

Pilares esbeltos de concreto armado

Parte 1: Um modelo não linear para análise e dimensionamento

Reinforced concrete slender columns

Part 1: A nonlinear model for analysis and dimensioning

José Milton de Araújo

Escola de Engenharia - FURG - Rio Grande, RS

RESUMO: Este artigo faz parte um estudo mais amplo sobre os métodos de projeto dos pilares de concreto armado. Nesta primeira parte do estudo, apresenta-se o modelo não linear para análise e dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado, implementado no programa JMPILAR. A precisão do modelo é comprovada através da análise de 124 pilares testados experimentalmente por outros autores.

ABSTRACT: This paper is part of a more comprehensive study on methods for design of reinforced concrete columns. In this first part of the study, we present the nonlinear model for analysis and dimensioning of slender concrete columns, implemented in JMPILAR software. The accuracy of the model is confirmed through the analysis of 124 columns tested experimentally by other authors.

1. INTRODUÇÃO

Os pilares dos edifícios de concreto armado são elementos estruturais que apresentam um comportamento tipicamente não linear. Esse comportamento é decorrente da não linearidade física e da não linearidade geométrica.

A não linearidade física é consequência das relações não lineares entre tensão e deformação que se verificam, para o concreto, em qualquer estágio do carregamento, e para o aço, após ultrapassar o limite de escoamento do material. Dependendo da combinação de esforços, o concreto também pode fissurar, o que contribui para o aumento da não linearidade. Assim, a não linearidade física é uma característica do material.

Por outro lado, o comportamento das barras esbeltas é afetado pela não linearidade geométrica. Uma vez que o equilíbrio deve ser garantido na configuração deformada da barra, surgem termos não lineares nas equações de equilíbrio. A essa não linearidade, se dá o nome de não linearidade geométrica.

Os esforços solicitantes na configuração deformada do pilar são maiores do que aqueles obtidos na configuração reta inicial. Esses últimos são denominados de esforços de primeira ordem. Desse modo, os esforços totais na configuração

deformada são iguais à soma dos esforços de primeira ordem e dos esforços de segunda ordem. Os efeitos de segunda ordem, decorrentes da não linearidade geométrica, são mais importantes nos pilares esbeltos.

Assim, para se avaliar corretamente os esforços solicitantes nos pilares de concreto armado, devem-se considerar as duas não linearidades simultaneamente. Essa análise é relativamente complexa e exige o emprego de métodos numéricos iterativos e incrementais.

Diversos métodos para análise não linear de pilares esbeltos de concreto armado foram desenvolvidos e implementados pelo Autor [1,2].

Em virtude da complexidade do problema, as normas de projeto permitem algumas simplificações para a avaliação dos esforços nos pilares, sobretudo os esforços de segunda ordem e aqueles devidos à fluência do concreto. Desse modo, é usual classificar os pilares em três grupos, em função da importância desses esforços:

a) pilares curtos: são aqueles para os quais se podem desprezar os efeitos de segunda ordem e os efeitos da fluência do concreto;

b) pilares moderadamente esbeltos: os efeitos de segunda ordem e da fluência do concreto podem ser considerados através de processos simplificados;

c) pilares esbeltos: ambos os efeitos mencionados devem ser considerados através de processo numérico rigoroso.

Os limites de esbeltez para enquadramento do pilar em uma dessas categorias variam conforme a norma de projeto, como se discute no Volume 3 da ref.[3]. Entretanto, nos casos usuais, os pilares dos edifícios se enquadram nas duas primeiras categorias. Somente em casos especiais, o pilar será classificado como pilar esbelto.

Assim, limitando-se o projeto aos pilares curtos e moderadamente esbeltos, pode-se adotar algum procedimento simplificado para a consideração das não linearidades. Esses procedimentos também variam conforme a norma de projeto. Um estudo comparativo entre diversos métodos simplificados, propostos nas principais normas internacionais, é apresentado na ref. [4].

Para aferir a precisão dos processos simplificados propostos nas normas de projeto, é necessário desenvolver um software capaz de realizar a análise e o dimensionamento de pilares esbeltos, com base em um modelo não linear. Após a constatação de que o modelo não linear é capaz de reproduzir os resultados experimentais, o software pode ser utilizado para a realização de simulações numéricas com o objetivo de verificar a precisão de processos simplificados existentes e/ou de aperfeiçoar tais processos.

O objetivo deste trabalho é fazer um amplo estudo sobre os procedimentos de projeto dos pilares de concreto armado. Para isto, o trabalho foi dividido em partes, para facilitar sua apresentação.

Nesta primeira parte do estudo, apresenta-se um modelo não linear para a análise e o dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado, desenvolvido e implementado pelo Autor [2]. Esse modelo deu origem ao software JMPILAR [5], o qual é capaz de fazer uma análise completa e o dimensionamento de pilares de qualquer esbeltez. A formulação é desenvolvida para uma seção poligonal arbitrária, considerando-se todos os pilares em flexo-compressão oblíqua.

Após uma breve descrição do modelo não linear, apresenta-se a comprovação da precisão do modelo frente a diversos resultados experimentais disponíveis na bibliografia.

2. ANÁLISE NÃO LINEAR DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO ARMADO

Na fig. 1, apresenta-se um pilar submetido à força normal de cálculo F_d , aplicada em suas extremidades. A seção transversal do pilar pode ser uma poligonal arbitrária, inclusive possuindo aberturas internas. Devido à generalidade da seção e do ponto de aplicação da força, a flexão será oblíqua. Numa seção transversal genérica, as excentricidades da força são denominadas de e_x e e_y , podendo variar ao longo do eixo, em função dos diagramas de momentos de primeira ordem.

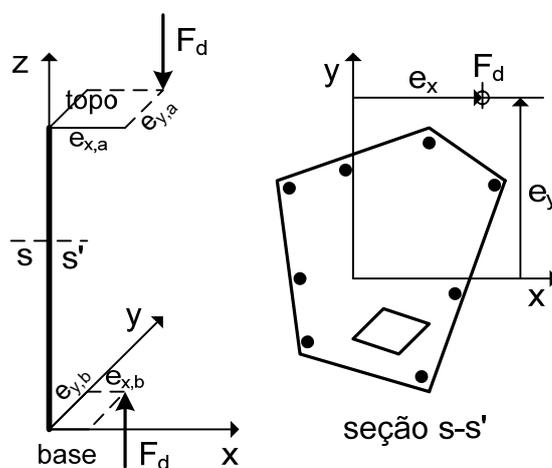


Fig. 1 – Solicitação e seção transversal do pilar

A análise estrutural é feita com o emprego do método dos elementos finitos, onde o eixo do pilar é discretizado em elementos lineares de dois nós, com cinco graus de liberdade por nó. A torção do elemento é desprezada.

Na fig. 2, representam-se os graus de liberdade U_1, \dots, U_{10} e as ações nodais correspondentes F_1, \dots, F_{10} no elemento finito.

Os deslocamentos de um ponto situado no eixo do elemento são o deslocamento axial $u_o(z)$ e os deslocamentos transversais $W_x(z)$ e $W_y(z)$, segundo as direções z , x e y , respectivamente. Esses deslocamentos são interpolados a partir dos deslocamentos nodais U_1, \dots, U_{10} , empregando-se as funções de interpolação clássicas [2].

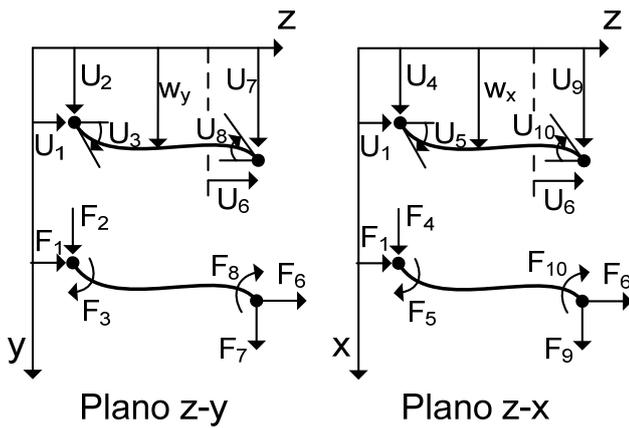


Fig. 2 – Deslocamentos e ações nodais no elemento

Empregando-se as relações deformações-deslocamentos, obtém-se a deformação normal ε_z em um ponto de coordenadas (x, y, z) , na forma

$$\varepsilon_z = \varepsilon_o + y\chi_y + x\chi_x \quad (1)$$

onde $\varepsilon_o = \varepsilon_o(z)$ é a deformação axial, $\chi_y = -\frac{\partial^2 W_y}{\partial z^2}$ e $\chi_x = -\frac{\partial^2 W_x}{\partial z^2}$ são as curvaturas nos planos $z-y$ e $z-x$, respectivamente.

A deformação axial é dada por

$$\varepsilon_o = \frac{\partial u_o}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial W_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2)$$

onde o último termo introduz a não linearidade geométrica do problema.

Nessa formulação, considera-se o sinal positivo para as deformações de tração e o sinal negativo para as deformações de compressão.

A partir das expressões (1) e (2), podem-se determinar o esforço normal N e os momentos fletores M_x e M_y em uma seção transversal do pilar, situada em uma coordenada z ao longo do seu eixo. Isto é feito com o auxílio da fig. 3.

A seção transversal possui n barras de armadura. Uma barra genérica possui área igual a A_{si} e coordenadas (x_{si}, y_{si}) . Assim, dados os deslocamentos nodais U_1, \dots, U_{10} , empregam-se as funções de interpolação do elemento para a obtenção das deformações generalizadas ε_o , χ_x e

χ_y , por diferenciação. Empregando a equação (1), pode-se calcular a deformação em cada barra de aço. Entrando no diagrama tensão-deformação do aço, obtém-se a tensão σ_{si} numa barra de aço genérica.

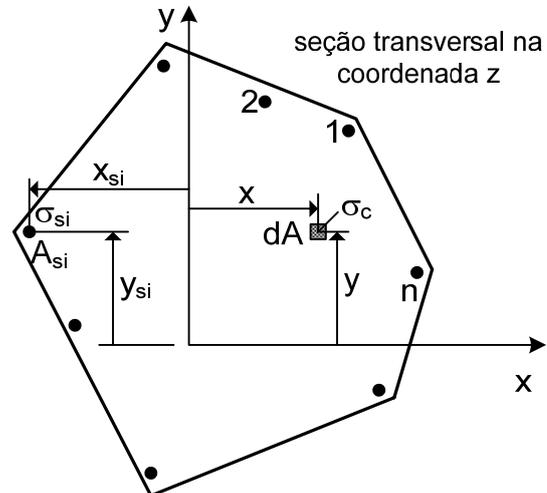


Fig. 3 – Determinação dos esforços seccionais

Da mesma forma, pode-se obter a tensão σ_c no concreto em qualquer ponto da seção transversal.

Aplicando as equações de equilíbrio, obtém-se os esforços na seção transversal

$$N = \int_{A_{cc}} \sigma_c dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} \quad (3)$$

$$M_x = \int_{A_{cc}} \sigma_c x dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} x_{si} \quad (4)$$

$$M_y = \int_{A_{cc}} \sigma_c y dA + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} A_{si} y_{si} \quad (5)$$

Observa-se que as integrais são feitas apenas na área comprimida de concreto A_{cc} , já que não se considera a colaboração do concreto tracionado no projeto dos pilares.

As resistências de cálculo dos materiais, f_{yd} e f_{cd} , são dadas por

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} ; \quad f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (6)$$

onde f_{yk} é a tensão de escoamento característica do aço e f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto.

Os coeficientes parciais de segurança são $\gamma_s = 1,15$ e $\gamma_c = 1,4$, de acordo com a NBR-6118[6].

Na fig. 4, apresentam-se os diagramas tensão-deformação adotados para o aço.

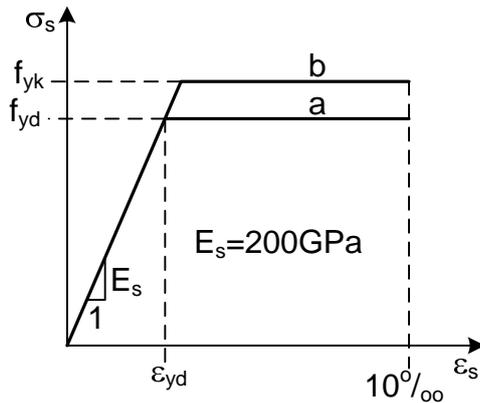


Fig. 4 – Diagramas tensão-deformação do aço

O diagrama **b**, considerando a tensão de escoamento característica f_{yk} do aço, deve ser utilizado para o cálculo dos deslocamentos do eixo do pilar. Entretanto, como a ruptura deve ser verificada com a tensão de escoamento de cálculo f_{yd} , conclui-se que, para o aço, basta empregar o diagrama **a** em toda a análise, já que não se pode ter $\sigma_s > f_{yd}$. Esse diagrama é empregado para tração e compressão, limitando-se a deformação de tração ao valor 10‰ como um critério de ruptura.

Na fig. 5, apresentam-se os diagramas tensão-deformação para o concreto em compressão.

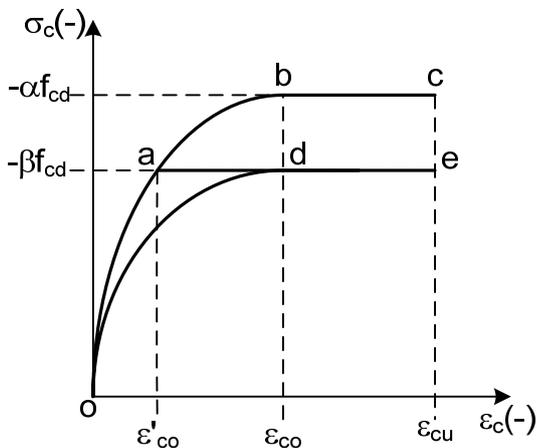


Fig. 5 – Diagramas tensão-deformação para o concreto em compressão

A análise deve ser feita com dois diagramas parábola-retângulo. O diagrama **obc**, cujo pico de tensão é $\sigma_c = -\alpha f_{cd}$, é utilizado para o cálculo dos deslocamentos do pilar. O diagrama **ode**, com pico de tensão $\sigma_c = -\beta f_{cd}$, é empregado para a verificação da ruptura. De acordo com a NBR-6118, deve-se adotar $\alpha = 1,10$ e $\beta = 0,85$.

As deformações ϵ_{co} e ϵ_{cu} são dadas por

$$\epsilon_{co} = -0,002(1 + \varphi_{ef}) ; \epsilon_{cu} = -0,0035(1 + \varphi_{ef}) \quad (7)$$

onde φ_{ef} é o coeficiente de fluência efetivo do concreto.

No modelo não linear, considera-se que todas as cargas, com seus valores de cálculo, são aplicadas na idade inicial de 28 dias. Entretanto, a fluência é provocada apenas pela parcela quase permanente do carregamento. Além disso, uma vez que a história de tensões no concreto é variável, devido ao crescimento do momento de segunda ordem com o passar do tempo, é necessário considerar os efeitos do envelhecimento, como é apresentado no capítulo 6 do Volume 2 da ref. [3].

Assim, o coeficiente de fluência efetivo, para a análise não linear, é dado por

$$\varphi_{ef} = \varphi \zeta \frac{M_{1qp}}{M_{1d}} \quad (8)$$

onde φ é o coeficiente de fluência, $\zeta = 0,8$ é o coeficiente de envelhecimento, M_{1qp} é o momento de primeira ordem, na combinação quase permanente, e M_{1d} é o momento de primeira ordem na combinação de cálculo, conforme as recomendações do EC2 [7].

Na fase de projeto, pode-se admitir que toda a carga de serviço é quase permanente, ou seja, $M_{1qp} = M_{1k}$ e que $M_{1d} = 1,4M_{1k}$. Neste caso, resulta $\varphi_{ef} = 0,57\varphi$.

Uma vez que não se admite $\sigma_c < -\beta f_{cd}$, é possível trabalhar com um diagrama único **ode**, na fig. 5, com a deformação no pico de tensão dada por

$$\epsilon'_{co} = \epsilon_{co} \left(1 - \sqrt{1 - \beta/\alpha}\right) \quad (9)$$

Assim, as relações tensão-deformação para o concreto são dadas por

$$\sigma_c = -\alpha f_{cd} \left[2 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} \right)^2 \right], \text{ se } \varepsilon_c > \varepsilon'_{co} \quad (10)$$

$$\sigma_c = -\beta f_{cd}, \text{ se } \varepsilon_{cu} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon'_{co} \quad (11)$$

onde ε_c é o valor da deformação de compressão e f_{cd} é a resistência à compressão de cálculo do concreto.

Observa-se que, com esse procedimento, pode-se empregar um único diagrama parábola-retângulo, bastando determinar as sub-regiões da seção transversal nas quais $\varepsilon_c > \varepsilon'_{co}$ e $\varepsilon_{cu} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon'_{co}$. Isto é feito com o emprego da equação (1), determinando-se interseções com os lados da poligonal, como detalhado na ref. [2].

Deve-se observar que, de acordo com a convenção adotada anteriormente, considera-se o sinal negativo para as deformações e as tensões de compressão.

O critério de ruptura de uma seção transversal de concreto armado é definido pelos domínios de dimensionamento da NBR-6118. Esses domínios indicam diferentes modos de ruptura de uma seção transversal submetida à flexão simples ou composta e são representados na fig. 6.

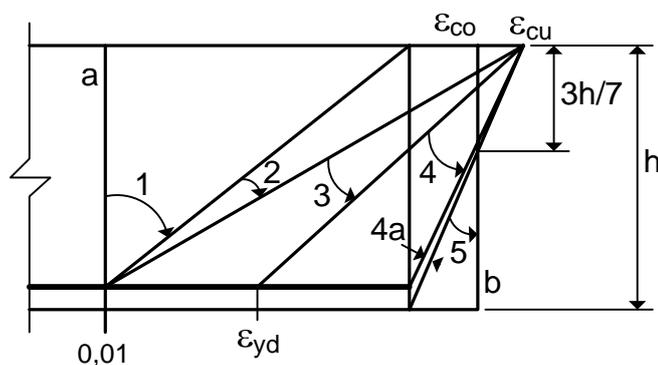


Fig. 6 – Domínios de dimensionamento

As deformações ε_{co} e ε_{cu} são dadas na equação (7), considerando $\varphi_{ef} = 0$. Logo, para a verificação da ruptura, consideram-se $\varepsilon_{co} = -0,002$ e $\varepsilon_{cu} = -0,0035$.

No caso específico dos pilares, submetidos à flexo-compressão, deve-se eliminar o domínio 1, pois este é um domínio exclusivo da flexo-tração.

As integrais contidas nas equações (3), (4) e (5) são resolvidas empregando-se o Teorema de Green, como detalhado na ref. [2].

Os esforços seccionais N , M_x e M_y são utilizados para a obtenção das ações nodais não lineares, as quais são derivadas da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Em uma determinada iteração, haverá um desequilíbrio entre o vetor de ações nodais não lineares e o vetor de cargas nodais aplicadas ao pilar. O método iterativo BFGS [8] é empregado para anular esse desequilíbrio e encontrar a configuração deformada do pilar para um nível de carregamento dado.

A seguir, incrementa-se o carregamento e repete-se o processo iterativo até a convergência do desequilíbrio e dos deslocamentos nodais. Esse procedimento é repetido sucessivamente até a ocorrência da ruptura em um ponto de integração do elemento, ou até que os deslocamentos passem a divergir.

Com essa formulação é possível fazer uma análise completa do pilar até a ruína, podendo-se traçar, por exemplo, uma curva carga-deslocamento [1,2].

Introduzindo um novo ciclo iterativo no programa, é possível realizar o dimensionamento com base na análise não linear. Para isto, define-se um intervalo $[A_{sj}, A_{sk}]$ no qual deve se situar a área total de aço na seção transversal. Para simplificar o procedimento, basta adotar $A_{sj} = 0$ (pilar sem armadura) e $A_{sk} = 0,08A_c$ (pilar com armadura máxima, onde A_c é a área da seção transversal).

Definido o intervalo $[A_{sj}, A_{sk}]$, emprega-se o processo da bissecante, como apresentado no Volume 3 da ref. [3], para encontrar a área de aço A_s . Em cada iteração desse processo, realiza-se toda a análise iterativa e incremental do método dos elementos finitos para determinar o carregamento de ruína do pilar. A convergência da armadura é constatada quando o carregamento de ruína for muito próximo do carregamento de projeto. Um vez que se admite um carregamento proporcional, basta comparar a força normal de ruína com a força normal de cálculo.

Esse modelo não linear de verificação e dimensionamento de pilares esbeltos de concreto

armado foi implementado pelo autor, dando origem ao software JMPILAR [5].

3. COMPROVAÇÃO DO MODELO NÃO LINEAR

Antes de comparar resultados numéricos com resultados experimentais, é necessário fazer algumas modificações no modelo não linear. Isto é necessário porque o modelo apresentado, e implementado no software JMPILAR, tem por finalidade o dimensionamento, ou seja, ele trabalha com as resistências de cálculo dos materiais. Se o objetivo é confrontar os resultados numéricos com os resultados de ensaios, deve-se executar o programa com as propriedades do concreto e do aço obtidas nos ensaios, ou seja, os coeficientes parciais de segurança devem ser todos unitários.

Desse modo, nos resultados apresentados a seguir, foram feitas as seguintes alterações no software original:

- Aço: considera-se $f_{yk} = f_{yd} = f_y$, onde f_y é a tensão de escoamento do aço obtida experimentalmente.
- Concreto: considera-se $\alpha = \beta = 1,0$ e $f_{cd} = f_c$, sendo f_c a resistência à compressão do concreto obtida experimentalmente na data do ensaio.
- Carga: considera-se $F_d = F_u$, onde F_u é a carga de ruína obtida no ensaio.
- Seção: consideram-se as dimensões das seções transversais dos pilares ensaiados, sem as restrições impostas na NBR-6118, as quais constam no software original.

3.1 Pilares ensaiados por Goyal e Jackson

Goyal e Jackson [9] apresentam resultados experimentais de pilares birrotulados, submetidos à flexo-compressão normal. No total, foram ensaiados 26 pilares sob carga de curta duração e 20 pilares sob carregamento de longa duração.

Na fig. 7, apresenta-se a seção transversal e o esquema de carga utilizado nos ensaios.

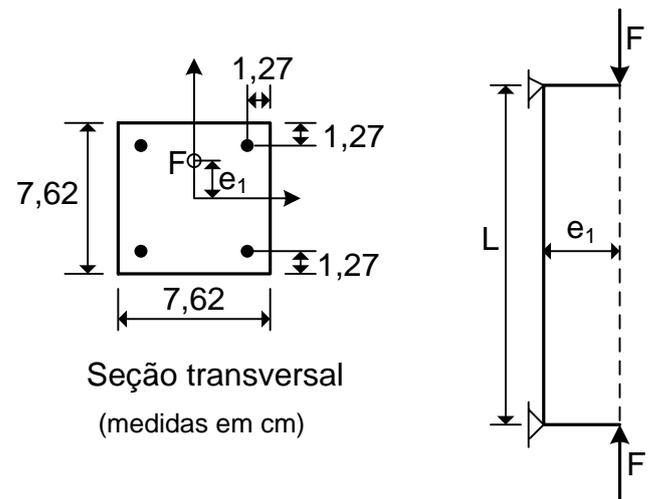


Fig. 7 – Pilares de Goyal e Jackson [9]

3.1.1 Pilares sob carga de curta duração

Na tabela 1, apresentam-se os dados dos pilares ensaiados sob carga de curta duração e as cargas de ruína teóricas, obtidas com o modelo não linear.

Conforme se observa, as diferenças entre as cargas de ruína teóricas e experimentais são inferiores a 10% para quase todos os pilares.

3.1.2 Pilares sob carga de longa duração

Os pilares ensaiados sob carga de longa duração foram submetidos, inicialmente, a uma carga F_g , a qual foi mantida constante por um período de seis meses. Ao final desse período, a carga foi incrementada até a ruína do pilar para a carga F_u . O coeficiente de fluência medido foi $\varphi = 2,4$.

Empregando a equação (8), com $\zeta = 0,8$, obtém-se o coeficiente de fluência efetivo

$$\varphi_{ef} = 1,92 \frac{F_g}{F_u} \quad (12)$$

o qual é utilizado no modelo não linear.

Na tabela 2, apresentam-se os resultados dos pilares ensaiados sob carga de longa duração.

Conforme se observa, há apenas 4 pilares para os quais a diferença entre o modelo e os resultados experimentais ultrapassa 10%. Isto ocorreu porque as cargas de ruína obtidas para esses pilares no ensaio de longa duração foram superiores às cargas de ruína dos pilares semelhantes, ensaiados em

curta duração. Esse comportamento não pode ser previsto pela teoria, pois a fluência sempre terá um efeito desfavorável no modelo. Conclui-se que as respostas experimentais dos pilares J, O, P e Q não podem ser justificadas com base na presente teoria, podendo ser decorrente de problemas não detectados durante os ensaios.

3.2 Pilares ensaiados por Tsao

Tsao[10] ensaiou 13 pilares de seção quadrada e em forma de L, submetidos à flexo-compressão oblíqua. Os pilares são birrotulados com as dimensões das seções transversais indicadas na fig. 8. Todos os pilares possuem uma altura $L = 122$ cm. Para os pilares de seção quadrada, os índices de esbeltez são $\lambda_x = \lambda_y = 55$. Para os pilares em L, os índices de esbeltez valem $\lambda_x = 58$ e $\lambda_y = 43$. Os ensaios são de curta duração (sem fluência).

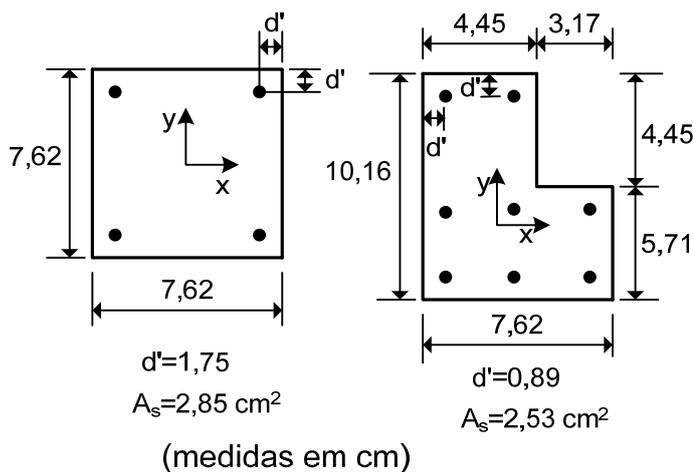


Fig. 8 - Seções dos pilares ensaiados por Tsao

Na tabela 3 apresentam-se os demais dados para os pilares de seção quadrada. Na tabela 4 apresentam-se os demais dados dos pilares com seção em L.

Nas tabelas 5 e 6 apresentam-se os resultados obtidos para as cargas de ruína dos pilares. Nessas tabelas comparam-se os valores experimentais, $F_{u,exp}$, os valores obtidos com o software JMPILAR, $F_{u,teo}$, e os valores teóricos obtidos com o Sistema Flexor, P_{flex} , apresentado na ref. [11].

Observando as tabelas 5 e 6, verifica-se uma boa concordância entre as cargas de ruína teóricas, $F_{u,teo}$, e as cargas de ruína $F_{u,exp}$ obtidas nos

ensaios. Também se verifica uma perfeita concordância do modelo com as soluções teóricas obtidas na ref. [11]. Por se tratar de uma análise não linear iterativa e incremental, cuja convergência depende da precisão numérica adota nos softwares, pode-se admitir que $F_{u,teo} \cong P_{flex}$, ou seja, os resultados obtidos com dois softwares totalmente distintos são praticamente iguais.

3.3 Pilares ensaiados por Melo

Melo[12] ensaiou 21 pilares birrotulados sob flexo-compressão normal, cujas dimensões são apresentadas na fig. 9.

Todos os pilares possuem uma área de aço $A_s = 4,71$ cm². A tensão de escoamento do aço é $f_y = 595$ MPa.

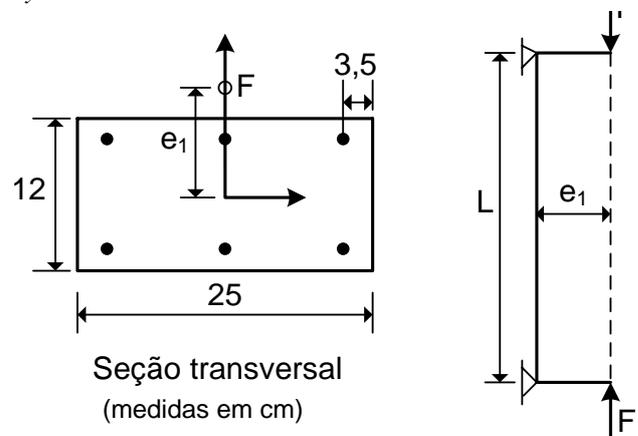


Fig. 9 - Pilares ensaiados por Melo [12]

Na tabela 7, apresentam-se os resultados experimentais e os obtidos com o modelo não linear.

3.4 Pilares ensaiados por Kim e Yang

Kim e Yang[13] ensaiaram 28 pilares birrotulados sob flexo-compressão normal, cujas dimensões são apresentadas na fig. 10. O carregamento é o mesmo da fig. 9, sendo $e_1 = 2,4$ cm para todos os pilares.

Foram ensaiados três grupos de pilares, com alturas $L = 24$ cm, $L = 144$ cm e $L = 240$ cm, o que corresponde aos índices de esbeltez $\lambda = 10$, $\lambda = 62$ e $\lambda = 104$, respectivamente.

Na tabela 8 apresentam-se os resultados para esse grupo de pilares.

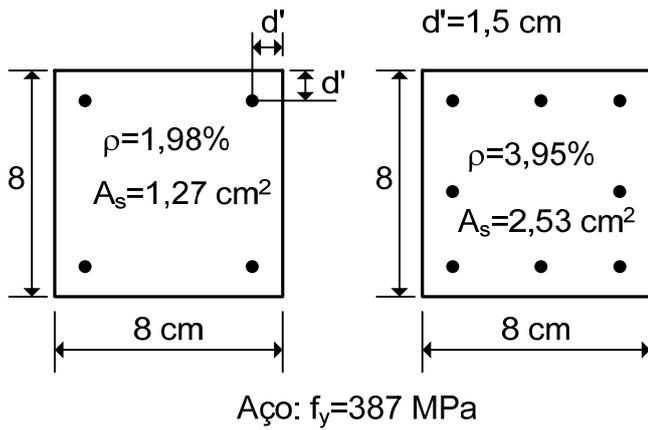


Fig. 10 – Pilares ensaiados por Kim e Yang [13]

3.5 Pilares ensaiados por Kim e Lee

Kim e Lee[14] ensaiaram 16 pilares birrotulados sob flexo-compressão oblíqua, cujas dimensões e posicionamento da carga são apresentadas na fig. 11.

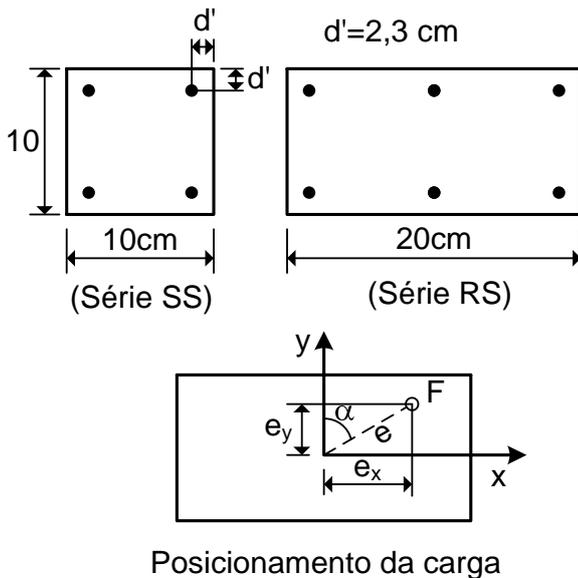


Fig. 11 – Pilares ensaiados por Kim e Lee [14]

Todos os pilares possuem altura $L = 130$ cm. Os pilares de seção quadrada (série SS) possuem índices de esbeltez $\lambda_x = \lambda_y = 45$. Os pilares de seção retangular (série RS) possuem $\lambda_x = 22,5$ e $\lambda_y = 45$.

Para todos os pilares tem-se $f_c = 27$ MPa e $f_y = 436$ MPa.

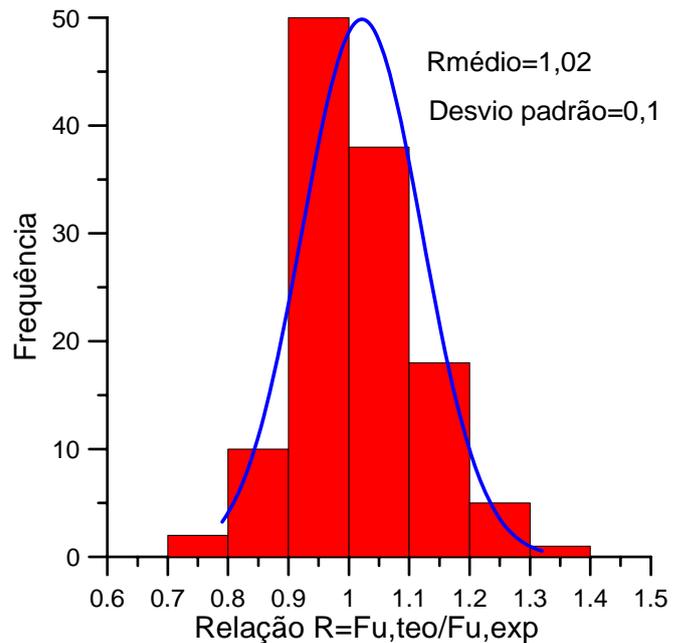
A carga é aplicada com uma excentricidade $e = 4$ cm, resultando nas componentes $e_x = e \sin \alpha$ e $e_y = e \cos \alpha$.

Os resultados são apresentados na tabela 9.

3.6 Resultados de 124 pilares

A relação $R = F_{u,teo} / F_{u,exp}$ apresentou uma média $R_m = 1,02$ e um desvio padrão $\sigma_R = 0,1$.

Na fig. 12 apresenta-se o histograma obtido para os 124 pilares analisados. Observa-se a boa simetria dos resultados em torno da média, a qual é praticamente igual à unidade, o que mostra que o modelo teórico tende a reproduzir os resultados experimentais na média.

Fig. 12 - Histograma de $R = F_{u,teo} / F_{u,exp}$ para 124 pilares

Admitindo a distribuição normal de Gauss, podem-se definir os quantis de 5% e de 95%, como

$$R_{k,inf} = R_m - 1,645\sigma_R = 0,86$$

$$R_{k,sup} = R_m + 1,645\sigma_R = 1,18$$

de modo que 90% dos valores de R devem se situar no intervalo $[0,86 - 1,18]$.

A faixa com 90% de probabilidade de ocorrência é mostrada na fig. 13.

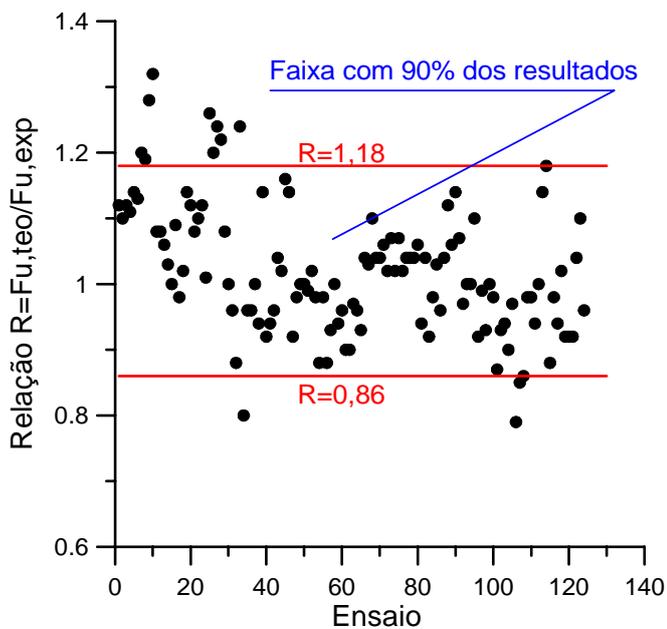


Fig. 13 - Faixa com 90% de probabilidade de ocorrência

4. CONCLUSÕES

Neste artigo foi apresentado o modelo não linear para análise e dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado, implementado no software JMPILAR. Para comprovar a validade do modelo, o software foi usado para analisar 124 pilares testados em laboratório por outros autores.

Os resultados apresentados comprovaram a boa precisão do modelo não linear. As cargas de ruína previstas com o modelo podem ficar abaixo e acima das cargas de ruína obtidas experimentalmente, como se espera de um modelo não tendencioso. O histograma da relação $R = F_{u,teo} / F_{u,exp}$, entre as cargas de ruína teóricas e experimentais, mostra boa simetria dos resultados em torno da média, a qual é praticamente igual à unidade. Isto demonstra que o modelo teórico tende a reproduzir os resultados experimentais na média.

Pode-se esperar que 90% dos valores de R se situem no intervalo $[0,86 - 1,18]$. Esses desvios entre a resposta teórica e experimental são facilmente cobertos pelos coeficientes parciais de segurança.

REFERÊNCIAS

1. Araújo, J. M. *Dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado*. Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1984.
2. Araújo, J. M. *Pilares Esbeltos de Concreto Armado. Algoritmos para análise e dimensionamento*. Rio Grande: Editora da FURG, 1993.
3. Araújo, J. M. *Curso de Concreto Armado*. 4 vol. Rio Grande: Editora Dunas, 3. ed., 2010.
4. Araújo, J. M. *Métodos simplificados para consideração dos efeitos de segunda ordem no projeto de pilares de concreto armado*. Revista do IBRACON, n.27, p.3-12, São Paulo, nov./dez. 2001. (disponível em www.editoradunas.com.br/publicacoes.html).
5. Araújo, J. M. *JMPILAR – Software para análise e dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado*. 2009. (Informações disponíveis em www.editoradunas.com.br).
6. Associação Brasileira de Normas Técnicas: *NBR-6118: Projeto de Estruturas de Concreto*. Rio de Janeiro, 2003.
7. European Committee for Standardization. *Eurocode 2: Design of Concrete Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*. Final draft, Dec., 2003.
8. Araújo, J. M.; Bignon, P. G. *Métodos de minimização para análise não-linear de estruturas*. Relatório de Pesquisa RP-110/93, Curso de Pós-Graduação em Eng. Civil, UFRGS, Porto Alegre, 1993.
9. Goyal, Brij B.; Jackson, N. *Slender concrete columns under sustained load*. Journal of the Structural Division, ASCE, v.97, n.11, p.2729-50, nov., 1971.
10. Tsao, Wen Hu. *Behavior of square and L-shaped slender reinforced concrete columns under combined biaxial bending and axial compression*. Doctoral thesis, New Jersey Institutes of Technology, Dec., 1991.
11. Borges, A. C. L. *Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados a flexo-compressão oblíqua*. Diss. mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos da USP, 1999.
12. Melo, C. E. L. *Análise experimental e numérica de pilares birrotulados de concreto armado submetidos a flexo-compressão normal*. Tese de doutorado, Departamento de Eng. Civil e Ambiental, UnB, Brasília, 2009.

13. Kim, J. K.; Yang, J. K. *Buckling behaviour of slender high-strength concrete columns*. Journal of Engng. Struct., v. 17, n.1, pp. 39-51, 1995.
14. Kim, J. K.; Lee, S. S. *The behavior of reinforced concrete columns subjected to axial force and biaxial bending*. Engineering Structures, 23, pp. 1518-1528, 2000.

Tabelas

Tabela 1- Pilares sob carga de curta duração
Goyal e Jackson [9]

Pilar	f_c (MPa)	e_1 (cm)	$F_{u,exp}$ (kN)	$F_{u,teo}$ (kN)	$\frac{F_{u,teo}}{F_{u,exp}}$
$L = 182 \text{ cm}; \lambda = 83$ $f_y = 352 \text{ MPa}; A_s = 1,42 \text{ cm}^2$					
A1	19,9	3,81	33,1	34,4	1,04
A2	19,9	3,81	33,4	34,4	1,03
C1	23,3	2,54	44,5	48,9	1,10
C2	23,3	2,54	46,8	48,9	1,04
E1	21,9	1,27	66,7	69,4	1,04
E2	21,9	1,27	65,4	69,4	1,06
G1	22,2	1,91	55,4	56,5	1,02
G2	22,2	1,91	53,0	56,5	1,07
$L = 182 \text{ cm}; \lambda = 83$ $f_y = 310 \text{ MPa}; A_s = 1,00 \text{ cm}^2$					
I1	22,7	1,27	60,0	61,2	1,02
I2	22,7	1,27	57,4	61,2	1,07
K1	22,8	1,91	46,6	47,5	1,02
K2	22,8	1,91	45,6	47,5	1,04
M1	22,9	2,54	37,1	38,6	1,04
M2	22,9	2,54	37,0	38,6	1,04
$L = 122 \text{ cm}; \lambda = 55$ $f_y = 310 \text{ MPa}; A_s = 1,00 \text{ cm}^2$					
O1	23,6	1,27	82,3	87,2	1,06
O2	23,6	1,27	92,4	87,2	0,94
P1	23,6	1,91	64,5	67,1	1,04
P2	23,6	1,91	72,7	67,1	0,92
Q1	19,9	2,54	51,4	50,4	0,98
Q2	19,9	2,54	48,9	50,4	1,03
$L = 274 \text{ cm}; \lambda = 125$ $f_y = 310 \text{ MPa}; A_s = 1,00 \text{ cm}^2$					
R1	21,4	1,27	33,5	32,2	0,96
R2	21,4	1,27	31,1	32,2	1,04
S1	20,9	1,91	23,0	25,8	1,12
S2	20,9	1,91	24,3	25,8	1,06
T1	20,7	2,54	19,4	22,1	1,14
T2	20,7	2,54	20,6	22,1	1,07
f_c : resistência obtida em prismas com as mesma seção dos pilares A_s : área total de aço na seção λ : índice de esbeltez					

Tabela 2- Pilares sob carga de longa duração

Goyal e Jackson [9]

Pilar	f_c (MPa)	e_1 (cm)	φ_{ef}	$F_{u,exp}$ (kN)	$F_{u,teo}$ (kN)	$\frac{F_{u,teo}}{F_{u,exp}}$
$L = 182 \text{ cm}; \lambda = 83$ $f_y = 352 \text{ MPa}; A_s = 1,42 \text{ cm}^2$						
A	19,9	3,81	1,2	32,0	31,1	0,97
B	19,9	3,81	0,8	32,3	32,4	1,00
C	23,3	2,54	1,2	42,9	42,7	1,00
D	23,3	2,54	0,8	40,4	44,5	1,10
E	21,9	1,27	1,3	59,4	54,7	0,92
F	21,9	1,27	0,9	59,3	58,7	0,99
G	22,2	1,91	1,3	50,1	46,5	0,93
H	22,2	1,91	0,9	49,8	49,9	1,00
$L = 182 \text{ cm}; \lambda = 83$ $f_y = 310 \text{ MPa}; A_s = 1,00 \text{ cm}^2$						
I	22,7	1,27	1,6	44,3	43,2	0,98
J	22,7	1,27	0,8	58,2	50,4	0,87
K	22,8	1,91	1,3	40,9	38,2	0,93
L	22,8	1,91	0,8	43,8	41,0	0,94
M	22,9	2,54	1,2	36,4	32,6	0,90
N	22,9	2,54	0,8	36,0	34,9	0,97
$L = 122 \text{ cm}; \lambda = 55$ $f_y = 310 \text{ MPa}; A_s = 1,00 \text{ cm}^2$						
O	23,6	1,27	1,1	89,2	70,8	0,79
P	23,6	1,91	1,1	67,1	56,8	0,85
Q	19,9	2,54	1,2	50,2	43,2	0,86
$L = 274 \text{ cm}; \lambda = 125$ $f_y = 310 \text{ MPa}; A_s = 1,00 \text{ cm}^2$						
R	21,4	1,27	1,6	24,1	23,5	0,98
S	20,9	1,91	1,2	21,6	21,2	0,98
T	20,7	2,54	1,1	19,7	18,6	0,94
f_c : resistência obtida em prismas com as mesma seção dos pilares A_s : área total de aço na seção λ : índice de esbeltez						

Tabela 3- Pilares de seção quadrada - Tsao [10]

Pilar	f_c (MPa)	f_y (MPa)	e_x (cm)	e_y (cm)
C1	19,1	545	0,97	2,35
C2	18,6	545	1,80	1,80
C3	29,0	545	3,59	3,59
C4	25,5	421	1,80	1,80
C5	25,5	421	1,94	4,69
C6	25,5	421	0,97	2,35
e_x e e_y : excentricidades da carga na direção dos eixos x e y, respectivamente				

Tabela 4- Pilares com seção em L - Tsao [10]

Pilar	f_c (MPa)	f_y (MPa)	e_x (cm)	e_y (cm)
B2	25,1	434	2,15	4,61
B3	26,8	434	2,69	2,69
B4	26,8	441	3,59	3,59
B5	29,3	441	0,90	0,90
B6	29,3	441	1,80	1,80
B7	29,2	441	1,55	2,01
B8	29,2	441	3,09	4,03
e_x e e_y : excentricidades da carga na direção dos eixos x e y, respectivamente				

Tabela 5- Resultados para os pilares de seção quadrada - Tsao [10]

Pilar	$F_{u,exp}$ (kN)	$F_{u,teo}$ (kN)	$\frac{F_{u,teo}}{F_{u,exp}}$	P_{flex} (kN)	$\frac{F_{u,teo}}{P_{flex}}$
C1	69,04	69,04	1,00	70,00	0,99
C2	57,03	65,01	1,14	66,00	0,99
C3	39,99	47,18	1,18	47,00	1,00
C4	84,78	74,60	0,88	72,00	1,04
C5	47,64	46,69	0,98	43,00	1,09
C6	83,23	78,24	0,94	75,00	1,04

Tabela 6- Resultados para os pilares de seção L - Tsao [10]

Pilar	$F_{u,exp}$ (kN)	$F_{u,teo}$ (kN)	$\frac{F_{u,teo}}{F_{u,exp}}$	P_{flex} (kN)	$\frac{F_{u,teo}}{P_{flex}}$
B2	45,59	46,50	1,02	47,00	0,99
B3	57,04	52,48	0,92	53,00	0,99
B4	45,00	41,40	0,92	42,00	0,99
B5	128,21	117,95	0,92	118,00	1,00
B6	71,49	74,35	1,04	76,00	0,98
B7	71,45	78,60	1,10	79,00	0,99
B8	46,80	44,93	0,96	42,00	1,07

Tabela 7– Resultados dos pilares ensaiados por Melo[12]

Pilar	f_c (MPa)	e_1 (cm)	$F_{u,exp}$ (kN)	$F_{u,teo}$ (kN)	$\frac{F_{u,teo}}{F_{u,exp}}$
Pilares com L=300 cm ; $\lambda = 87$					
6-3	39,6	0,6	652,0	704,2	1,08
12-3	39,6	1,2	535,0	535,0	1,00
15-3	35,8	1,5	446,5	428,6	0,96
18-3	39,7	1,8	460,5	405,2	0,88
24-3	39,7	2,4	241,0	298,8	1,24
30-3	33,9	3,0	254,8	203,8	0,80
40-3	33,9	4,0	170,2	163,4	0,96
50-3	37,6	5,0	155,0	148,8	0,96
60-3	37,6	6,0	131,0	131,0	1,00
Pilares com L=250 cm ; $\lambda = 72$					
15-2.5	43,1	1,5	670,4	630,2	0,94
24-2.5	45,8	2,5	360,8	411,3	1,14
30-2.5	41,6	3,0	336,0	309,1	0,92
40-2.5	41,6	4,0	246,0	231,2	0,94
50-2.5	41,6	5,0	201,2	193,2	0,96
60-2.5	43,1	6,0	164,8	171,4	1,04
Pilares com L=200 cm ; $\lambda = 58$					
15-2	38,5	1,5	662,0	675,2	1,02
24-2	45,8	2,5	456,0	529,0	1,16
30-2	37,2	3,0	317,0	361,4	1,14
40-2	37,2	4,0	294,4	270,8	0,92
50-2	37,2	5,0	232,0	227,4	0,98
60-2	38,5	6,0	198,4	198,4	1,00

Tabela 8- Resultados dos pilares de Kim e Yang [13]

Pilar	ρ %	L (cm)	$F_{u,exp}$ (kN)	$F_{u,teo}$ (kN)	$\frac{F_{u,teo}}{F_{u,exp}}$
$f_c = 25,5$ MPa					
L4-1	3,95	24	109,5	118,3	1,08
L4-2	3,95	24	109,3	118,3	1,08
L2-1	1,98	144	63,7	67,5	1,06
L2-2	1,98	144	65,7	67,5	1,03
L2-1	1,98	240	38,2	38,2	1,00
L2-2	1,98	240	35,0	38,2	1,09
L4-1	3,95	240	49,0	48,0	0,98
L4-2	3,95	240	47,0	48,0	1,02
$f_c = 63,5$ MPa					
M2-1	1,98	24	179,0	204,1	1,14
M2-2	1,98	24	182,8	204,1	1,12
M4-1	3,95	24	207,7	224,3	1,08
M4-2	3,95	24	204,6	224,3	1,10
M2-1	1,98	144	102,8	115,1	1,12
M2-2	1,98	144	113,5	115,1	1,01
M2-1	1,98	240	45,2	57,0	1,26
M2-2	1,98	240	47,6	57,0	1,20
M4-1	3,95	240	59,6	73,9	1,24
M4-2	3,95	240	60,5	73,9	1,22
$f_c = 86,2$ MPa					
H2-1	1,98	24	235,3	263,5	1,12
H2-2	1,98	24	240,4	263,5	1,10
H4-1	3,95	24	255,8	286,5	1,12
H4-2	3,95	24	257,7	286,5	1,11
H2-1	1,98	144	122,1	139,2	1,14
H2-2	1,98	144	123,7	139,2	1,13
H2-1	1,98	240	54,3	65,2	1,20
H2-2	1,98	240	54,9	65,2	1,19
H4-1	3,95	240	66,6	85,2	1,28
H4-2	3,95	240	64,7	85,2	1,32

Tabela 9- Resultados dos pilares de Kim e Lee
[14]

Pilar	α (graus)	$F_{u,exp}$ (kN)	$F_{u,teo}$ (kN)	$\frac{F_{u,teo}}{F_{u,exp}}$
Série RS				
RS0-1	0	204	204	1,00
RS0-2	0	206	204	0,99
RS30-1	30	208	212	1,02
RS30-2	30	217	212	0,98
RS45-1	45	266	234	0,88
RS45-2	45	239	234	0,98
RS60-1	60	313	275	0,88
RS60-2	60	295	275	0,93
RS90-1	90	418	418	1,00
RS90-2	90	443	418	0,94
Série SS				
SS0-1	0	119	114	0,96
SS0-2	0	126	114	0,90
SS30-1	30	112	101	0,90
SS30-2	30	104	101	0,97
SS45-1	45	103	99	0,96
SS45-2	45	106	99	0,93