

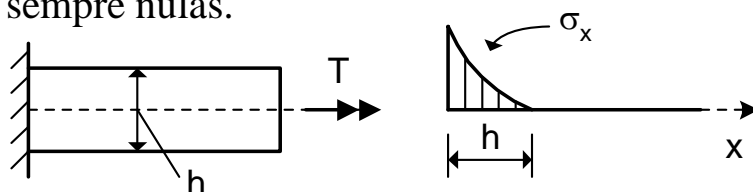
# DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO

## 1.1- INTRODUÇÃO

**Torção de Saint' Venant:** não há nenhuma restrição ao empenamento; só surgem tensões tangenciais.

**Torção com empenamento impedido:** surgem tensões normais de tração e de compressão ao longo da barra, além das tensões tangenciais.

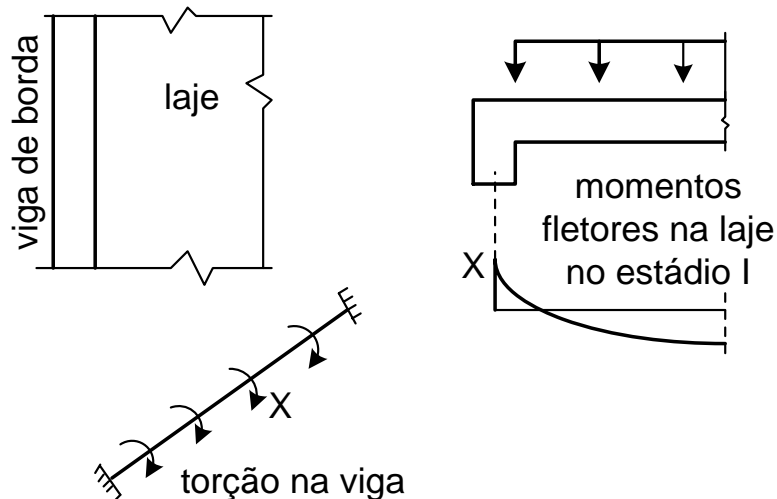
- Algumas formas de seção, como a circular, por exemplo, não tendem a empenar, de modo que as tensões normais serão sempre nulas.



**Dissipação das tensões normais nas proximidades de um engaste**

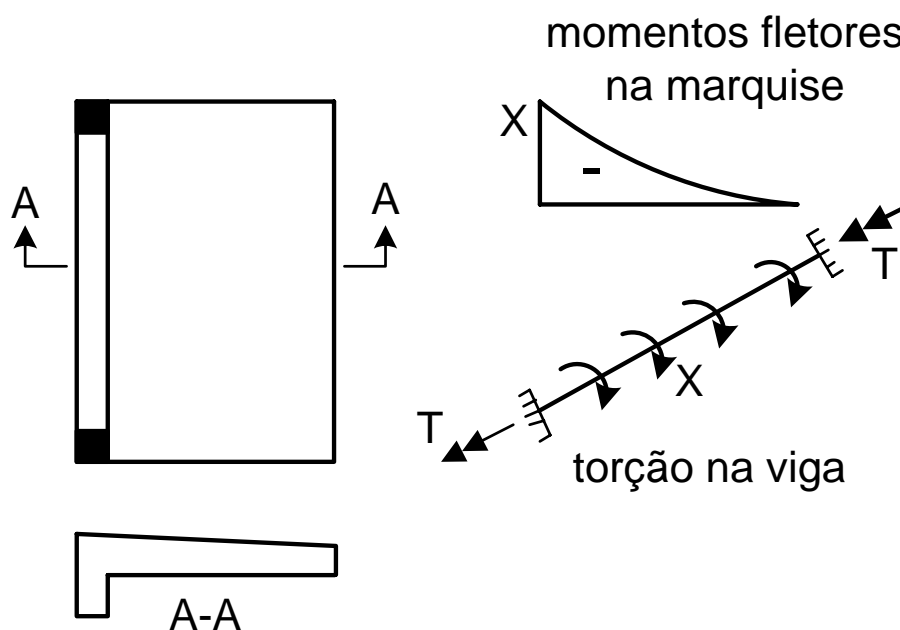
No caso do concreto armado, as tensões normais são dissipadas pela fissuração.

**Torção de compatibilidade:** surge em consequência do impedimento à deformação (em vigas de borda, por exemplo).



No estágio I, surge o momento de engastamento  $X$  da laje, o qual é um momento torçor por unidade de comprimento para a viga. Após a fissuração, esse momento torçor diminui muito e não necessita ser considerado no dimensionamento da viga.

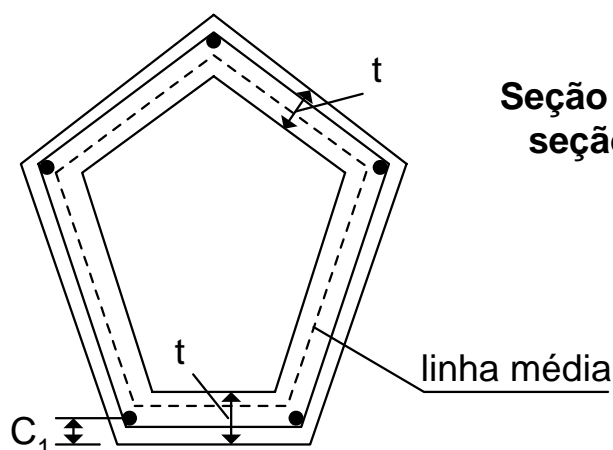
**Torção de equilíbrio:** os momentos torçores são necessários para satisfazer as condições de equilíbrio.



## 1.2- TORÇÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

- O dimensionamento à torção das estruturas de concreto armado é feito com base no modelo de treliça de Morsch. A treliça é espacial, formada por barras longitudinais, estribos verticais e bielas de compressão.
- De acordo com a NBR-6118, pode-se escolher uma inclinação arbitrária para as bielas de compressão, no intervalo  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ .
- Entretanto, na combinação da torção com o esforço cortante, os ângulos de inclinação das bielas de concreto devem ser coincidentes para os dois esforços. Assim, empregando-se o modelo para esforço cortante apresentado no capítulo 6 do Volume 1, deve-se considerar  $\theta = 45^\circ$  para o dimensionamento à torção.

- Os ensaios mostram que, após o surgimento das fissuras de torção, somente uma pequena casca de concreto, junto à face externa da seção transversal da barra, colabora na resistência à torção: a resistência à torção de uma seção cheia é equivalente à resistência de uma seção vazada com as mesmas armaduras.
- O dimensionamento à torção de uma seção cheia é feito para uma seção vazada equivalente.



**Seção vazada equivalente para uma seção poligonal convexa maciça**

**CEB/90:** A seção vazada possui o mesmo contorno externo da seção maciça e uma parede de espessura  $t$ .

$$t = \frac{A}{\mu} \quad (\text{Espessura da parede da seção vazada equivalente})$$

$A$  = área da seção cheia

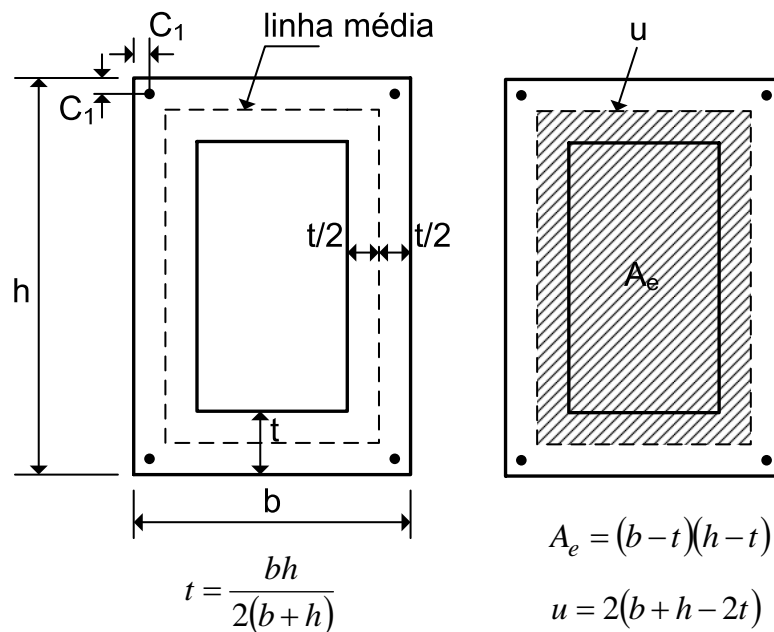
$\mu$  = perímetro da seção cheia.

Nos casos em que **a seção real já é vazada**, deve-se considerar o **menor** dos seguintes valores para a espessura da parede:

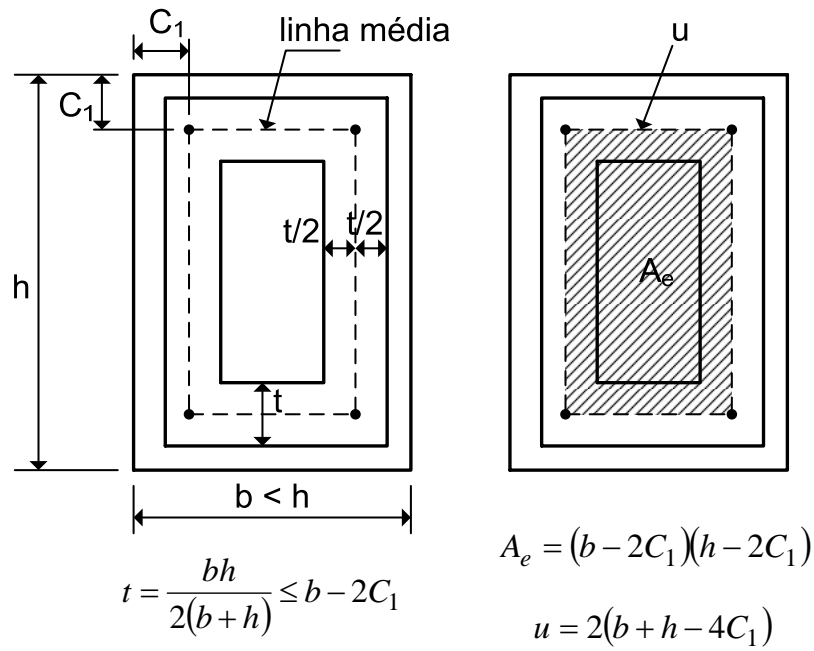
- a espessura real da parede da seção vazada;
- a espessura equivalente calculada supondo uma seção cheia de mesmo contorno externo da seção vazada.

### Critérios da NBR-6118:

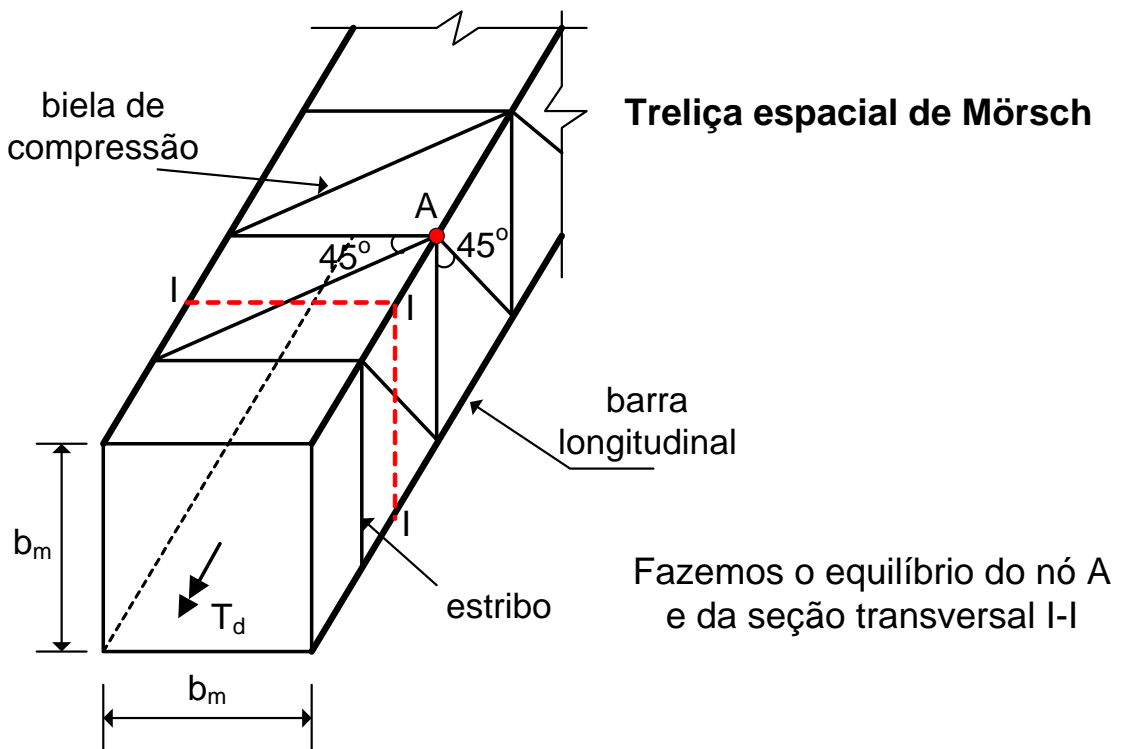
#### Caso 1: $t \geq 2C_1$



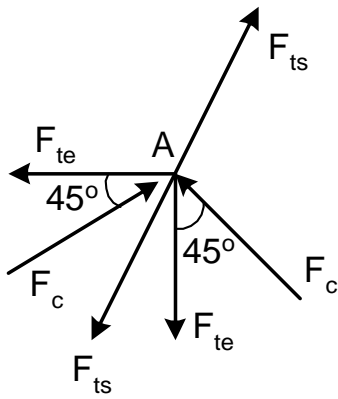
**Caso 2:  $t < 2C_1$**



### 1.3- ANALOGIA DA TRELIÇA DE MÖRSCH



## Equilíbrio do nó A:



**Forças em um  
nó da treliça**

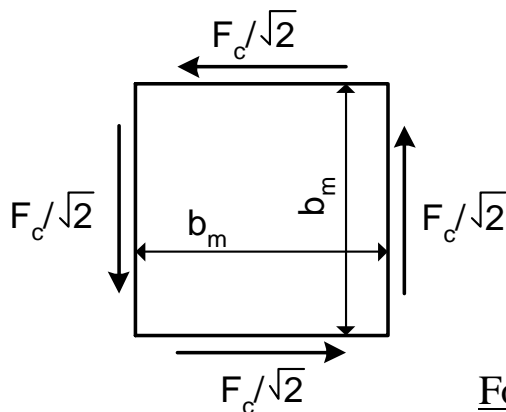
Força de tração nos estribos:

$$F_{te} = F_c \cos 45^\circ \Rightarrow F_{te} = F_c / \sqrt{2} \quad (1.3.1)$$

Força nas barras longitudinais:

$$F_{ts} = F_c \cos 45^\circ \Rightarrow F_{ts} = F_c / \sqrt{2} \quad (1.3.2)$$

## Equilíbrio da seção transversal:



**Equilíbrio da seção transversal:**

$$T_d = 2b_m \frac{F_c}{\sqrt{2}} \quad (1.3.3)$$

Força de compressão na biela de concreto:

**Projeção das forças de  
compressão na seção  
transversal**

$$F_c = \frac{T_d}{b_m \sqrt{2}} \quad (1.3.4)$$

Substituindo (1.3.4) nas equações (1.3.1) e (1.3.2):

$$F_{te} = F_{ts} = \frac{T_d}{2b_m} \quad (1.3.5)$$

### **Dimensionamento dos estribos:**

$A_{s1}$  = área da seção transversal de um estribo.

$s$  = espaçamento dos estribos ao longo do eixo da peça.

A área total de aço em um comprimento  $b_m$  é

$$A_s = \frac{b_m}{s} A_{s1} \quad (1.3.6)$$

Força de tração resistente:

$$F_{ter} = A_s f_{yd} = \frac{A_{s1}}{s} b_m f_{yd} \quad (1.3.7)$$

Iguais para garantir equilíbrio

Fazendo  $F_{ter} = F_{te}$ , chega-se a

$$\frac{A_{s1}}{s} = \frac{T_d}{2A_e f_{yd}}, \text{ cm}^2/\text{cm} \quad (1.3.8)$$

onde  $A_e = b_m^2$  é a área limitada pela linha média da parede fictícia.

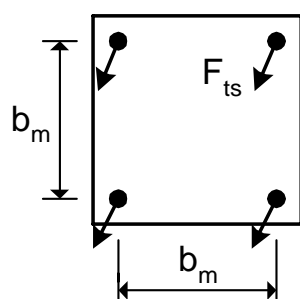
$$A_{sw} = \frac{100T_d}{2A_e f_{yd}}, \text{ cm}^2/\text{m} \quad (1.3.9)$$

**Área de estribos por metro de comprimento da viga**

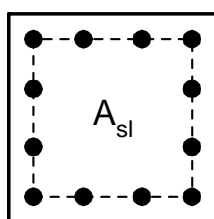
### Observações:

- No caso da torção, só se pode contar com um ramo dos estribos, pois todos os ramos estão submetidos à força de tração  $F_{te}$ , inclusive aqueles situados nas faces superior e inferior da viga.
- Desse modo, os estribos para torção devem ser fechados, obrigatoriamente.
- Antes de empregar as tabelas para estribos de 2 ramos constantes no Apêndice 3 do Volume 2, deve-se multiplicar a área  $A_{sw}$  por 2.

### Dimensionamento da armadura longitudinal:



modelo



disposição real

**Modelo e disposição  
real das barras  
longitudinais na seção**

$$F_{te} = F_{ts} = \frac{T_d}{2b_m} \quad (\text{equação (1.3.5)})$$

$F_{ts}$  = força de tração solicitante concentrada em cada quina da seção

Força  $f_{ts}$  por unidade de comprimento da linha média da parede

fictícia:

$$f_{ts} = \frac{F_{ts}}{b_m} = \frac{T_d}{2A_e} \quad (1.3.10)$$



Força de tração resistente por unidade de comprimento da linha

média: 
$$f_{tsr} = \frac{A_{sl} f_{yd}}{u} \quad (1.3.11)$$

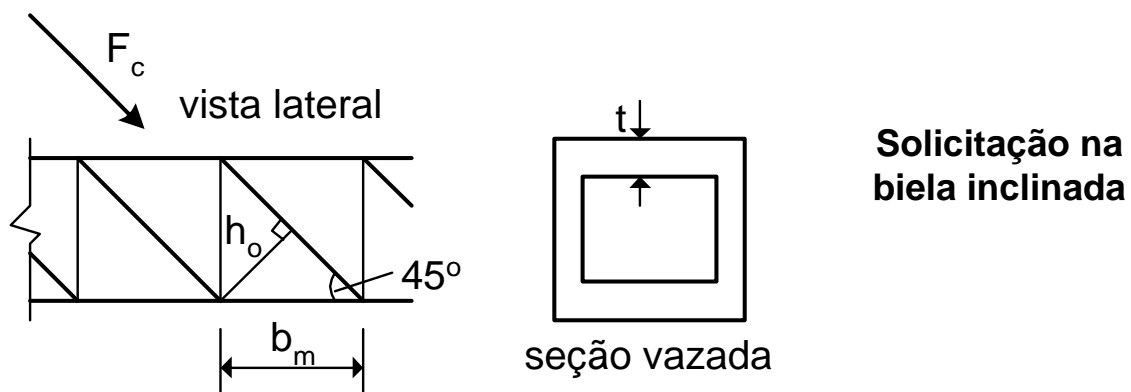
onde  $A_{sl}$  é a área da seção das barras longitudinais distribuídas ao longo da linha média da parede fictícia e  $u$  é o perímetro da linha média da parede.

Igualando (1.3.11) a (1.3.10), resulta

$$A_{sl} = \frac{T_d u}{2A_e f_{yd}}, \text{ cm}^2 \quad (1.3.12)$$

**Área total da armadura longitudinal,  
distribuída ao longo da linha média**

### Verificação das bielas de compressão:



A força  $F_c$  atua em uma área  $A_c = th_0$ , onde  $t$  é a espessura da parede fictícia e  $h_0$  é a dimensão normal à força, dada por

$$h_0 = b_m \text{ sen } 45^\circ \Rightarrow h_0 = b_m / \sqrt{2} \quad (1.3.13)$$

$$F_c = \frac{T_d}{b_m \sqrt{2}} \quad (1.3.4)$$

Visto anteriormente ↑

Fazendo  $\sigma_c = F_c / A_c$ , resulta:

$$\sigma_c = \frac{T_d}{A_e t} \quad (1.3.14) \quad \star$$

Considerando a distribuição das tensões tangenciais na seção transversal vazada, pode-se demonstrar (ver cap.1, Volume 4) que

$$\sigma_c = 2\tau_{td}, \text{ onde } \tau_{td} = \frac{T_d}{2A_e t} \quad \begin{array}{l} \text{Tensão} \\ \text{convencional de} \\ \text{cisalhamento} \end{array} \quad (1.3.22)$$

Segundo a NBR-6118, deve-se limitar  $\sigma_c \leq 0,50\alpha_v f_{cd}$ , para não haver esmagamento das bielas.

Fazendo isto, resulta

$$\tau_{td} \leq \tau_{tu} \quad (1.3.24)$$

onde  $\tau_{tu} = 0,25\alpha_v f_{cd}$  (1.3.25)

sendo  $\alpha_v = 1 - f_{ck}/250$ , com  $f_{ck}$  em MPa.

## 1.4- CRITÉRIO DE PROJETO DA NBR-6118

**Verificação da segurança das bielas:**

$$\tau_{td} = \frac{T_d}{2A_e t} \leq \tau_{tu} \quad ; \quad \tau_{tu} = 0,25\alpha_v f_{cd} \quad ;$$

$$\alpha_v = 1 - f_{ck}/250 \quad \text{com } f_{ck} \text{ em MPa}$$

Nos casos correntes, onde há torção com flexão, deve-se garantir

que 
$$\frac{\tau_{td}}{\tau_{tu}} + \frac{\tau_{wd}}{\tau_{wu}} \leq 1$$

onde  $\tau_{wd}$  e  $\tau_{wu}$  são as tensões tangenciais obtidas no dimensionamento ao esforço cortante.

**Estribos verticais para torção:**

$$A_{sw} = \frac{100T_d}{2A_e f_{yd}}, \text{ cm}^2/\text{m}$$

**Armadura longitudinal:**

$$A_{sl} = \frac{T_d u}{2A_e f_{yd}}, \text{ cm}^2$$

Para o cálculo das armaduras, deve-se limitar a tensão de escoamento do aço em 435 MPa.

### Observações:

**1)** Os estribos para torção devem ser fechados e com extremidades ancoradas por meio de ganchos em ângulo de 45°. O diâmetro da barra do estribo deve ser maior ou igual a 5 mm e não deve exceder 1/10 da largura da alma da viga.

**2)** As armaduras obtidas nos dimensionamentos à torção e à flexão são superpostas. Na soma das seções necessárias dos estribos, deve-se lembrar que para a torção só se pode contar com um ramo dos mesmos.

Área total de estribos:  $A_{sw,tot} = A_{sw,V} + 2A_{sw,T}$

$A_{sw,V}$  = área dos estribos para o esforço cortante

$A_{sw,T}$  = área de estribos para torção.

**3)** A área total dos estribos,  $A_{sw,tot}$ , deve respeitar a área mínima,  $A_{sw,min} = \rho_{w,min} 100b_w$ , cm<sup>2</sup>/m, onde  $b_w$  é a largura média da seção da peça.

$$\rho_{w,min} = 0,2 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \quad \star$$

Tabela 1.4.1 - Valores de  $\rho_{w,min}$  (%) para o aço CA-50

$f_{ck}$ (MPa)	<b>20</b>	<b>25</b>	<b>30</b>	<b>35</b>	<b>40</b>	<b>45</b>	<b>50</b>
$\rho_{w,min}$	0,09	0,10	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16
$f_{ck}$ (MPa)	<b>55</b>	<b>60</b>	<b>70</b>	<b>80</b>	<b>90</b>		
$\rho_{w,min}$	0,17	0,17	0,18	0,19	0,20		

4) O espaçamento máximo dos estribos é dado por

$$s_{\max} = 0,6d \leq 30 \text{ cm, se } \tau_{td} / \tau_{tu} + \tau_{wd} / \tau_{wu} \leq 0,67 ;$$

$$s_{\max} = 0,3d \leq 20 \text{ cm, se } \tau_{td} / \tau_{tu} + \tau_{wd} / \tau_{wu} > 0,67 ;$$

onde  $d$  é a altura útil da seção da viga.

5) A área mínima da armadura longitudinal,  $A_{sl,min}$ , é dada por

$$A_{sl,min} = \frac{\rho_{w,min}}{2} ub_w, \text{ cm}^2, \text{ onde } u \text{ é o perímetro da linha média da}$$

parede da seção vazada equivalente e  $\rho_{w,min}$  é dado na tabela.

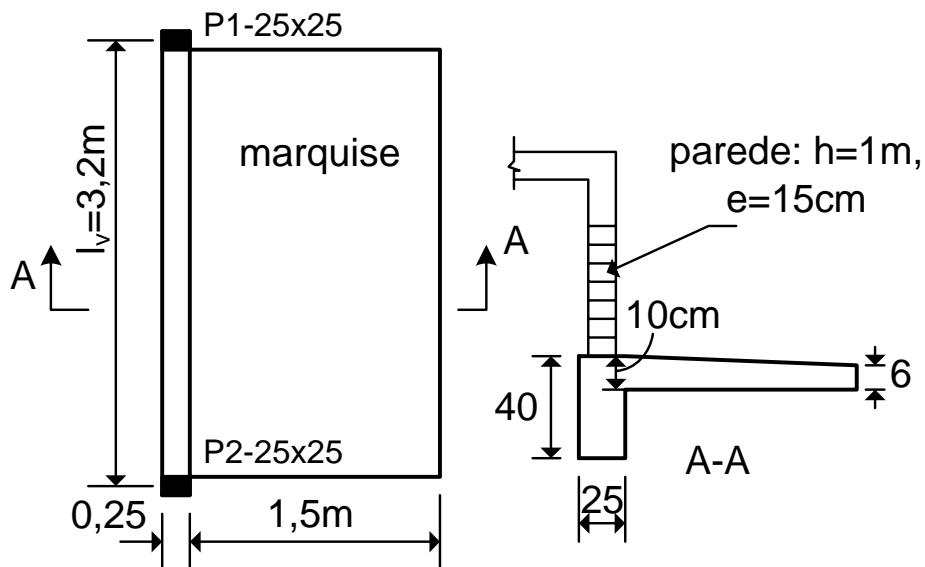
Prof. José Milton de Araújo - FURG

23

6) Em cada canto da armadura transversal, devem-se colocar barras longitudinais de bitola pelo menos igual à da armadura transversal e não inferior a 10.

7) Em seções retangulares com dimensões não superiores a 40cm, a armadura longitudinal para torção pode ser concentrada nos cantos. Em seções maiores, a armadura longitudinal deve ser distribuída ao longo do perímetro da seção, para limitar a abertura das fissuras. Recomenda-se que o espaçamento dessas barras não seja superior a 20 cm. Em qualquer caso, as barras longitudinais devem ser distribuídas de forma a manter constante a relação  $A_{sl}/u$ .

## 1.5- EXEMPLO DE DIMENSIONAMENTO



Viga suportando uma marquise

Concreto:  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$ ;  $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4} = 14,3 \text{ MPa}$

$$\alpha_v = 1 - f_{ck}/250 = 1 - 20/250 = 0,92$$

$$\tau_{wu} = 0,27\alpha_v f_{cd} \Rightarrow \tau_{wu} = 3,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{tu} = 0,25\alpha_v f_{cd} \Rightarrow \tau_{tu} = 3,2 \text{ MPa}$$

### A) Cálculo da marquise

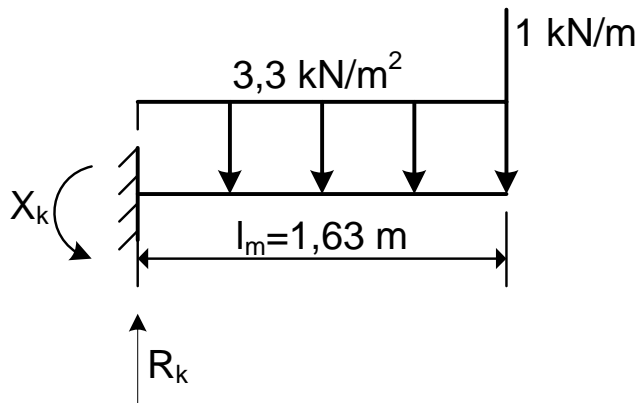
Cargas de serviço na marquise:

- peso próprio:  $25 \left( \frac{0,10 + 0,06}{2} \right) = 2 \text{ kN/m}^2$

- revestimento:  $0,8 \text{ kN/m}^2$

- carga acidental:  $0,5 \text{ kN/m}^2$

- carga acidental na extremidade do balanço:  $1 \text{ kN/m}$



$$R_k = 6,4 \text{ kN/m}$$

$$X_k = 6 \text{ kNm/m}$$

**Modelo de cálculo da marquise**

## B) Esforços na viga

Momento torçor por unidade de comprimento  $X_k = 6 \text{ kNm/m}$ .

$$T_k = \frac{X_k l_v}{2} = \frac{6 \times 3,2}{2} \Rightarrow T_k = 9,6 \text{ kNm} \quad (\text{momento torçor})$$

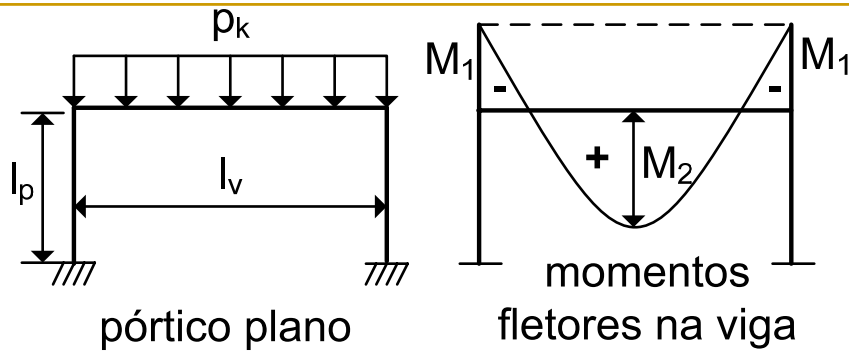
## Cargas verticais aplicadas na viga:

- ação da marquise:  $R_k = 6,4 \text{ kN/m}$
- peso próprio:  $25 \times 0,25 \times 0,4 = 2,5 \text{ kN/m}$
- parede de tijolo furado:  $13 \times 0,15 \times 1 = 1,95 \text{ kN/m}$

Carga total de serviço:  $p_k = 10,85 \text{ kN/m}$ .

## **Esforço cortante de serviço:**

$$V_k = \frac{p_k l_v}{2} = \frac{10,85 \times 3,2}{2} \Rightarrow V_k = 17,36 \text{ kN}$$



$$M_1 = M_{eng} \left( \frac{4I_p/l_p}{4I_p/l_p + 2I_v/l_v} \right) \quad \text{Momento negativo na viga}$$

$M_{eng} = p_k l_v^2 / 12 =$  momento de engastamento perfeito

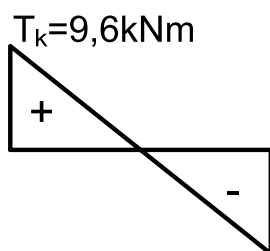
$I_v =$  momento de inércia da seção da viga

$I_p =$  momento de inércia das seções dos pilares.

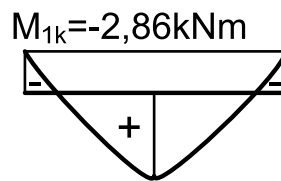
$l_v = 3,2 \text{ m} ; l_p = 3,5 \text{ m} ; p_k = 10,85 \text{ kN/m} \Rightarrow M_1 = -2,86 \text{ kNm.}$

Momento positivo no vão:

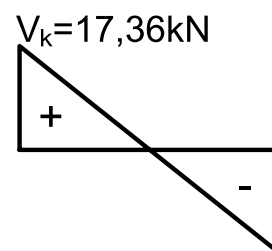
$$M_2 = \frac{p_k l_v^2}{8} + M_1 = \frac{10,85 \times 3,2^2}{8} - 2,86 = 11,03 \text{ kNm}$$



Momentos torçores



Momentos fletores



Esforços cortantes

**Diagramas de esforços solicitantes de serviço na viga**

---

## Seções para dimensionamento da viga: engaste e seção central

Seção central: apenas o momento fletor  $M_{2k} = 11,03 \text{ kNm}$ .

Seção do engaste:

$$M_{1k} = -2,86 \text{ kNm (momento fletor)}$$

$$V_k = 17,36 \text{ kN (esforço cortante)}$$

$$T_k = 9,6 \text{ kNm (momento torçor)}$$

### **C) Dimensionamento à flexão**

Resulta armadura mínima para os dois momentos fletores.

$$A_{s,min} = \rho_{min}bh = \frac{0,15}{100} \times 25 \times 40 = 1,5 \text{ cm}^2$$

Deve-se dispor uma armadura longitudinal com área  $A_s = 1,5 \text{ cm}^2$  na face inferior e na face superior da viga.

---

---

### **D) Dimensionamento ao esforço cortante**

$$V_d = 1,4 \times 17,36 = 24,30 \text{ kN}$$

Dimensionando para o esforço cortante  $V_d = 24,30 \text{ kN}$ , resulta  $A_{sw,V} = 0$ , pois  $\tau_d = 1,11(\tau_{wd} - \tau_c) = 0$ .

### **E) Dimensionamento à torção**

$$\text{Momento torçor de cálculo: } T_d = 1,4 \times 9,6 = 13,44 \text{ kNm}$$



**Dados da seção vazada equivalente**



$$t = \frac{bh}{2(b+h)} = 7,69 \text{ cm} \quad \star$$

$$2C_1 = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}$$

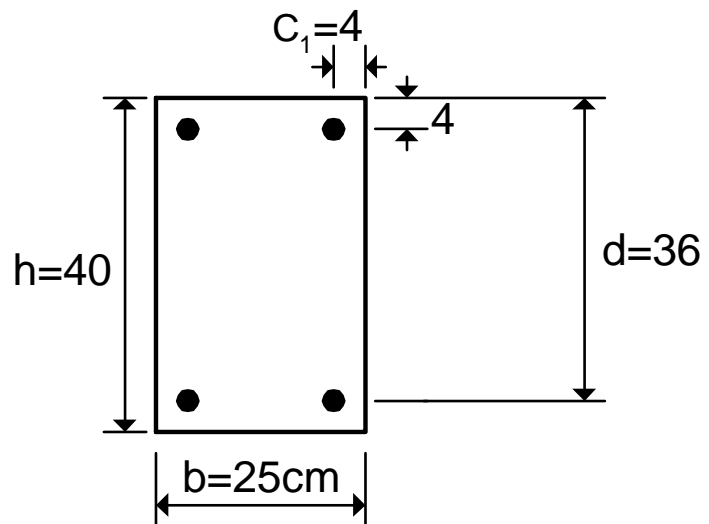
Como  $t < 2C_1$ : seção vazada do caso 2

$$t_{\max} = b - 2C_1 = 25 - 8 = 17 \text{ cm}$$

Como  $t < t_{\max} \rightarrow t = 7,69 \text{ cm}$

$$A_e = (b - 2C_1)(h - 2C_1) = 544 \text{ cm}^2 \quad \star$$

$$u = 2(b + h - 4C_1) = 98 \text{ cm} \quad \star$$



Verificação das tensões no concreto:

$$\tau_{td} = \frac{T_d}{2A_e t} = \frac{1344}{2 \times 544 \times 7,69} \Rightarrow \tau_{td} = 0,161 \text{ kN/cm}^2 \quad (\tau_{td} = 1,61 \text{ MPa})$$

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d} = \frac{24,3}{25 \times 36} \Rightarrow \tau_{wd} = 0,027 \text{ kN/cm}^2 \quad (\tau_{wd} = 0,27 \text{ MPa})$$

$$\frac{\tau_{td}}{\tau_{tu}} + \frac{\tau_{wd}}{\tau_{wu}} = 0,58 < 1 \quad \text{OK!}$$

Cálculo das armaduras ( $f_{yd} = 43,48 \text{ kN/cm}^2$ ):

$$A_{sw} = \frac{100T_d}{2A_e f_{yd}} = \frac{100 \times 1344}{2 \times 544 \times 43,48} \Rightarrow A_{sw,T} = 2,84 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_{sl} = \frac{T_d u}{2A_e f_{yd}} = \frac{1344 \times 98}{2 \times 544 \times 43,48} \Rightarrow A_{sl} = 2,78 \text{ cm}^2$$

Armadura longitudinal mínima:

$\rho_{w,min} = 0,09\%$  é dado na tabela

$$A_{sl,min} = \left( \rho_{w,min} / 2 \right) u b_w = 1,10 \text{ cm}^2$$

Logo, prevalece o valor calculado  $A_{sl} = 2,78 \text{ cm}^2$ .

### **F) Superposição das armaduras**

Área total dos estribos:

$$A_{sw,tot} = A_{sw,V} + 2A_{sw,T} = 0 + 2 \times 2,84 = 5,68 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Área mínima de estribos:  $A_{sw,min} = \rho_{w,min} 100b_w = 2,25 \text{ cm}^2/\text{m}$ .

Logo, deve-se adotar  $A_{sw,tot} = 5,68 \text{ cm}^2/\text{m}$ .

Como resultou  $\tau_{td} / \tau_{tu} + \tau_{wd} / \tau_{wu} \leq 0,67$  :

$$s_{\max} = \begin{cases} 0,6d = 21,6 \text{ cm} \\ 30 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow s_{\max} = 21 \text{ cm} \leftarrow \text{OK!}$$

Da Tabela A3.3 (Apêndice 3 do Volume 2):

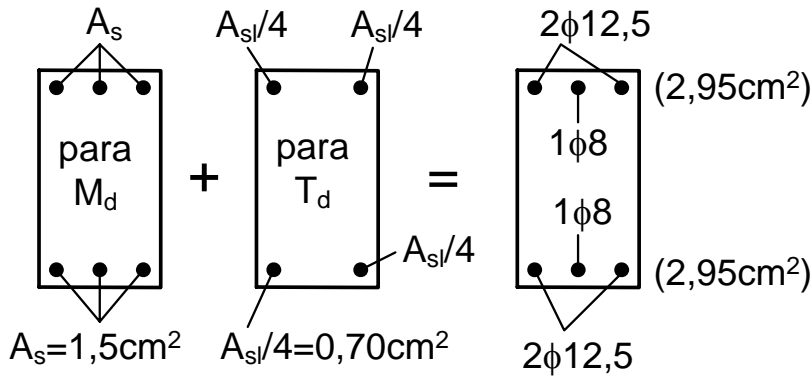
para  $A_{sw,tot} = 5,68 \text{ cm}^2/\text{m}$ , obtém-se a solução  $\phi 6,3 \text{ c.}10$ .

### Armadura longitudinal: alternativa 1

Como a seção possui dimensão máxima de 40 cm, a armadura longitudinal para torção pode ser concentrada nos cantos.

Em cada canto da seção:  $A_{sl}/4 = 2,78/4 \cong 0,70 \text{ cm}^2$ .

Nas faces superior e inferior:  $A_s = 1,5 \text{ cm}^2$  (da flexão).

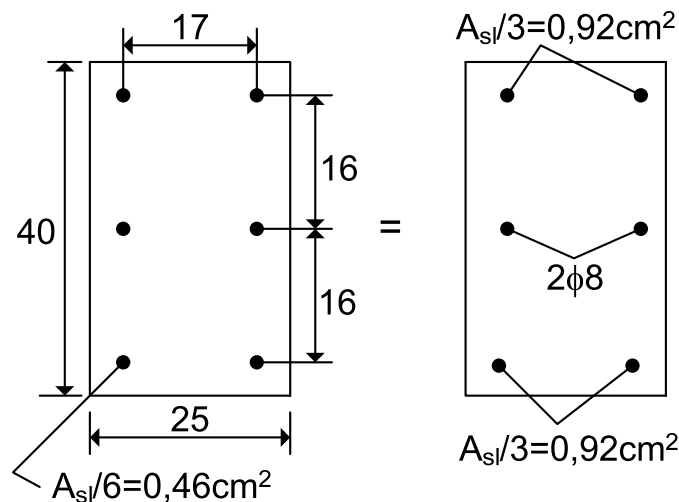


Engastar as armaduras longitudinais nos pilares

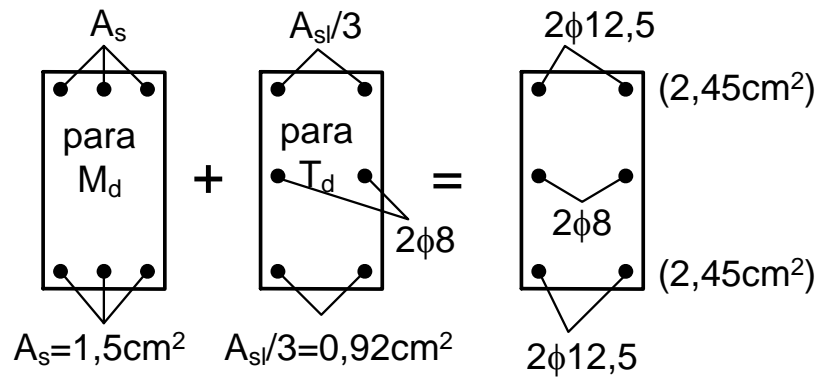
Observar que as barras dos cantos possuem  $\phi \geq 10 \text{ mm}$ .

### Armadura longitudinal: alternativa 2

Armadura para torção distribuída uniformemente ao longo da linha média da seção vazada equivalente (solução exigida para vigas de seções grandes).



Armadura para torção



Solução alternativa para a armadura longitudinal

### Cálculo alternativo como viga biapoiada

$$\text{Momento positivo no vão: } \bar{M}_2 = \frac{p_v l_v^2}{8} = \frac{10,85 \times 3,2^2}{8} = 13,89 \text{ kNm}$$

$$\text{Momento negativo nos apoios: } \bar{M}_1 = -0,25 \times 13,89 = -3,47 \text{ kNm}$$

Essa solução fornece momentos fletores maiores que os obtidos como pórtico (**nesse exemplo em particular**).

Entretanto, o dimensionamento para esses momentos também resulta em armadura mínima, não havendo alteração na solução final.