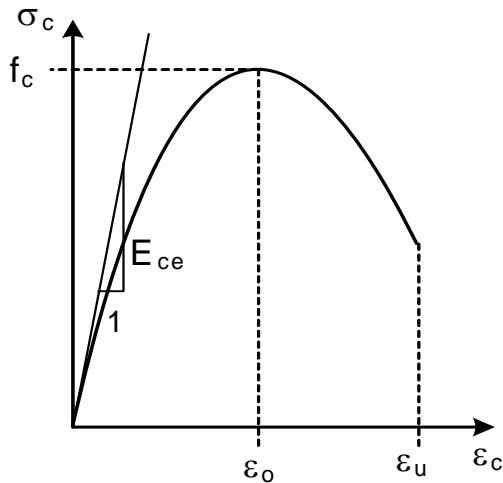


Fig. 2 – Diagrama tensão-deformação do concreto comprimido

De acordo com o CEB/90 [10], a relação tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial pode ser representada por

$$\sigma_c = -f_c \left[\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \right] \quad (4)$$

onde $k = -E_{ce}\epsilon_o/f_c$ e $\eta = \epsilon_c/\epsilon_o$.

Para a deformação ϵ_o , correspondente à máxima tensão, adota-se o valor $\epsilon_o = -0,0022(1+\varphi)$, onde φ é o coeficiente de fluência do concreto. A deformação de ruptura é $\epsilon_u = -0,0035(1+\varphi)$.

O módulo de deformação longitudinal efetivo inicial, E_{ce} , é estimado a partir da resistência média à compressão, f_c , através da expressão

$$E_{ce} = \frac{21500}{(1+\varphi)} (f_c/10)^{1/3} \quad (5)$$

com f_c e E_{ce} em MPa.

De acordo com o CEB/90, a resistência média é dada por $f_c = f_{ck} + 8$ MPa, onde f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto em MPa.

Para o concreto tracionado, adota-se o diagrama tensão-deformação indicado na fig. 3.

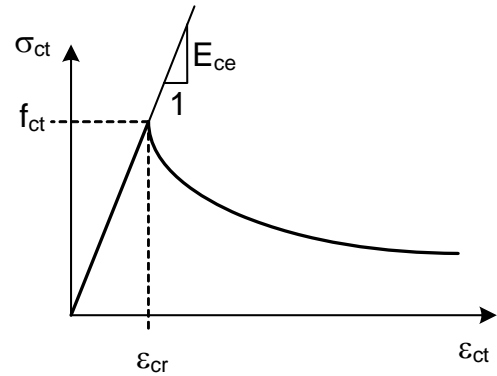


Fig. 3 – Diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado

A tensão de tração no concreto, σ_{ct} , é dada por

$$\sigma_{ct} = E_{ce}\epsilon_{ct}, \text{ se } \epsilon_{ct} \leq \epsilon_{cr} = f_{ct}/E_{ce} \quad (6)$$

$$\sigma_{ct} = f_{ct} \left(\frac{\epsilon_{cr}}{\epsilon_{ct}} \right)^\alpha, \text{ se } \epsilon_{ct} > \epsilon_{cr} \quad (7)$$

onde $\alpha = 0,15f_{ct}$, com f_{ct} em MPa.

A resistência média à tração do concreto, f_{ct} , pode ser estimada [10] a partir da resistência característica à compressão, f_{ck} , através da expressão

$$f_{ct} = 1,40 \left(\frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3} \quad (8)$$

com f_{ck} e f_{ct} em MPa.

A equação (7), desenvolvida pelo Autor [7,8], leva em conta a colaboração do concreto tracionado entre fissuras. Essa equação representa um comportamento pós-fissuração tanto mais frágil, quanto maior for a resistência à tração do concreto.

Após a obtenção das deformações normais ϵ_x , ϵ_y e da distorção γ_{xy} em uma camada genérica, localizada em um ponto de integração na superfície da laje, calculam-se as deformações principais no concreto ϵ_1 e ϵ_2 , com $\epsilon_1 \geq \epsilon_2$. Para levar em conta o efeito de Poisson, empregam-se as deformações uniaxiais equivalentes, ϵ_{1e} e ϵ_{2e} , dadas por

$$\varepsilon_{1e} = \frac{\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2}{1 - \nu^2} ; \varepsilon_{2e} = \frac{\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 - \nu^2} \quad (9)$$

onde $\nu = 0,2$ é o coeficiente de Poisson do concreto.

Entrando com as deformações uniaxiais equivalentes nos diagramas tensão-deformação do concreto, obtêm-se as tensões principais σ_1 e σ_2 . Retornando ao sistema de eixos x-y, resultam as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} no concreto.

Para os aços, adota-se um comportamento elasto-plástico perfeito em tração e em compressão. Assim, se ε_s é a deformação normal na direção das armaduras, a tensão σ_s correspondente é dada por

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s, \text{ se } |\varepsilon_s| < f_{yk} / E_s \quad (10)$$

$$\sigma_s = f_{yk} (\varepsilon_s / |\varepsilon_s|), \text{ se } |\varepsilon_s| \geq f_{yk} / E_s \quad (11)$$

onde f_{yk} é a tensão de escoamento característica e $E_s = 200 \text{ GPa}$ é o módulo de elasticidade do aço.

Definindo o vetor de deformações $\mathcal{E} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$, obtêm-se a deformação normal nas armaduras através da relação $\varepsilon_s = \mathbf{R}_s \mathcal{E}$, onde a matriz de rotação \mathbf{R}_s é dada por

$$\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi_s & \sin^2 \phi_s & \sin \phi_s \cos \phi_s \end{bmatrix} \quad (12)$$

sendo ϕ_s o ângulo entre a direção da armadura e o eixo x.

Após o cálculo da tensão σ_s na armadura, retorna-se ao sistema x-y, obtendo-se as tensões $\{\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \tau_{sxy}\} = \sigma_s \mathbf{R}_s$.

Após o cálculo das tensões no concreto e nas armaduras, efetuam-se as integrações na espessura da laje para a obtenção dos esforços solicitantes. Finalmente, esses esforços são integrados na área do elemento finito, para a obtenção do vetor de ações nodais não lineares. Nesse processo, emprega-se a integração seletiva, adotando-se 2x2 pontos de Gauss, para os termos relativos aos esforços cortantes, e 3x3 pontos de Gauss, para os termos de flexão e estado plano.

As vigas do pavimento são modeladas com uma rigidez à flexão $\beta E_{cs} I$ constante, onde $E_{cs} = 0,85 E_c$ é o módulo secante do concreto e $\beta \leq 1$. Os efeitos da fluência sobre a rigidez das vigas são considerados, indiretamente, através do parâmetro β . A rigidez à torção das vigas é desprezada, em virtude dos resultados obtidos no trabalho anterior [1]. Os efeitos das excentricidades dos eixos das vigas em relação ao plano médio da laje são considerados como em [1].

Em virtude da não linearidade física da laje, resulta um desequilíbrio entre o vetor de cargas nodais e o vetor de ações nodais não lineares, o que exige o emprego de um processo iterativo. Diversos algoritmos iterativos têm sido desenvolvidos para a solução desse sistema de equações não lineares. Neste trabalho, emprega-se o denominado método secante-Newton, como descrito em [11].

Incrementando a carga, pode-se obter uma resposta completa do sistema laje-vigas até a ruína da laje. Neste caso, considera-se a ocorrência da ruína quando a deformação de compressão no concreto da laje, ε_c , for menor que a deformação limite $\varepsilon_u = -0,0035(1 + \varphi)$.

4. EXEMPLO: PAVIMENTO COM QUATRO LAJES DESIGUAIS

O exemplo apresentado a seguir foi analisado no artigo anterior [1], considerando a análise linear. Naquela oportunidade foi mostrado que a espessura $h = 10 \text{ cm}$, adotada para as lajes, era insuficiente para atender ao estado limite de deformações da laje L2. Para isto, essa laje deveria possuir uma espessura de 14 cm.

Desse modo, para simplificar a análise numérica, considera-se que todas as lajes do pavimento indicado na fig. 4 possuam espessura constante $h = 14 \text{ cm}$.

Os seguintes dados são considerados para o cálculo do pavimento:

- Lajes:
 - espessura das lajes: $h = 14 \text{ cm}$
 - peso próprio = $3,5 \text{ kN/m}^2$
 - revestimento = $1,0 \text{ kN/m}^2$
 - carga permanente: $g = 4,5 \text{ kN/m}^2$
 - carga acidental: $q = 1,5 \text{ kN/m}^2$

- carga de serviço total: $p = g + q = 6,0 \text{ kN/m}^2$

- carga quase permanente:

$$p_o = g + 0,3q = 4,95 \text{ kN/m}^2$$

- Vigas:

- seção transversal de todas as vigas: largura $b = 20 \text{ cm}$; altura $h = 50 \text{ cm}$ (seção retangular)

- carga adicional sobre as vigas, decorrente do peso próprio e de uma parede: $\Delta p = 7,0 \text{ kN/m}$

- Concreto:

- resistência característica: $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$

- coeficiente de Poisson: $\nu = 0,2$

- coeficiente de fluência: $\varphi = 2,5$

- resistência média à compressão: $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$

- resistência média à tração: $f_{ct} = 2,9 \text{ MPa}$

- módulo tangente: $E_c = 33550 \text{ MPa}$

- módulo tangente efetivo: $E_{ce} = 9585 \text{ MPa}$

- módulo secante: $E_{cs} = 28517 \text{ MPa}$

- Aço:

- categoria: CA-50

- tensão de escoamento: $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$

- módulo de elasticidade: $E_s = 200 \text{ GPa}$

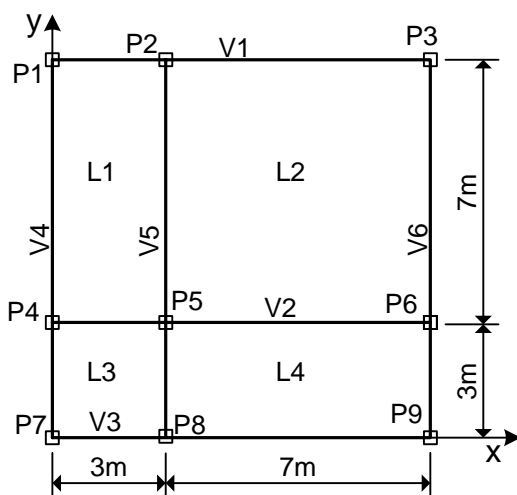


Fig. 4 – Pavimento com quatro lajes (exemplo analisado na ref. [1])

Na fig. 5, apresenta-se a discretização da laje em elementos finitos. A malha é formada por 100 elementos de placa e 60 elementos de viga.

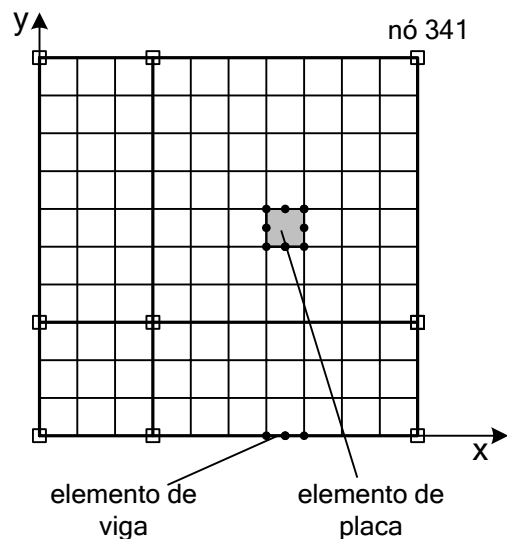


Fig. 5 – Malha de elementos finitos

5. CÁLCULO DAS LAJES COM O MÉTODO SIMPLIFICADO PROPOSTO

No método simplificado proposto, as quatro lajes são calculadas como simplesmente apoiadas. O valor absoluto do momento negativo em uma ligação é admitido igual ao do maior momento positivo das duas lajes adjacentes, na direção considerada.

5.1 Flecha no centro da laje L2

A flecha é calculada para a carga quase permanente $p_o = 4,95 \text{ kN/m}^2$, empregando-se a tabela A2.1 do Volume 2 da ref.[6]. A rigidez à flexão da laje é dada por

$$D = \frac{E_{cs} h^3}{12(1 - \nu^2)} \Rightarrow D = 6792 \text{ kNm}$$

Entrando na tabela A2.1 com a relação entre os vãos $l_x/l_y = 7/7 = 1$, obtém-se o coeficiente $w_c = 4,06$.

A flecha inicial é

$$W_o = 4,06 \times \frac{4,95 \times 7^4}{6792} = 7,1 \text{ mm}$$

A flecha final, incluindo os efeitos da fluência do concreto, é

$$W_\infty = (1 + \varphi)W_o \Rightarrow W_\infty = 24,9 \text{ mm}$$

A flecha admissível é dada por

$$W_{adm} = \frac{7000}{250} = 28 \text{ mm}$$

Como $W_{\infty} < W_{adm}$, conclui-se que a espessura $h = 14 \text{ cm}$ é satisfatória.

5.2 Momentos fletores nas lajes

Os momentos fletores e as reações de apoio das lajes são calculados para a carga total de serviço $p = 6,0 \text{ kN/m}^2$.

Os momentos positivos no centro das lajes L2 e L3 também são obtidos com o emprego da tabela A2.1. Neste caso, obtêm-se os momentos fletores segundo as duas direções.

As lajes L1=L4 são armadas em uma direção. Para essas lajes, calcula-se apenas o momento fletor segundo a direção do vão menor ($l = 3 \text{ m}$) como para uma viga biapoiada. Para a direção do vão maior, adota-se a armadura de distribuição.

Em todos os casos, se o momento fletor calculado for menor que o momento correspondente à armadura mínima, $M_{k,min}$, esse valor é o que deve ser considerado. Isto é feito para todas as lajes, pois, conforme recomendação dada no artigo anterior [1], deve-se respeitar a armadura mínima sempre, inclusive nas armaduras de distribuição.

Conforme foi mostrado no capítulo 4 do Volume 2 da ref. [6], o momento mínimo de serviço por unidade de comprimento é dado por

$$M_{k,min} = \frac{A_{s,min} f_{yd}}{\gamma_f} \left[d - \frac{A_{s,min} f_{yd}}{2b\sigma_{cd}} \right] \quad (13)$$

sendo $A_{s,min} = \rho_{min} 100h$ a área da armadura mínima.

Para um concreto com $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ e aço CA-50, tem-se $\rho_{min} = 0,17\%$, conforme tabela 4.4.1 do Volume 2 [6]. Logo, considerando $h = 14 \text{ cm}$, resulta $A_{s,min} = 2,38 \text{ cm}^2/\text{m}$.

Ao empregar a equação (13), consideram-se os seguintes dados:

- $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15} = 43,48 \text{ kN/cm}^2$ (tensão de escoamento de cálculo do aço);

- $\gamma_f = 1,4$ (coeficiente parcial de segurança);
- $d = 11 \text{ cm}$ (altura útil da laje, considerada igual na duas direções);
- $b = 100 \text{ cm}$ (largura da faixa unitária);
- $\sigma_{cd} = 0,85 \frac{f_{ck}}{1,4} = 1,82 \text{ kN/cm}^2$ (tensão de compressão máxima no concreto).

Substituindo esses valores na equação (13), obtêm-se $M_{k,min} = 792 \text{ kNcm/m}$. Logo, o momento mínimo é $M_{k,min} = 7,92 \text{ kNm/m}$.

Na fig. 6 apresentam-se os momentos positivos de serviço das lajes. Observa-se que apenas a laje L2 terá armadura superior à armadura mínima.

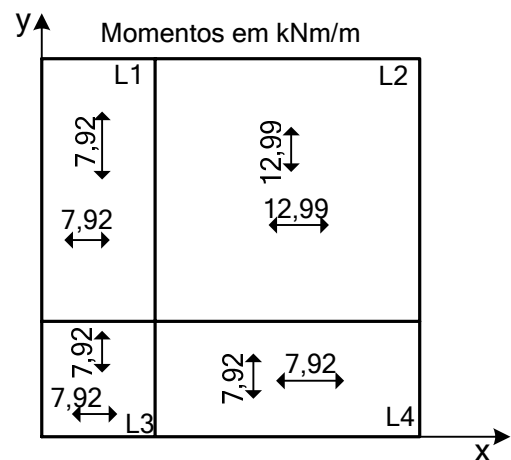


Fig. 6 – Momentos positivos obtidos com o método simplificado

Na fig. 7 apresentam-se os momentos negativos determinados com o método simplificado.

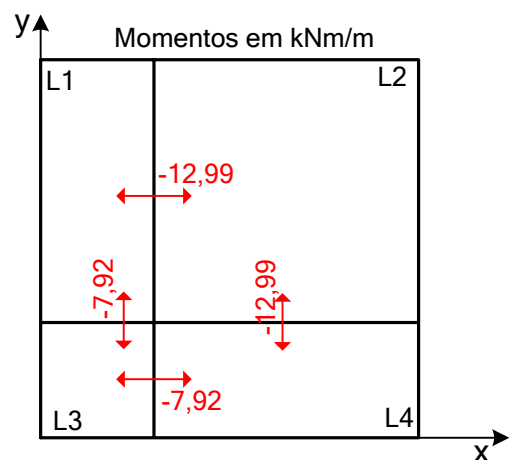


Fig. 7 – Momentos negativos obtidos com o método simplificado

5.3 Armaduras das lajes

As armaduras são dimensionadas, considerando-se a altura útil média $d = 11$ cm. Os resultados do dimensionamento são os seguintes:

- para $M_k = 7,92$ kNm/m: $A_s = 2,38$ cm²/m;
- para $M_k = 12,99$ kNm/m: $A_s = 3,97$ cm²/m.

As armaduras positivas são passadas corridas por toda a extensão das lajes. As armaduras negativas devem penetrar $0,25l_m$ em cada laje, a partir da face da viga interna, onde l_m é o maior dos menores vãos das lajes adjacentes. Assim, essas armaduras serão distribuídas em faixas de 4m de largura, como indicado na fig. 8.

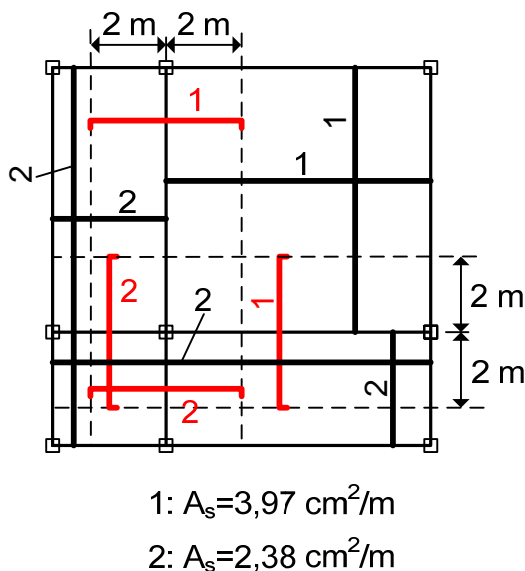


Fig. 8 – Disposição das armaduras no pavimento

6. ANÁLISE INTEGRADA DO PAVIMENTO COM O MODELO NÃO LINEAR

6.1 Flecha e fissuração do pavimento para a carga quase permanente

A flecha máxima do pavimento ocorre na laje L2. Essa flecha é obtida com o modelo não linear (MEF), considerando a carga quase permanente $p_o = 4,95$ kN/m² e as vigas com rigidez à flexão $0,4E_{cs}I$.

A flecha inicial máxima obtida com o MEF é $W_o = 11,4$ mm. Observa-se que essa flecha inicial é

maior que o valor $W_o = 7,1$ mm, obtido anteriormente com o método simplificado. Isto ocorre porque a laje L2 encontra-se fissurada para esse nível do carregamento, o que não é considerado no método simplificado.

Na fig. 9, representam-se os pontos de integração onde se constata a ocorrência de fissura ($\epsilon_{1e} > \epsilon_{cr}$) na face inferior do pavimento para a carga $p_o = 4,95$ kN/m². Observa-se que as fissuras ocorrem em uma grande extensão da laje L2, em sua região central. As demais lajes encontram-se no estádio I.

Na fig. 10, indicam-se os pontos de integração onde se constata fissuras na face superior do pavimento para a carga $p_o = 4,95$ kN/m². Observa-se que surgem fissuras apenas no entorno do pilar central. O restante do pavimento está livre de fissuras, inclusive nos cantos simplesmente apoiados.

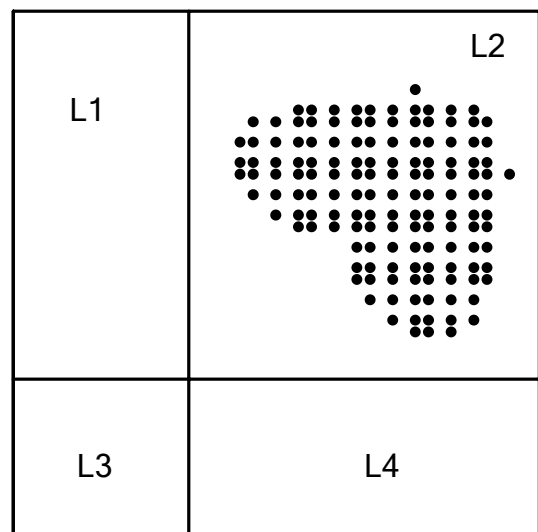


Fig. 9 – Pontos fissurados na face inferior do pavimento para a carga quase permanente

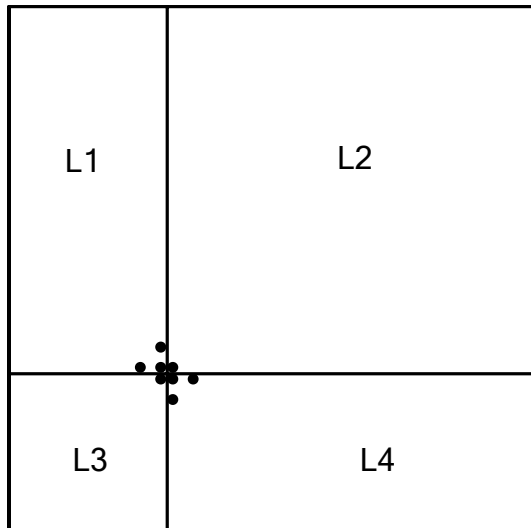


Fig. 10 – Pontos fissurados na face superior do pavimento para a carga quase permanente

A flecha final máxima da laje L2 obtida com o MEF, considerando o coeficiente de fluência $\varphi = 2,5$, é $W_{\infty} = 24,0$ mm.

Observa-se que esse valor é quase igual à flecha final $W_{\infty} = 24,9$ mm, obtida anteriormente com o método simplificado. Conclui-se que o método simplificado para cálculo da flecha final das lajes maciças é adequado. O erro que se comete na avaliação da flecha inicial, por não se considerar eventuais fissuras da laje, é compensado pela consideração da fluência no estágio I. Esse fato já havia sido observado pelo Autor ao analisar o comportamento das lajes nervuradas [7].

Na fig. 11, indicam-se os pontos de integração onde se constatam fissuras na face superior do pavimento para a carga de cálculo $p_d = 1,4 \times 6 = 8,4 \text{ kN/m}^2$ atuando sobre as lajes. Por essa figura constata-se que as únicas armaduras superiores que são realmente necessárias são as armaduras para os momentos negativos, nas ligações entre duas lajes adjacentes. As armaduras superiores nos apoios de extremidade, bem como as armaduras superiores de canto são desnecessárias, como já havia sido concluído no artigo anterior [1].

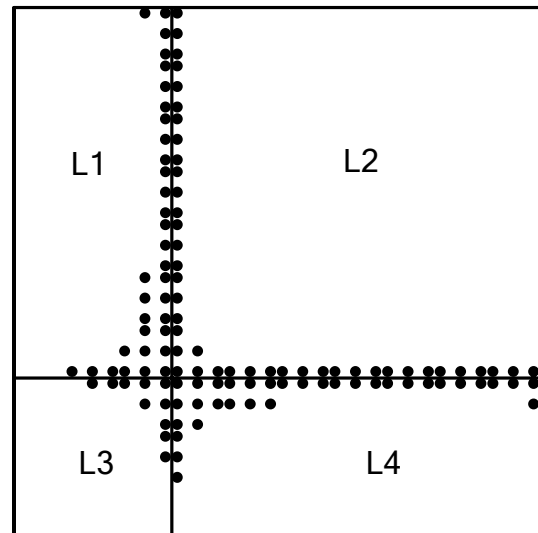


Fig. 11 – Pontos fissurados na face superior do pavimento para a carga de cálculo $p_d=8,4 \text{ kN/m}^2$

6.2 Momentos fletores nas lajes do pavimento

Os momentos fletores nas lajes do pavimento são determinados empregando-se o MEF para a carga total de serviço $p = 6,0 \text{ kN/m}^2$. Para as vigas, considera-se a rigidez à flexão $0,4E_{cs}I$.

Na fig. 12, indicam-se os momentos fletores positivos máximos obtidos para as quatro lajes.

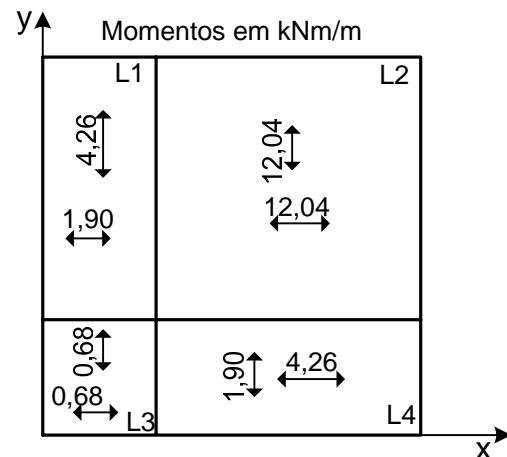


Fig. 12 – Momentos positivos máximos obtidos com o MEF

Comparando a fig. 12 com a fig. 6, verifica-se que o método simplificado fornece excelentes resultados. A relação entre os momentos fletores positivos na laje L2, obtidos com o método simplificado e com o MEF, é $12,99/12,04 = 1,08$. Para as demais lajes, resultam momentos menores

que o momento mínimo $M_{k,\min} = 7,92 \text{ kNm/m}$. Logo, essas lajes serão armadas com armadura mínima em ambos os métodos de análise.

Da fig. 12, observa-se que o maior momento positivo nas lajes armadas em uma direção (lajes L1 e L4) ocorre segundo a direção do vão maior. Isto contraria o cálculo tradicional de lajes sobre apoios rígidos, já que nesse cálculo o maior momento ocorre sempre segundo a direção do vão menor. Por isso, é importante que as armaduras de distribuição das lajes armadas em uma direção também respeitem a armadura mínima, como já foi salientado no artigo anterior [1].

Na fig. 13 indicam-se os momentos negativos mínimos obtidos com o MEF.

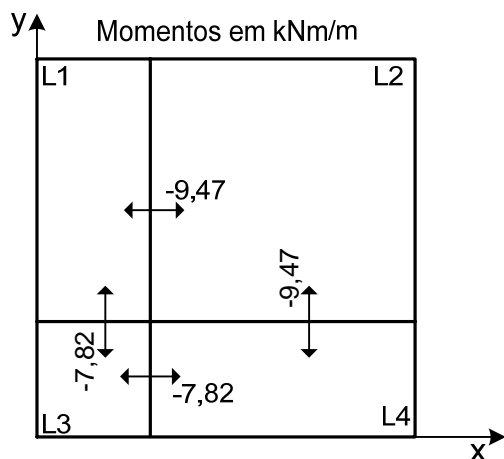


Fig. 11 – Momentos negativos mínimos obtidos com o MEF

Comparando a fig. 11 com a fig. 7, constata-se que o método simplificado fica a favor da segurança.

6.3 Influência da rigidez das vigas de apoio sobre os momentos fletores das lajes

Para mostrar a influência da rigidez das vigas de apoio sobre os momentos fletores das lajes do pavimento, consideram-se os resultados obtidos com o MEF, admitindo-se que as vigas possuam rigidez $\beta E_{cs} I$. As lajes estão submetidas às cargas totais de serviço $p = 6,0 \text{ kN/m}^2$.

Na tabela 1, indicam-se os momentos fletores positivos máximos e os negativos mínimos na laje L2 para diversos valores do coeficiente β .

Tabela 1 – Momentos máximos e mínimos na laje L2 em função de β

β	Positivo (kNm/m)	Negativo (kNm/m)
0,2	13,27	-11,00
0,4	12,04	-9,47
0,7	11,36	-10,44
1,0	11,05	-10,94
10,0	10,15	-12,43

Comparando a tabela 1 com os resultados obtidos através do método simplificado (momentos positivos e negativos iguais a $\pm 12,99 \text{ kNm/m}$), conclui-se que o método simplificado é satisfatório para os diversos valores de rigidez à flexão das vigas. Em geral, o método simplificado fornece uma solução a favor da segurança.

Na tabela 2, indicam-se os momentos fletores positivos máximos na laje L1. De acordo com o procedimento tradicional, essa laje é armada segundo a direção x.

Tabela 2 – Momentos máximos na laje L1 em função de β

β	M_x (kNm/m)	M_y (kNm/m)
0,2	1,60	7,70
0,4	1,90	4,26
0,7	2,02	2,67
1,0	2,06	2,11
10,0	2,17	1,08

Conforme se observa na tabela 2, o momento fletor M_x , segundo a direção do vão menor, só supera o momento M_y quando as lajes são apoiadas em vigas muito rígidas. Nos casos usuais, o momento maior ocorre segundo a direção do vão maior, ao contrário do que se depreende do cálculo convencional.

Entretanto, respeitando-se o momento mínimo $M_{k,\min} = 7,92 \text{ kNm/m}$ em ambas as direções, obtém-se um projeto seguro.

7. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi empregado um modelo não linear para análise de lajes maciças de concreto armado apoiadas em vigas deformáveis. Esse modelo não linear serviu de base para revalidar o

método simplificado de cálculo proposto pelo Autor, anteriormente [1].

O emprego do modelo não linear confirmou a validade do método simplificado, o que já havia sido mostrado através da análise linear.

O método simplificado de projeto proposto é adequado para o cálculo de lajes maciças de concreto armado apoiadas em vigas com as dimensões usuais das vigas dos edifícios.

Com base nos resultados obtidos neste trabalho e no artigo precedente [1], recomenda-se que o método tradicional, que consiste em considerar as lajes isoladas perfeitamente engastadas nas lajes vizinhas, não seja adotado para o cálculo de lajes apoiadas em vigas. Esse método só tem validade quando as lajes são apoiadas em paredes ou em vigas de rigidez muito elevada. Nos casos correntes, recomenda-se o emprego do método simplificado proposto.

É importante salientar, mais uma vez, que as armaduras de distribuição das lajes armadas em uma direção devem respeitar as armaduras mínimas. Isto ajuda a corrigir as imprecisões no cálculo dos momentos destas lajes.

REFERÊNCIAS

1. ARAÚJO, J. M. *Avaliação dos métodos simplificados para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.12, p.1-11, Rio Grande, outubro, 2008. Disponível em: <www.editoradunas.com.br/revistatpec>.
2. ZIENKIEWICZ, O. C. – *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, 3. ed., 1977.
3. REAL, M. V. *Análise estática de lajes de concreto armado incluindo não-linearidade física e geométrica*. Dissertação de mestrado, PPGEC, UFRGS, Porto Alegre, 1990.
4. ARAÚJO, J. M. *Modelo para análise de vigas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n. 32, p.9-14, Lisboa, julho, 1991.
5. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR-6118: Projeto de Estruturas de Concreto*. Rio de Janeiro, 2003.
6. ARAÚJO, J. M. *Curso de Concreto Armado*. 4v., 2.ed., Rio Grande: editora Dunas, 2003.
7. ARAÚJO, J. M. *Avaliação dos procedimentos de projeto das lajes nervuradas de concreto armado*. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.3, p.31-42, Rio Grande, junho, 2003. Disponível em: <www.editoradunas.com.br/revistatpec>.
8. ARAÚJO, J. M. *Análise não-linear de lajes maciças e lajes nervuradas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, n.52, p. 43-52, Lisboa, Setembro, 2003. Disponível em: <www.editoradunas.com.br/publicacoes.html>.
9. MINDLIN, R. D. *Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates*. Journal of the Applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, v.18, n.1, p.31-38, 1951.
10. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. *CEB-FIP Model Code 1990*. Published by Thomas Telford, London, 1993.
11. ARAÚJO, J. M.; BIGNON, P. G. *Métodos de minimização para análise não-linear de estruturas*. Relatório de Pesquisa RP-110/93, PPGEC, UFRGS, Porto Alegre, 1993.