

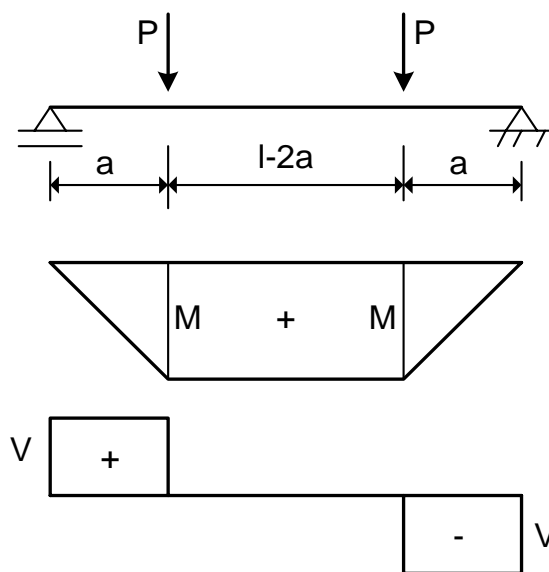
CAPÍTULO 6 – Volume 1

ESFORÇO CORTANTE

Prof. José Milton de Araújo - FURG

1

6.1 - Introdução



Entre as cargas: flexão pura

Tensões normais: σ_x e σ_y

Entre a carga e o apoio: flexão simples

Tensões normais: σ_x e σ_y e tensão tangencial

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Na teoria de vigas:

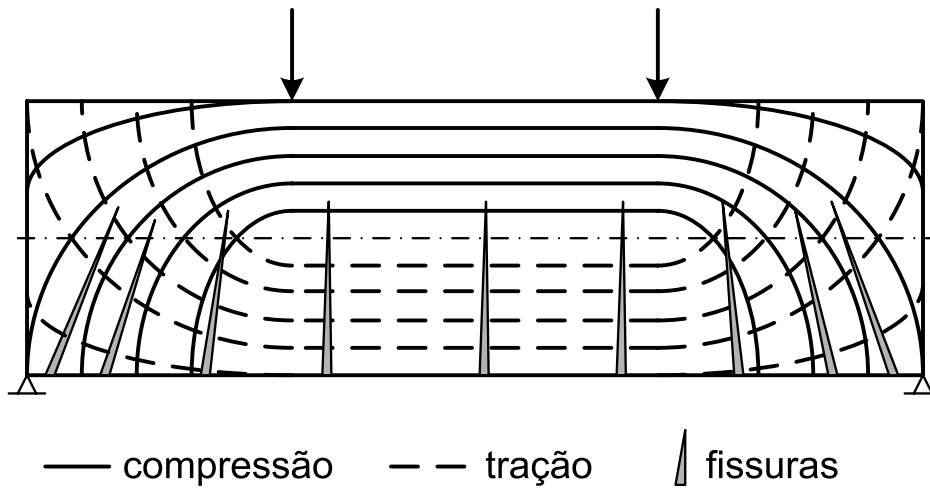
$$\sigma_y = 0$$

No estágio I: podem-se empregar as fórmulas da Resistência dos Materiais

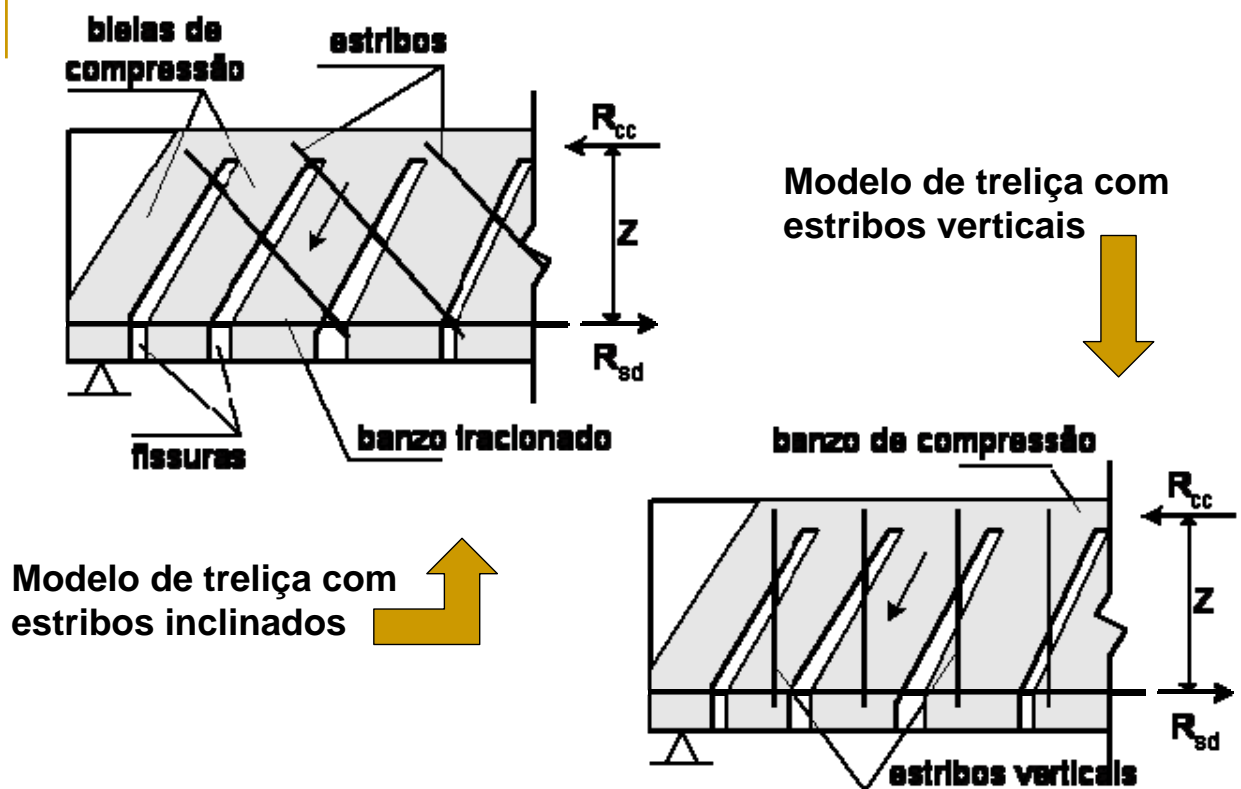
No estágio II: dimensionamento com base no modelo de treliça de Morsch

Prof. José Milton de Araújo - FURG

2



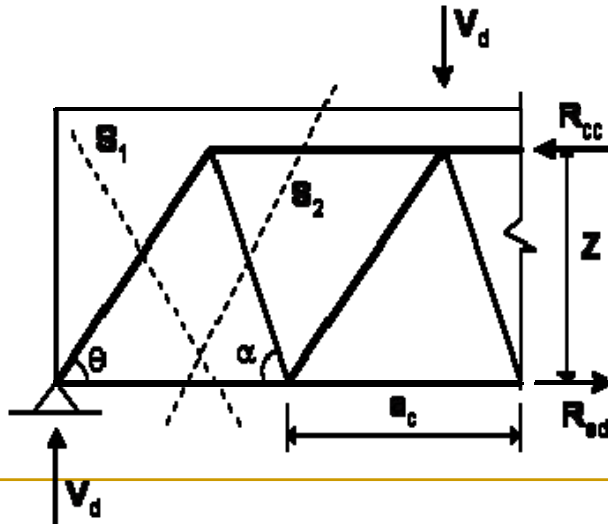
Trajatórias das tensões principais e orientação das fissuras



Treliça clássica de Mörsch: bielas inclinadas a 45° em relação ao eixo da viga (modelo original).

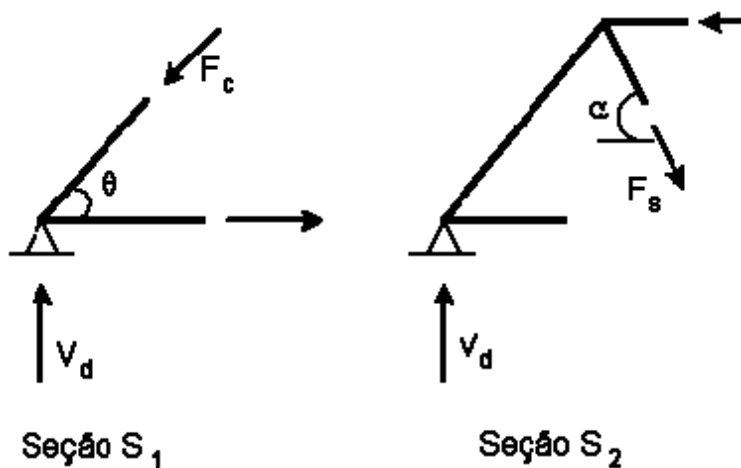
Treliça generalizada de Mörsch: o ângulo de inclinação das bielas varia entre 30° e 45° (modelo atual).

6.2 – Treliça generalizada de Mörsch



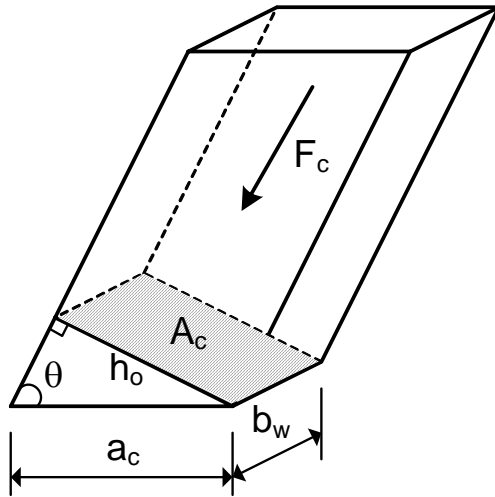
Distância entre os nós da treliça no modelo:

$$a_c = Z(\cotg \theta + \cotg \alpha)$$



$$F_c = \frac{V_d}{\text{sen } \theta}$$

$$F_s = \frac{V_d}{\text{sen } \alpha}$$



$$h_o = a_c \operatorname{sen} \theta \quad A_c = b_w h_o$$

$$\sigma_c = F_c / A_c \quad (\text{tensão de compressão})$$

$$a_c = Z(\cotg \theta + \cotg \alpha)$$

$$\sigma_c = \frac{F_c}{b_w Z(\cotg \theta + \cotg \alpha) \operatorname{sen} \theta}$$

Biela de compressão

$$\text{Substituindo } F_c = \frac{V_d}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \sigma_c = \frac{V_d}{b_w Z(\cotg \theta + \cotg \alpha) \operatorname{sen}^2 \theta}$$

Adotando $Z = 0,90d$, onde d é a altura útil da viga

$$\sigma_c = \frac{1,11\tau_{wd}}{(\cotg \theta + \cotg \alpha) \operatorname{sen}^2 \theta} \quad \text{onde } \tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d} \quad \text{= tensão convencional de cisalhamento}$$

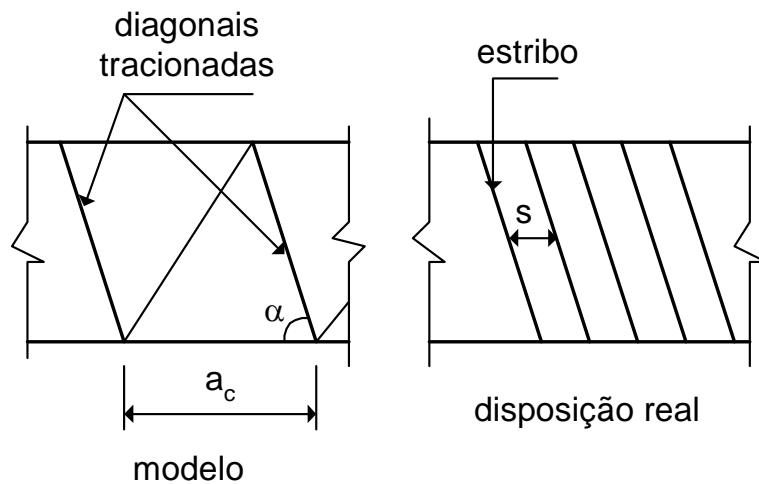
- Verificação quanto ao esmagamento das bielas:

$$\sigma_c \leq f_{cdr}, \quad \text{onde } f_{cdr} = 0,60 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} = 0,60 \alpha_v f_{cd} \quad \text{com } f_{ck} \text{ em MPa.}$$

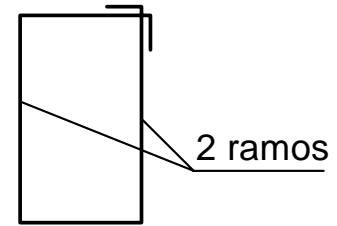
Fixando $\theta = 45^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ e fazendo $\sigma_c \leq f_{cdr}$, resulta

$$\tau_{wd} \leq \tau_{wu} \quad \text{onde } \tau_{wu} = 0,27 \alpha_v f_{cd}, \quad \alpha_v = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right)$$

- Cálculo da armadura transversal:



Estribo simples ou de dois ramos



A_{s1} = área da seção transversal de um estribo, considerados todos os seus ramos

A_s = área total da armadura no trecho de comprimento $a_c \Rightarrow$

$$A_s = \frac{a_c}{s} A_{s1}$$

Força de tração resistente $\Rightarrow F_{sr} = A_s f_{yd}$

Força de tração solicitante $\Rightarrow F_s = \frac{V_d}{\text{sen } \alpha}$

Condição de equilíbrio : $F_{sr} = F_s$

Da equação de equilíbrio: $\frac{A_{s1}}{s} = \frac{V_d}{Z f_{yd} (\cotg \theta + \cotg \alpha) \text{sen } \alpha}$, cm^2/cm

$$A_{sw} = \frac{100V_d}{Z f_{yd} (\cotg \theta + \cotg \alpha) \text{sen } \alpha}$$
, cm^2/m

Substituindo $Z = 0,90d$, resulta

$$A_{sw} = \frac{100b_w (1,11\tau_{wd})}{f_{yd} (\cotg \theta + \cotg \alpha) \text{sen } \alpha}$$
, cm^2/m

6.3 – Treliça clássica de Morsch

Adotando $\theta = 45^\circ$, resulta $A_{sw} = \frac{100b_w(1,11\tau_{wd})}{f_{yd}(1 + \cotg\alpha)\text{sen}\alpha}$, cm^2/m

Os resultados experimentais indicam que esta equação fornece uma armadura excessiva.

Alternativas: adotar $\theta < 45^\circ$ ou reduzir a tensão τ_{wd} para $\tau_{wd} - \tau_c$.

Com a segunda alternativa, resulta:

$$A_{sw} = \frac{100b_w\tau_d}{f_{yd}(1 + \cotg\alpha)\text{sen}\alpha}, \text{cm}^2/\text{m} \quad \text{onde} \quad \tau_d = 1,11(\tau_{wd} - \tau_c)$$

Adotando estribos verticais ($\alpha = 90^\circ$): $A_{sw} = 100b_w \frac{\tau_d}{f_{yd}}$, cm^2/m

6.4 – Critério de projeto da NBR-6118

- $\tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d}$ (tensão convencional de cisalhamento)

b_w = largura das seções retangulares ou largura da nervura das seções T. Se a largura varia, considerar a menor largura ao longo da altura útil d .

- $\tau_{wu} = 0,27\alpha_v f_{cd}$, com $\alpha_v = 1 - \frac{f_{ck}}{250}$ e f_{ck} em MPa.
- Verificar bielas: $\tau_{wd} \leq \tau_{wu}$. Se não atender, aumentar as dimensões da seção transversal.
- Cálculo da armadura:

$$\tau_c = 0,09(f_{ck})^{2/3}, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_c = 0,636\ln(1 + 0,11f_{ck}), \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_d = 1,11(\tau_{wd} - \tau_c) \geq 0$$

Estribos verticais: $A_{sw} = 100b_w \frac{\tau_d}{f_{yd}}$, cm²/m

Considerar $f_{yd} \leq 435$ MPa.

- Armadura mínima: $A_{sw, \min} = \rho_{w, \min} 100b_w$, cm²/m

Se a largura b_w varia, considerar a largura média.

Tabela 6.4.1 - Valores de $\rho_{w, \min}$ (%) para o aço CA-50

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
$\rho_{w, \min}$	0,09	0,10	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16
f_{ck} (MPa)	55	60	70	80	90		
$\rho_{w, \min}$	0,17	0,17	0,18	0,19	0,20		

Exemplo:

Concreto:
 $f_{ck} = 20$ MPa

Aço CA-60:
 $f_{yk} = 60$ kN/cm²
→ $f_{yk} = 600$ MPa

- Resistências de cálculo:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = \frac{20}{1,4} = 14,3 \text{ MPa}; \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{600}{1,15} = 521,7 \text{ MPa}$$

Como $f_{yd} > 435$ MPa, deve-se adotar $f_{yd} = 435$ MPa.

- **Esforço cortante** (característico): $V_k = \frac{p_k l}{2} = \frac{15 \times 4}{2} = 30 \text{ kN}$

- **Esforço cortante de cálculo:** $V_d = \gamma_f V_k = 1,4 \times 30 = 42 \text{ kN}$

- **Tensão convencional de cisalhamento:**

$$\tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d} = \frac{42}{12 \times 36} = 0,097 \text{ kN/cm}^2 \Rightarrow \tau_{wd} = 0,97 \text{ MPa}$$

- **Tensão de cisalhamento limite:**

$$\tau_{wu} = 0,27 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} = 0,27 \left(1 - \frac{20}{250} \right) 14,3 = 3,5 \text{ MPa}$$

- **Verificação da biela de compressão:**

$$\tau_{wd} = 0,97 \text{ MPa} \text{ é menor que } \tau_{wu} = 3,5 \text{ MPa. OK!}$$

- **Cálculo da armadura transversal:**

$$\tau_c = 0,09 (f_{ck})^{2/3} = 0,09 (20)^{2/3} = 0,66 \text{ MPa}$$

$$\tau_d = 1,11 (\tau_{wd} - \tau_c) = 1,11 (0,97 - 0,66) = 0,34 \text{ MPa}$$

$$A_{sw} = 100 b_w \frac{\tau_d}{f_{yd}} = 100 \times 12 \times \frac{0,34}{435} = 0,94 \text{ cm}^2/\text{m}$$

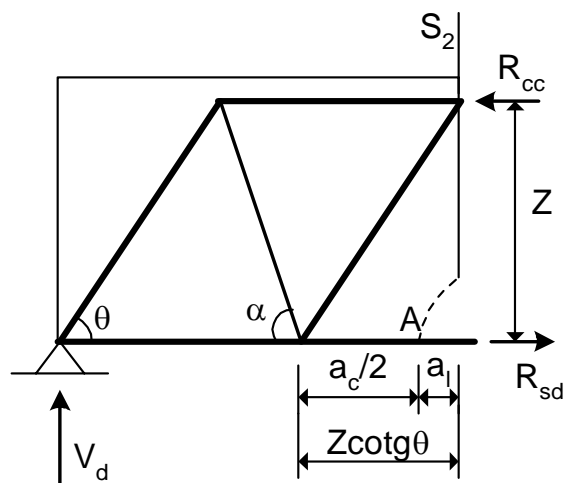
$$\rho_{w,\min} = 0,09\% \text{ (tabela 6.4.1)}$$

$$A_{sw,\min} = \rho_{w,\min} 100 b_w = 0,09 \times 12 = 1,08 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Como A_{sw} é menor que $A_{sw,\min}$, adotar a armadura mínima.

Solução: $A_{sw} = 1,08 \text{ cm}^2/\text{m}$.

6.5 – Força na armadura longitudinal de tração



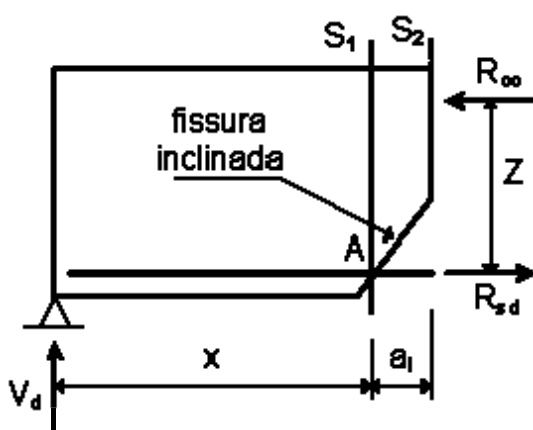
$$a_l = Z \cotg \theta - a_c / 2$$

Substituindo

$$a_c = Z(\cotg \theta + \cotg \alpha), \text{ resulta}$$

$$a_l = \frac{Z}{2}(\cotg \theta - \cotg \alpha)$$

Viga com uma fissura inclinada



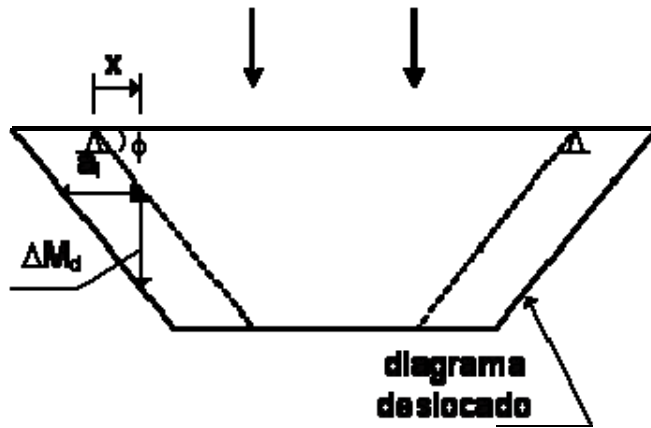
$$R_{sd} = \frac{M_d + \Delta M_d}{Z}$$

Momento fletor na seção S1:

$$M_d = V_d x$$

$$\Delta M_d = V_d a_l$$

- A força na armadura na seção S1 é proporcional ao momento fletor solicitante na seção S2, dela afastada de uma distância igual a a_l .
- Ao detalhar a armadura longitudinal de tração da viga, deve-se considerar um diagrama de momentos fletores deslocado de a_l no sentido desfavorável.



$$\Delta M_d = a_l \operatorname{tg} \phi$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{dM_d}{dx} = V_d$$

$$\text{Resulta } \Delta M_d = a_l V_d$$

NBR-6118:
$$a_l = d \left[\frac{\tau_{wd}}{2(\tau_{wd} - \tau_c)} (1 + \cot g \alpha) - \cot g \alpha \right]$$

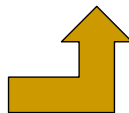
a) Vigas com estribos verticais: $0,5d \leq a_l \leq d$

b) Lajes sem armadura de cisalhamento: $a_l = 1,5d$

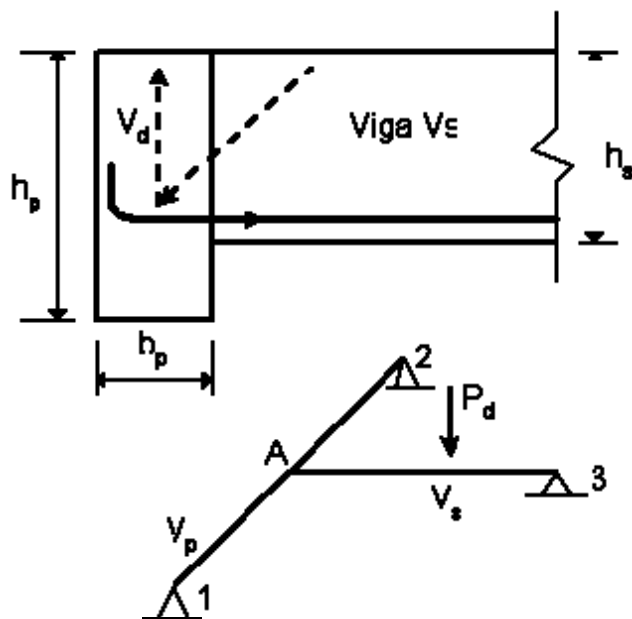
6.6 – Peças de altura variável

6.7 – Seções próximas aos apoios

Temas para pesquisa



6.8 – Armadura de suspensão

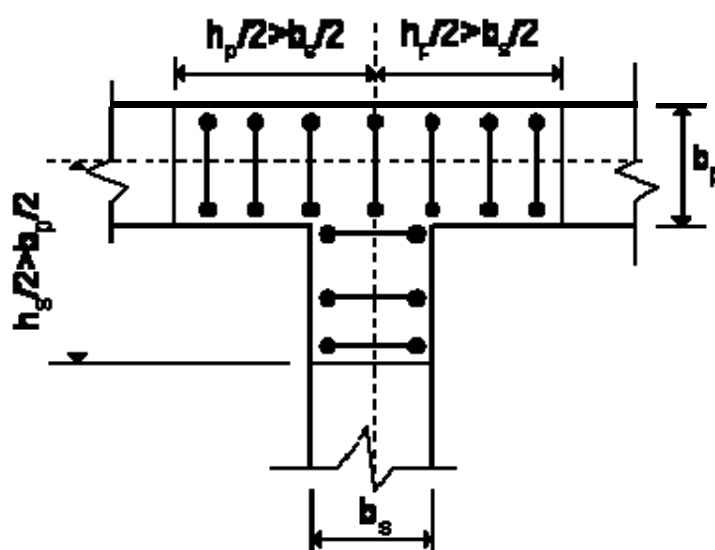


No ponto **A** temos um apoio indireto.

Área da armadura de suspensão:

$$A_s = \frac{V_d}{f_{yd}} \quad \text{cm}^2/\text{m}$$

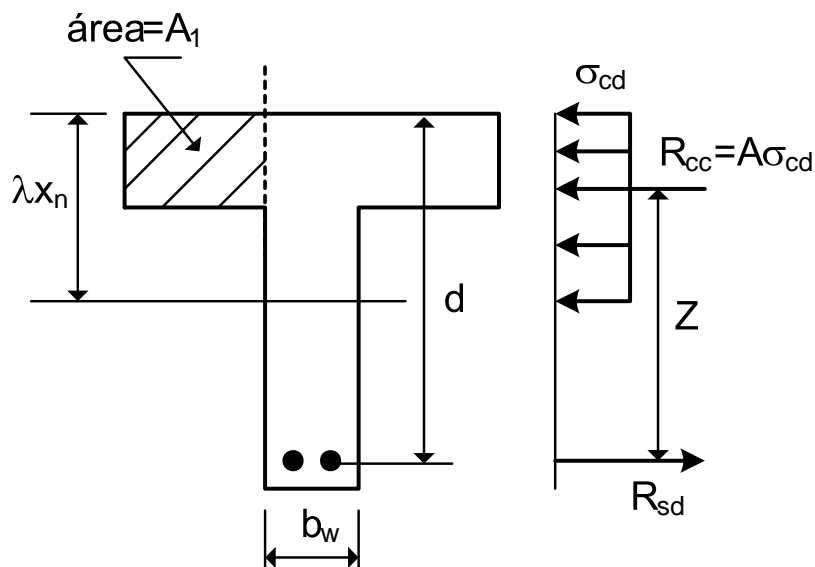
Usar estribos verticais.



A armadura de suspensão pode ser distribuída na região indicada.

Colocamos $0,7A_s$ na viga principal e $0,3A_s$ na viga secundária.

6.9 – Armadura de costura



- Verificação das bielas na mesa de compressão: $\tau_{cd} \leq \tau_{wu}$

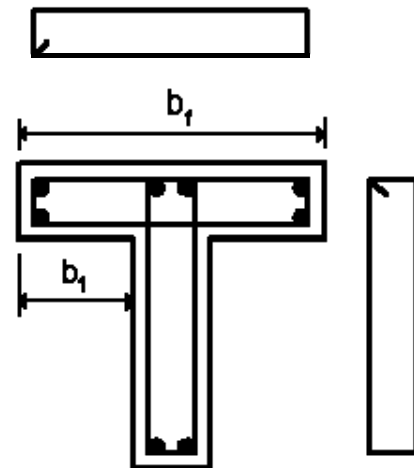
$$\tau_{cd} = \frac{A_1}{A} \frac{b_w}{h_f} \tau_{wd} ; \quad \tau_{wd} = \frac{V_d}{b_w d} ; \quad \tau_{wu} = 0,27 \alpha_v f_{cd}, \text{ MPa}$$

- Armadura de costura:

$$A_{sf} = 100 b_w \frac{A_1}{A} \frac{\tau_d}{f_{yd}}, \text{ cm}^2/\text{m} ; \quad \tau_d = 1,11 \tau_{wd}$$

$$\text{Armadura mínima: } A_{sf, \min} = 1,5 \text{ cm}^2/\text{m}$$

estribos horizontais de costura



estribos verticais para o esforço cortante

Armaduras da seção T

6.10 – Lajes sem armadura de cisalhamento

A NBR-6118 dispensa o uso de armadura transversal nas lajes quando $\tau_{wd} \leq \tau_{wu1}$, sendo $\tau_{wd} = V_d / (b_w d)$ a tensão convencional de cisalhamento.

$$\tau_{wu1} = k(1,2 + 40\rho_1)\tau_{rd}$$

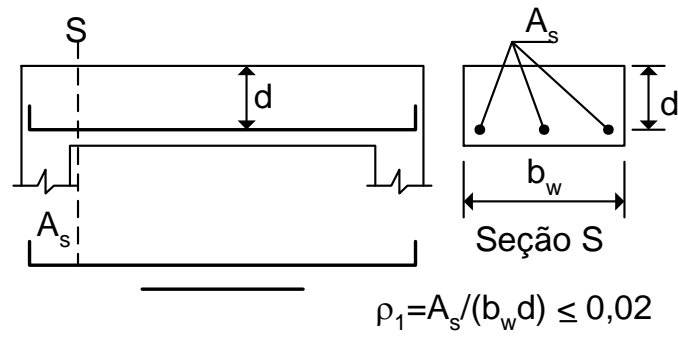
$$\tau_{rd} = 0,0375(f_{ck})^{2/3}, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\tau_{rd} = 0,265 \ln(1 + 0,11f_{ck}), \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$

Coeficiente k :

- para lajes onde 50% da armadura inferior não chegam até o apoio:
 $k = 1$;

- para os demais casos: $k = 1,6 - d \geq 1$, onde d é a altura útil da laje em metros.



OBS: Em geral, nos edifícios residenciais e de escritórios $\tau_{wd} \ll \tau_{wu1}$, não sendo necessário fazer esta verificação.