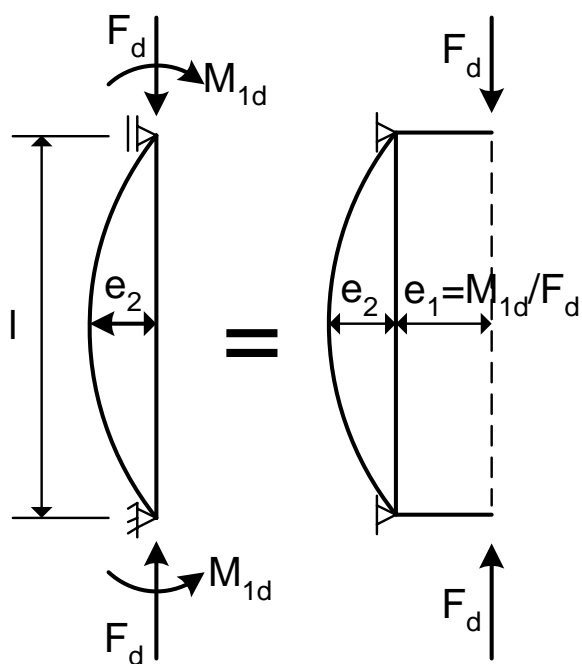


PILARES

1- INTRODUÇÃO



M_{1d} = momento fletor de primeira ordem

$M_{2d} = F_d e_2$ = momento fletor de segunda ordem

$M_d = M_{1d} + M_{2d}$ = momento total

Dimensionar para M_d e $N_d = F_d$
(Problema de flexo-compressão)

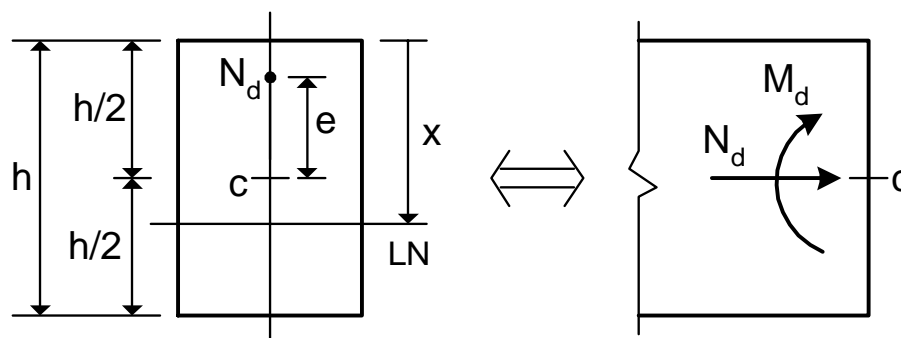
Simplificações das normas de projeto

- Nos pilares curtos ($\lambda \leq \lambda_1$): pode-se desprezar M_{2d}
- Nos pilares moderadamente esbeltos ($\lambda_1 < \lambda \leq 90$): pode-se calcular M_{2d} por algum processo simplificado
- Nos pilares esbeltos ($\lambda > 90$): exige-se o cálculo rigoroso de M_{2d} (através de métodos numéricos iterativos e incrementais; exemplo: software JM PILAR)
- Nos pilares intermediários e pilares de extremidade: dimensionamento à flexo-compressão normal.
- Nos pilares de canto: dimensionamento à flexo-compressão oblíqua.

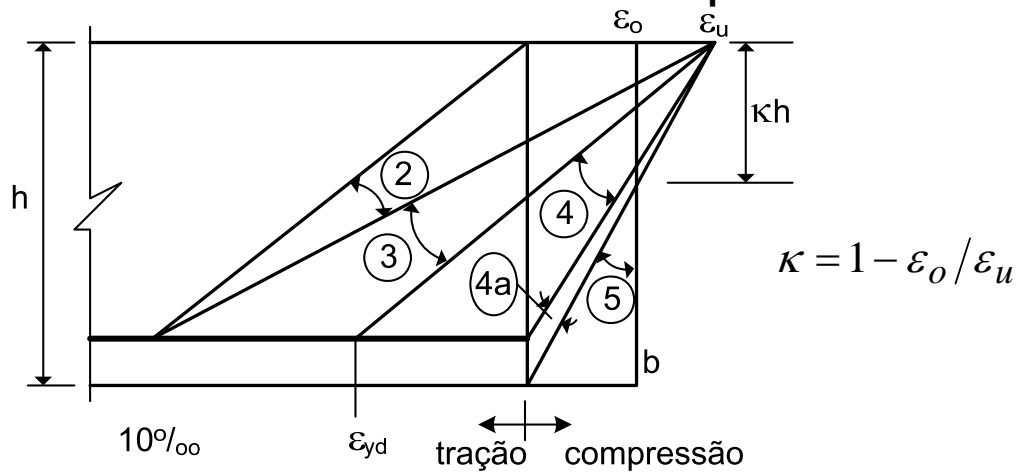
Para os pilares curtos e moderadamente esbeltos: calculamos M_{2d} por processo aproximado e dimensionamos a seção à flexo-compressão.

2- DIMENSIONAMENTO À FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

▪ O problema

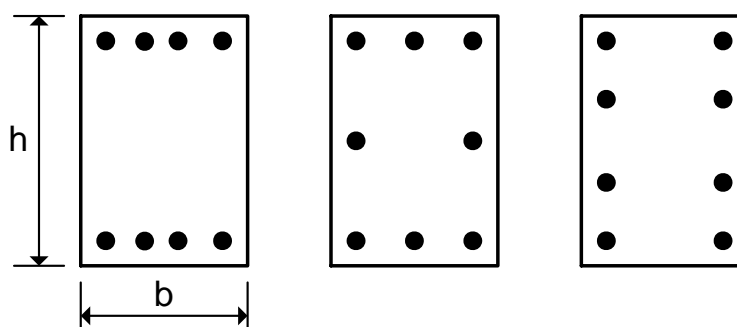


▪ Domínios de dimensionamento da flexo-compressão



$f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$	$f_{ck} > 50 \text{ MPa}$
$\epsilon_o (\text{‰}) = 2,0$	$\epsilon_o (\text{‰}) = 2,0 + 0,085(f_{ck} - 50)^{0,53}$
$\epsilon_u (\text{‰}) = 3,5$	$\epsilon_u (\text{‰}) = 2,6 + 35 \left(\frac{90 - f_{ck}}{100} \right)^4$

▪ Seções típicas dos pilares dos edifícios



- O processo de solução é iterativo: para encontrar a profundidade da linha neutra.
- Podemos usar um programa de computador (ex. **PACON**), tabelas de dimensionamento, diagramas de interação ou fórmulas aproximadas.

Tabelas para dimensionamento de seções retangulares (Apêndice 1)


Com $\delta = d'/h$ e a disposição das barras \Rightarrow identificar a tabela

$$\sigma_{cd} = 0,85 f_{cd}; \quad f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4}; \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15};$$

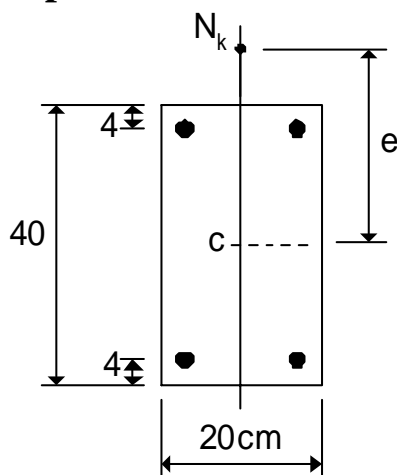
$$v = \frac{N_d}{bh\sigma_{cd}}; \quad \mu = \frac{M_d}{bh^2\sigma_{cd}}$$

Ler a taxa mecânica de armadura ω .

Calcular a área total da armadura $A_s = \omega bh \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}}$

As tabelas são restritas aos concretos do Grupo I 
(concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa).

Exemplo:



Aço CA-50: $f_{yk} = 500$ MPa.

$N_k = 410$ kN; $e = 25$ cm;

$f_{ck} = 20$ MPa;

(Seção com duas camadas de armadura)

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4} = \frac{20}{1,4} \cong 14 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad f_{cd} = 1,4 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{cd} = 0,85 f_{cd} = 12 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{cd} = 1,2 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15} = \frac{500}{1,15} = 434,78 \text{ kN/cm}^2$$

$$N_d = 1,4N_k = 1,4 \times 410 \Rightarrow N_d = 574 \text{ kN}$$

$$M_d = N_d e = 574 \times 25 \Rightarrow M_d = 14350 \text{ kNcm}$$

$$\nu = \frac{N_d}{bh\sigma_{cd}} = \frac{574}{20 \times 40 \times 1,2} \Rightarrow \nu \cong 0,60$$

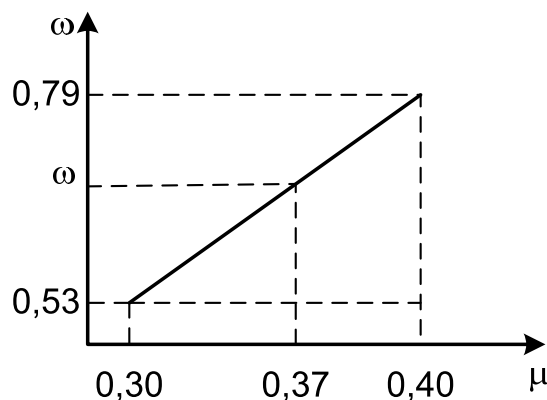
$$\mu = \frac{M_d}{bh^2\sigma_{cd}} = \frac{14350}{20 \times 40^2 \times 1,2} \Rightarrow \mu = 0,37$$

$$\delta = \frac{d'}{h} = \frac{4}{40} \Rightarrow \delta = 0,10 \Rightarrow$$

Tabela A1.2: Interpolando $\omega = 0,71$.

$$A_s = \omega bh \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} = 0,71 \times 20 \times 40 \times \frac{1,2}{43,48} \Rightarrow A_s = 15,7 \text{ cm}^2$$

Interpolação linear



Se $\mu = 0,37$:

$\omega = \text{anterior} + \text{diferença} \times 0,70$

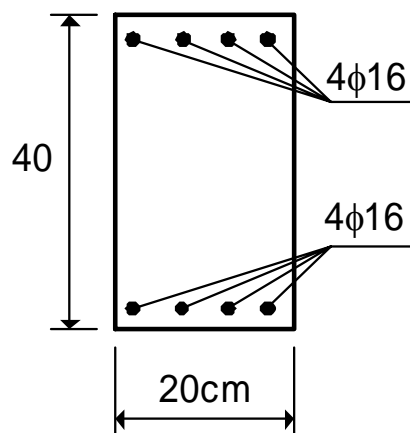


Regra prática

$$\frac{\omega - 0,53}{0,79 - 0,53} = \frac{0,37 - 0,30}{0,40 - 0,30} = 0,70$$

$$\omega = 0,53 + (0,79 - 0,53) \times \underline{0,70}$$

Tabela A3.2 (Apêndice 3 do Volume 2):
8 barras de 16 mm ($A_{se} = 16,08 \text{ cm}^2$).



Solução

Exemplo com três interpolações (caso geral):

$$v = 0,63 \text{ e } \mu = 0,37$$

$$\text{Tabela A1.2 para } v = 0,60: \omega = 0,53 + (0,79 - 0,53) \times 0,70 = 0,71$$

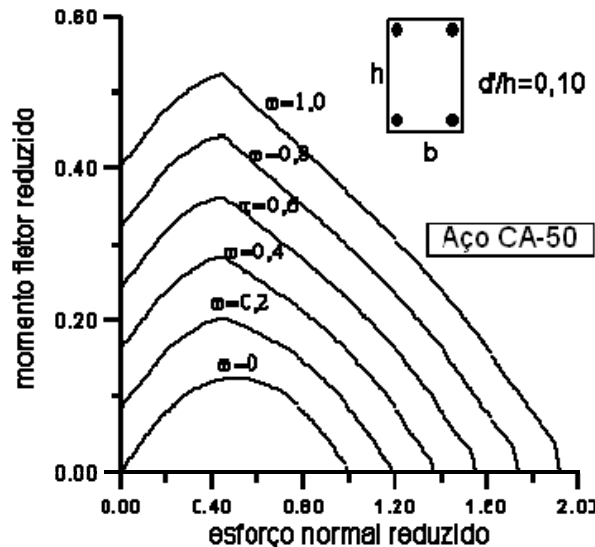
$$\text{Tabela A1.2 para } v = 0,70: \omega = 0,59 + (0,86 - 0,59) \times 0,70 = 0,78$$

Interpolando para $v = 0,63$ (multiplicador igual a **0,30**):

$$\omega = 0,71 + (0,78 - 0,71) \times 0,30 = \mathbf{0,73}$$

3- DIAGRAMAS DE INTERAÇÃO NA FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL

- Em vez de tabelas de dimensionamento, podem-se empregar gráficos denominados diagramas de interação.
- Para elaborar um diagrama, utiliza-se o mesmo processo iterativo.



Prof. José Milton de Araújo - FURG

13

Fórmulas aproximadas para flexo-compressão normal

Fórmulas apresentadas por Montoya: válidas para seções retangulares com duas camadas de armadura. $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$

$$\nu \leq 1 \Rightarrow \mu = (0,5 - \delta)\beta\omega + 0,468\nu(1 - \nu) \quad (1)$$

$$\nu > 1 \Rightarrow \mu = (0,5 - \delta)\beta(\omega + 1 - \nu) \quad (2)$$

Valores de β

ν	0	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	$\geq 1,0$
β	1,00	1,00	0,93	0,88	0,88	0,90	0,93

Resolvendo o exemplo anterior com a fórmula:

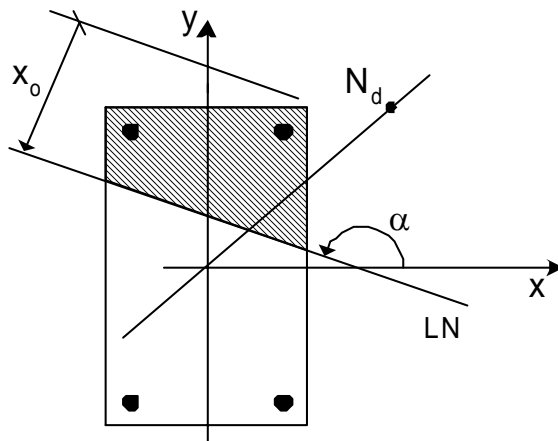
$$\nu = 0,60 \Rightarrow \beta = 0,93 ; \mu = 0,37 ; \delta = 0,10$$

$$\text{De (1): } \omega = \frac{\mu - 0,468\nu(1 - \nu)}{(0,5 - \delta)\beta} = 0,693 \Rightarrow A_s = \omega b h \frac{\sigma_{cd}}{f_{yd}} = 15,3 \text{ cm}^2$$

Prof. José Milton de Araújo - FURG

14

4- A FLEXO-COMPRESSÃO OBLÍQUA

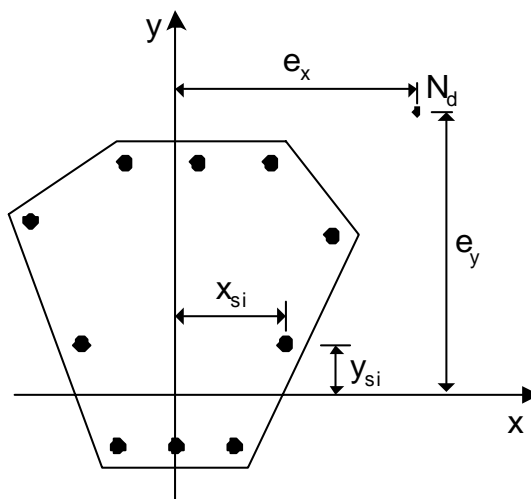


O problema fica mais complicado, pois a inclinação da linha neutra passa a ser incógnita.

Empregando o diagrama retangular, devemos trabalhar com

$$\sigma_{cd} = 0,80 f_{cd}.$$

$\sigma_{cd} = \alpha_c f_{cd}$, se a largura não diminuir	Temos os dois casos Adotar ↓
$\sigma_{cd} = 0,9\alpha_c f_{cd}$, se a largura diminuir	$\sigma_{cd} = 0,95\alpha_c f_{cd}$
Se $f_{ck} \leq 50$ MPa, obtém-se $\sigma_{cd} = 0,80 f_{cd}$. ←	



Esforço normal: N_d

Momentos fletores:

$$M_{xd} = N_d e_x$$

$$M_{yd} = N_d e_y$$

A_{cc} = área comprimida com a tensão σ_{cd}

σ_{sdi} = tensão de cálculo na barra i

A_{si} = área da barra i

Equações de equilíbrio:

$$N_d = \int_{A_{cc}} \sigma_{cd} dA + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{sdi}$$

$$M_{xd} = \int_{A_{cc}} \sigma_{cd} x dA + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{sdi} x_{si}$$

$$M_{yd} = \int_{A_{cc}} \sigma_{cd} y dA + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{sdi} y_{si}$$

Dimensionamento: dadas as coordenadas dos vértices da seção e das barras de aço; dados os três esforços solicitantes de cálculo: obter a área total de aço na seção.

Verificação: dada a seção já dimensionada e dado o esforço normal: determinar os momentos fletores de cálculo que levam a seção à ruína.


Os dois problemas são resolvidos com o software **PACON**.

Tabelas para dimensionamento de seções retangulares (Apêndice 2)

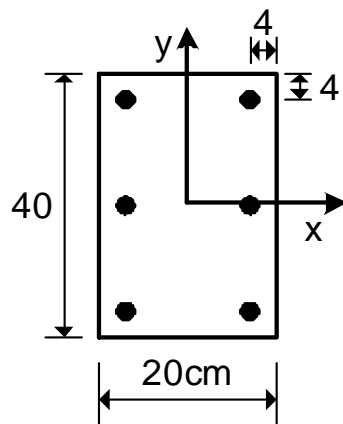
$$\text{Entrada: } \nu = \frac{N_d}{A_c \sigma_{cd}}; \quad \mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c h_x \sigma_{cd}}; \quad \mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c h_y \sigma_{cd}}$$

onde $A_c = h_x h_y$ é a área da seção transversal e $\sigma_{cd} = 0,80 f_{cd}$.

$$\text{Ler: } \omega \text{ e calcular } A_s = \frac{\omega A_c \sigma_{cd}}{f_{yd}}$$

As tabelas são restritas aos concretos do Grupo I 
(concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa).

Exemplo:



Concreto: $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$

Aço CA-50 ($f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$)

Dados:

$$N_k = 800 \text{ kN};$$

$$M_{xk} = 2000 \text{ kNcm}$$

$$M_{yk} = 4000 \text{ kNcm}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,4} \cong 14 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{cd} = 0,80 f_{cd} = 11,2 \text{ MPa}; \quad \sigma_{cd} = 1,12 \text{ kN/cm}^2.$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{1,15} = 43,48 \text{ kN/cm}^2; \quad h_x = 20 \text{ cm}; \quad h_y = 40 \text{ cm}.$$

$$A_c = h_x h_y = 20 \times 40 \Rightarrow A_c = 800 \text{ cm}^2$$

$$N_d = 1,4 N_k = 1,4 \times 800 \Rightarrow N_d = 1120 \text{ kN}$$

$$M_{xd} = 1,4 M_{xk} = 1,4 \times 2000 \Rightarrow M_{xd} = 2800 \text{ kNcm}$$

$$M_{yd} = 1,4 M_{yk} = 1,4 \times 4000 \Rightarrow M_{yd} = 5600 \text{ kNcm}$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \sigma_{cd}} = \frac{1120}{800 \times 1,12} \Rightarrow \nu = 1,25$$

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c h_x \sigma_{cd}} = \frac{2800}{800 \times 20 \times 1,12} \Rightarrow \mu_x \cong 0,15$$

$$\mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c h_y \sigma_{cd}} = \frac{5600}{800 \times 40 \times 1,12} \Rightarrow \mu_y \cong 0,15$$

Tabela A2.2: Interpolando ↓

Para $\nu = 1,2$: $\omega = 0,85$

Para $\nu = 1,4$: $\omega = 1,02$

Interpolando novamente para $\nu = 1,25$: $\omega = 0,89$.

$$A_s = \frac{\omega A_c \sigma_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,89 \times 800 \times 1,12}{43,48} \Rightarrow A_s = 18,34 \text{ cm}^2.$$

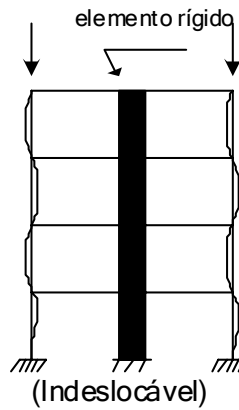
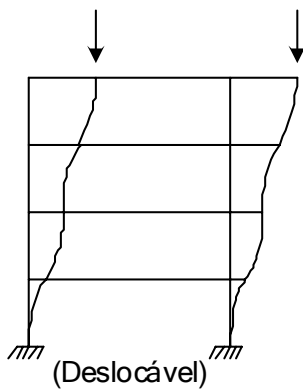
5- ESTRUTURAS INDESLOCÁVEIS

- **Subestrutura de contraventamento**

- Função principal: resistir às ações horizontais (vento).
- Também recebe cargas verticais.
- Deve garantir a indeslocabilidade horizontal do edifício.
- Os seus pilares são denominados de pilares de contraventamento.

- **Subestrutura contraventada**

- Função principal: resistir às cargas verticais.
- Os seus pilares são denominados de pilares contraventados.
- Esses pilares podem ser calculados como se fossem apoiados no nível das lajes de piso.



F_V = soma de todas as cargas verticais de serviço
 n = número de andares
 h_{tot} = altura total da edificação
 $E_{cs} I_c$ = rigidez à flexão dos elementos verticais na direção considerada
 α = parâmetro de instabilidade

A estrutura pode ser considerada indeslocável quando:

$$\alpha = h_{tot} \sqrt{\frac{F_V}{E_{cs} I_c}} \leq 0,2 + 0,1n, \text{ se } n \leq 3$$

CEB/78

$$\alpha \leq \alpha_{lim}, \text{ se } n \geq 4$$

Segundo a NBR-6118:

contraventamento por pilares-parede: $\alpha_{lim} = 0,7$

contraventamento por pórticos: $\alpha_{lim} = 0,5$

associação de pórticos e pilares-parede: $\alpha_{lim} = 0,6$

Pilar-parede de seção constante

$$E_{cs} = 0,85 \times 21500 \left(\frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{1/3} \text{ MPa}$$

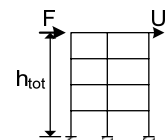
I_c = momento de inércia da seção transversal de concreto sem a inclusão das armaduras.

Pilar-parede de seção variável ou pórtico de contraventamento

Aplicamos uma força horizontal F no topo e calculamos o deslocamento horizontal U no topo da estrutura.

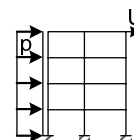
Rigidez equivalente:

$$EI_{eq} = \frac{F_H h_{tot}^3}{3U}$$



A rigidez equivalente também pode ser determinada considerando uma carga horizontal p , uniformemente distribuída.

$$EI_{eq} = \frac{ph_{tot}^4}{8U} \quad (\text{modelo de carga uniforme})$$



PROCEDIMENTO RECOMENDADO

A) Parâmetros de instabilidade para contraventamento feito por paredes estruturais e/ou pilares-parede

$$\alpha = h_{tot} \sqrt{\frac{F_V}{E_{cs} I_c}} \leq \alpha_{lim} \quad (\text{estrutura indeslocável}) \quad (6.2.6)$$

E_{cs} = módulo secante do concreto, I_c = momento de inércia da seção de concreto simples.

O coeficiente α_{lim} é função do número de andares n do edifício e do estado de fissuração do elemento de contraventamento.

- para elementos não fissurados:

$$\alpha_{lim} = 0,67 \sqrt{1 - \frac{0,60}{n}} \quad (6.2.7)$$

- para elementos fissurados:

$$\alpha_{lim} = 0,47 \sqrt{1 - \frac{0,60}{n}} \quad (6.2.8)$$

- Determinam-se as tensões de tração no concreto, para as cargas horizontais e as cargas verticais de cálculo que atuam no elemento estrutural (problema de flexão composta da Resistência dos Materiais).

- Comparam-se as tensões de tração máximas em cada andar com a resistência à tração característica inferior do concreto, $f_{ctk,inf}$, para saber o estado de fissuração do elemento de contraventamento.
- Pode-se fazer uma interpolação linear entre os valores dados nas equações (6.2.7) e (6.2.8), com base no tamanho do trecho do pilar-parede que se encontra fissurado.

B) Parâmetros de instabilidade para contraventamento feito por pórticos

- Determina-se a rigidez equivalente EI_{eq} dos pórticos com o modelo de carga uniforme.
- Na análise dos pórticos para cálculo do deslocamento horizontal U , considera-se a rigidez $EI = 0,70E_{cs}I_c$, para os pilares, e $EI = 0,35E_{cs}I_c$, para as vigas.

$$\alpha = h_{tot} \sqrt{\frac{F_V}{EI_{eq}}} \leq \alpha_{lim} \quad (\text{estrutura indeslocável}) \quad (6.2.9)$$

$$\alpha_{lim} = 0,66 \sqrt{1 - \frac{0,39}{n}} \leq 0,62 \quad (6.2.10)$$

C) Parâmetros de instabilidade para contraventamento feito pela associação de pórticos com paredes e/ou pilares-parede

- A rigidez equivalente da associação é obtida como para os pórticos.
- A princípio, considera-se $EI = 0,70E_{cs}I_c$ para uma parede ou pilar-parede. Porém, se ficar comprovado que esse elemento está fissurado para as cargas de cálculo, deve-se repetir a análise do conjunto considerando $EI = 0,35E_{cs}I_c$ para o mesmo.

$$\alpha = h_{tot} \sqrt{\frac{F_V}{EI_{eq}}} \leq \alpha_{lim} \quad (\text{estrutura indeslocável}) \quad (6.2.9)$$

$$\alpha_{lim} = 0,74 \sqrt{1 - \frac{0,53}{n}} \leq 0,72 \quad (6.2.11)$$

Tabela 6.2.1 – Valores limites para o parâmetro de instabilidade
(α_{lim})

n	Parede e pilar-parede *		Pórtico **	Pórtico e parede **
	não fissurada	fissurada		
1	0,42	0,30	0,52	0,51
2	0,56	0,39	0,59	0,63
3	0,60	0,42	0,62	0,67
4	0,62	0,43	0,62	0,69
5	0,63	0,44	0,62	0,70
10	0,65	0,46	0,62	0,72
20	0,66	0,46	0,62	0,72
α_{max}	0,67	0,47	0,62	0,72

* $\alpha = h_{tot} \sqrt{\frac{F_V}{E_{cs} I_c}} \leq \alpha_{lim}$; ** $\alpha = h_{tot} \sqrt{\frac{F_V}{EI_{eq}}} \leq \alpha_{lim}$

Exemplo 1:

Verificar se o pilar-parede da fig. 6.2.2 é suficiente para garantir a indelocabilidade de um edifício de 8 andares, cuja altura total desde a fundação é igual a 25 m. A soma de todas as cargas verticais de serviço é igual a 25.000 kN e o concreto possui $f_{ck} = 20$ MPa.

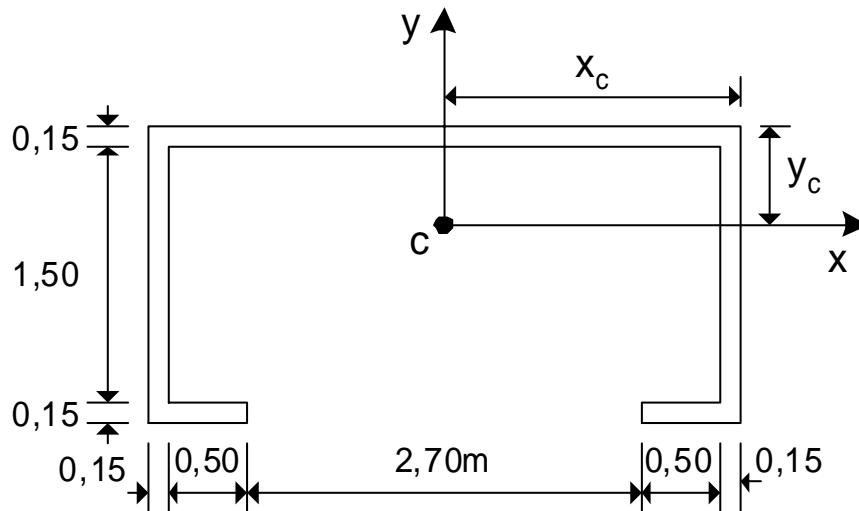


Fig. 6.2.2 - Pilar-parede de contraventamento

Prof. José Milton de Araújo - FURG

31

$$x_c = 2 \text{ m} ; \quad y_c = 0,63 \text{ m. (coordenadas do centróide)}$$

$$I_x = 3,02 \text{ m}^4 \text{ (em torno de } y \text{)} ; I_y = 0,54 \text{ m}^4 \text{ (em torno de } x \text{)}$$

$$E_{cs} = 0,85 \times 21500 \left(\frac{20 + 8}{10} \right)^{1/3} \cong 25760 \text{ MPa}$$

$$E_{cs} = 25760 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

Substituindo $n = 8$ nas equações (6.2.7) e (6.2.8), obtém-se:

- pilar-parede não fissurado: $\alpha_{lim} = 0,64$;
- pilar-parede fissurado: $\alpha_{lim} = 0,45$.

Prof. José Milton de Araújo - FURG

32

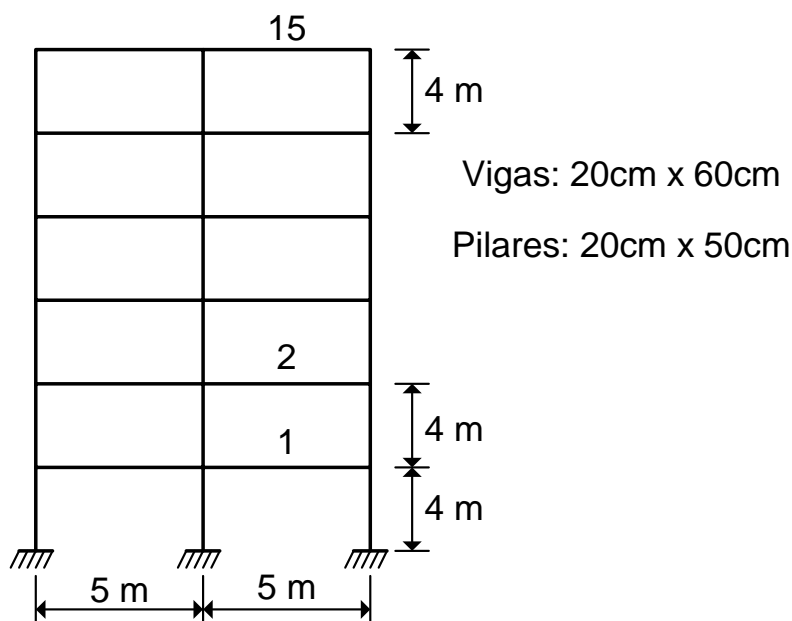
$$\alpha_x = 25 \sqrt{\frac{25000}{25760 \times 10^3 \times 3,02}} = 0,45$$

O pilar-parede sozinho é suficiente para garantir a indeslocabilidade nesta direção, independentemente do seu estado de fissuração.

$$\alpha_y = 25 \sqrt{\frac{25000}{25760 \times 10^3 \times 0,54}} = 1,06$$

O pilar-parede sozinho não é suficiente para garantir a indeslocabilidade na direção y , mesmo que ele se encontre não fissurado.

Exemplo 2: Determinar a rigidez equivalente do pórtico



$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
 $E_{cs} = 27200 \text{ MPa}$
 $h_{tot} = 60 \text{ m}$

Pilares: $EI = 0,70E_{cs}I_c$; Vigas: $EI = 0,35E_{cs}I_c$

Rodando PACON:

Modelo de carga concentrada: $EI_{eq} = 27,34 \times 10^6 \text{ kNm}^2$

Modelo de carga uniforme: $EI_{eq} = 21,90 \times 10^6 \text{ kNm}^2$

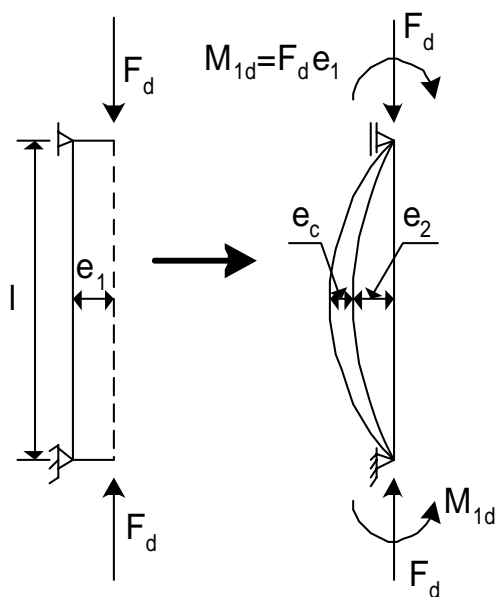
Observações:

- Ao usar o procedimento recomendado anteriormente, deve-se empregar o modelo de carga uniforme, pois os valores de α_{lim} foram determinados com base nesse modelo.
- A rigidez dos três pilares isoladamente é de apenas $3 \times 0,70 E_{cs} I_c = 0,12 \times 10^6 \text{ kNm}^2$, o que mostra a grande influência das vigas na rigidez do conjunto.

6- ÍNDICE DE ESBELTEZ

$\lambda = l_e / i$	$l_e =$ comprimento de flambagem do pilar;
Para as seções retangulares:	$i = \sqrt{I_c / A_c} =$ raio de giração da seção transversal;
$\lambda = \frac{l_e}{h} \sqrt{12}$	$I_c =$ momento de inércia;
	$A_c =$ área.
Normalmente, consideramos os pilares birrotulados: l_e é a distância entre os eixos das vigas de dois andares vizinhos.	
Deve-se limitar: $\lambda \leq 200$.	

7- PROCESSO SIMPLIFICADO PARA CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM



(Válido para $\lambda \leq 90$)
Excentricidade de segunda ordem:

$$e_2 = \frac{l^2}{10} \frac{0,005}{(v_o + 0,5)h}$$

$$v_o = \frac{F_d}{A_c f_{cd}} \geq 0,5$$

A_c = área da seção de concreto;
 h = altura na direção considerada

Excentricidade de fluência:

$$e_c = e_1 \left[e^{\frac{\varphi_\infty F_k}{P_e - F_k}} - 1 \right], \text{ se } \lambda > 50$$

e = base do logaritmo neperiano;

φ_∞ = coeficiente final de fluência;

Carga de Euler:
$$P_e = \frac{\pi^2 E_{cs} I_c}{l_e^2}$$

Pode desprezar a fluência se $\lambda \leq 50$

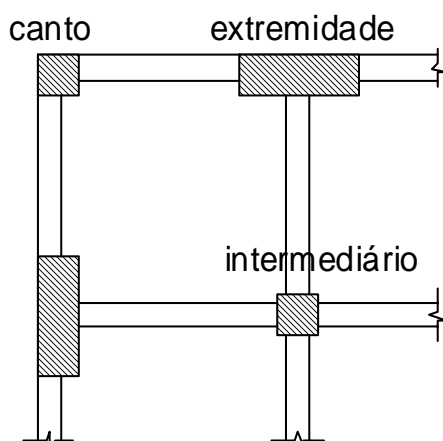
Esforços para dimensionamento:

$$N_d = F_d \quad \text{e} \quad M_d = F_d (e_1 + e_2 + e_c).$$

8- EXCENTRICIDADE ACIDENTAL E EXCENTRICIDADE MÍNIMA

Excentricidade acidental	Excentricidade mínima
$e_a = \frac{l_e}{400}$ <p>(leva em conta as imperfeições do eixo do pilar)</p>	$e_{1,\min} = 1,5 + 0,03h, \text{ cm}$ <p>(cobre os erros de avaliação do momento inicial)</p>
Excentricidade de primeira ordem: $e_1 = e_i + e_a$; $e_i = \frac{M_i}{F}$	

9- SITUAÇÕES DE PROJETO DOS PILARES



Pilar intermediário: podemos desprezar os momentos iniciais transmitidos pelas vigas; situação de projeto: compressão centrada.

Pilar de extremidade: considerar os momentos iniciais; situação de projeto: flexo-compressão normal.

Pilar de canto: considerar os momentos iniciais nas duas direções; situação de projeto: flexo-compressão oblíqua.

Cálculo aproximado dos momentos iniciais (NBR-6118)

$r_{vig} = 4I_{vig}/l_{vig}$
 $r_{sup} = 6I_{sup}/l_{sup}$
 $r_{inf} = 6I_{inf}/l_{inf}$

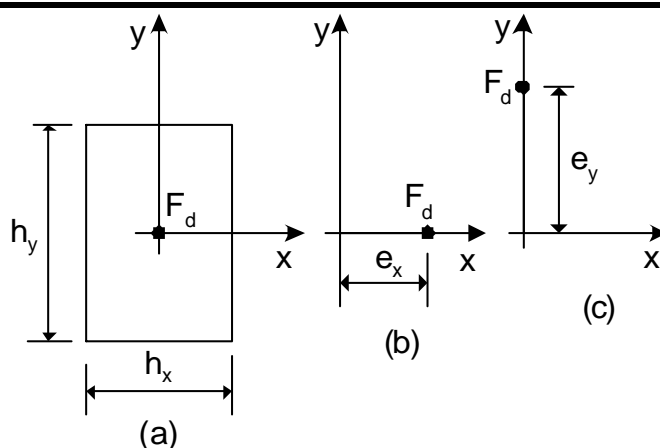
$$M_{inf} = M_{eng} \frac{r_{inf}}{r_{inf} + r_{sup} + r_{vig}}$$

$$M_{sup} = M_{eng} \frac{r_{sup}}{r_{inf} + r_{sup} + r_{vig}}$$

M_{eng} = momento de engastamento perfeito;
 r = coeficiente de rigidez.

10- SITUAÇÕES DE CÁLCULO DOS PILARES

A) Pilares intermediários



Primeira situação de cálculo:

$$e_x = e_{1x} + e_{2x} + e_{cx}$$

$$e_{ax} = \frac{l_{ex}}{400} ; e_{ix} = 0$$

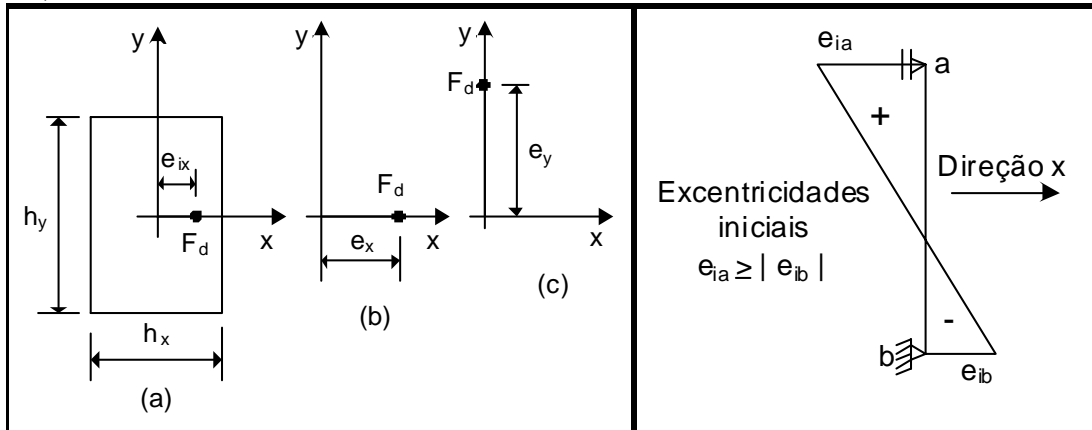
$$e_{1x, \min} = 1,5 + 0,03h_x$$

$$e_{1x} \geq \begin{cases} e_{ix} + e_{ax} \\ e_{1x, \min} \end{cases}$$

Segunda situação de cálculo: $e_y = e_{1y} + e_{2y} + e_{cy}$

Realizar dois dimensionamentos à flexo-compressão normal e adotar a maior armadura. ★

B) Pilares de extremidade



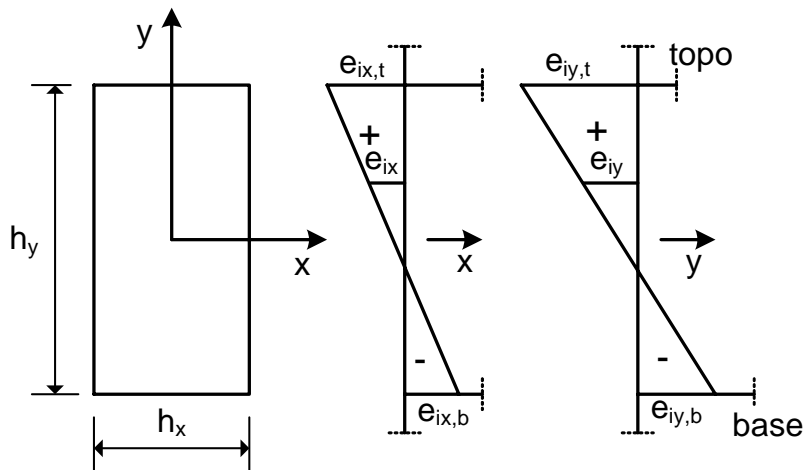
B.1) Dimensionamento segundo a direção x

- Seção de extremidade: $e_x = e_{ia} + e_{ax} \geq e_{1x, \min}$ (1)
- Seção intermediária: $e_x = e_{1x} + e_{2x} + e_{cx}$ (2)

$e_{ix} \geq \begin{cases} 0,6e_{ia} + 0,4e_{ib} \\ 0,4e_{ia} \end{cases}$	$e_{1x} \geq \begin{cases} e_{ix} + e_{ax} \\ e_{1x, \min} \end{cases}$
$e_{cx} = (e_{ix} + e_{ax}) \left[e^{\frac{\varphi_{\infty} F_k}{P_{ex} - F_k}} - 1 \right]$	Dimensionar para o maior valor de e_x resultante das equações (1) e (2).
B.2) Dimensionamento segundo a direção y	
$e_{iy} = 0 \quad ; \quad e_{1y} \geq \begin{cases} e_{iy} + e_{ay} \\ e_{1y, \min} \end{cases}$	$e_y = e_{1y} + e_{2y} + e_{cy}$

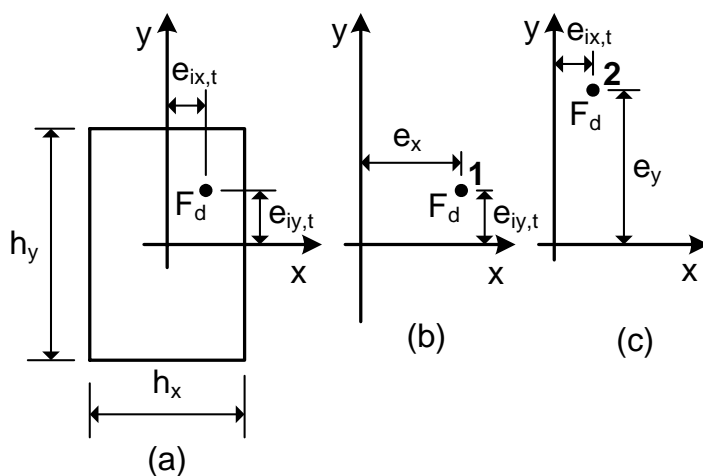
Realizar dois dimensionamentos à flexo-compressão normal e adotar a maior armadura. ★

C) Pilares de canto



- Há momentos iniciais segundo as duas direções
- Todas as seções do pilar estão sob flexo-compressão oblíqua
- Devemos considerar 6 (seis) situações de cálculo: duas na seção do topo, duas na seção da base e duas na seção intermediária.

Situações de cálculo na seção de topo do pilar



- Situação de cálculo 1:

$$e_x = e_{1x} \quad ; \quad e_y = e_{iy,t}$$

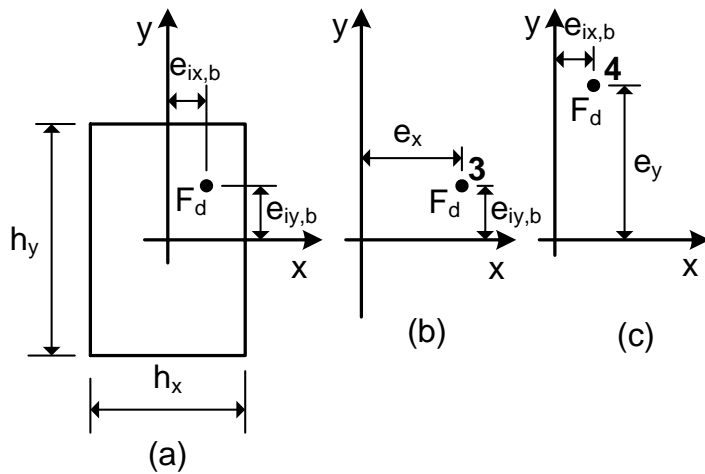
$$e_{1x} = e_{ix,t} + e_{ax} \geq e_{1x,\min}$$

- Situação de cálculo 2:

$$e_x = e_{ix,t} \quad ; \quad e_y = e_{1y}$$

$$e_{1y} = e_{iy,t} + e_{ay} \geq e_{1y,\min}$$

Situações de cálculo na seção da base do pilar



• Situação de cálculo 3:

$$e_x = e_{1x} \quad ; \quad e_y = e_{iy,b}$$

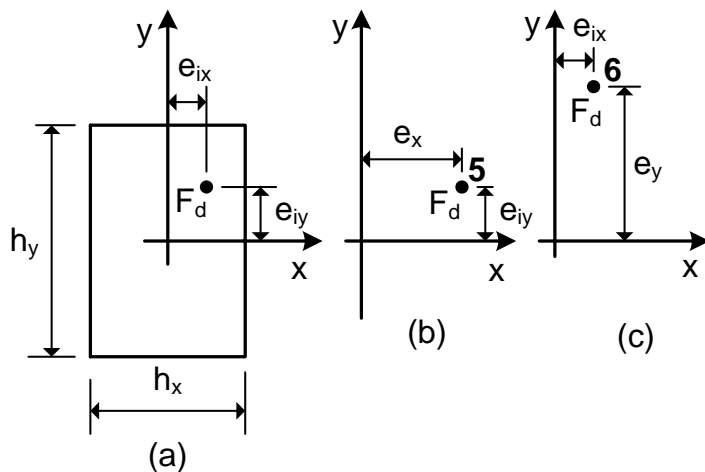
$$e_{1x} = e_{ix,b} + e_{ax} \geq e_{1x,\min}$$

• Situação de cálculo 4:

$$e_x = e_{ix,b} \quad ; \quad e_y = e_{1y}$$

$$e_{1y} = e_{iy,b} + e_{ay} \geq e_{1y,\min}$$

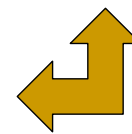
Situações de cálculo na seção intermediária do pilar



Admitindo que as maiores excentricidades, em valor absoluto, ocorrem na seção de topo.

Excentricidades iniciais na seção intermediária:

$$e_{ix} \geq \begin{cases} 0,6e_{ix,t} + 0,4e_{ix,b} \\ 0,4e_{ix,t} \end{cases} \quad ; \quad e_{iy} \geq \begin{cases} 0,6e_{iy,t} + 0,4e_{iy,b} \\ 0,4e_{iy,t} \end{cases}$$



• **Situação de cálculo 5:**

$$e_x = e_{1x} + e_{2x} + e_{cx} \quad ; \quad e_y = e_{iy}$$

$$e_{1x} = e_{ix} + e_{ax} \geq e_{1x,\min}$$

• **Situação de cálculo 6:**

$$e_x = e_{ix} \quad ; \quad e_y = e_{1y} + e_{2y} + e_{cy}$$

$$e_{1y} = e_{iy} + e_{ay} \geq e_{1y,\min}$$

A princípio, devem ser feitos 6 dimensionamentos à flexo-compressão oblíqua (usando PACON, por exemplo).

O trabalho é excessivo, quando o dimensionamento é feito por meio de tabelas. Nesses casos, deve-se analisar a ordem de grandeza das excentricidades, para eliminar as situações de cálculo irrelevantes.

OBSERVAÇÕES:

1. Em todos os casos, deve-se ter $\lambda \leq 90$. Se $\lambda > 90$, o pilar é esbelto, devendo-se empregar um processo rigoroso (Capítulo 9 do Volume 3 e software JM PILAR).

2. Nos edifícios consideramos $l_e = l$, admitindo que os pilares são birrotulados.

3. No cálculo da excentricidade de fluência, não respeitamos a excentricidade mínima. A excentricidade de fluência é calculada como

$$e_{cx} = (e_{ix} + e_{ax}) \left[e^{\frac{\varphi_{\infty} F_k}{P_{ex} - F_k}} - 1 \right] \quad (\text{exemplo para a direção } x)$$

Nos pilares intermediários, $e_{ix} = 0$.

11- EXEMPLOS DE DIMENSIONAMENTO

Nos exemplos a seguir:

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa}$$

Aço CA-50

$$(f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2)$$

$$\varphi_{\infty} = 2,5$$

$$l_e = 4 \text{ m}$$

(nas duas direções)

$$\gamma_f = 1,4$$

$$\gamma_c = 1,4$$

$$\gamma_s = 1,15$$

$$F_k = 857 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow F_d = 1,4F_k = 1200 \text{ kN}$$

Cálculos preliminares:

$$f_{cd} = \frac{2}{1,4} \cong 1,4 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{50}{1,15} = 43,48 \text{ kN/cm}^2$$

$$E_{cs} = 0,85 \times 21500 \left(\frac{f_{ck} + 8}{10} \right)^{1/3} \text{ MPa}$$

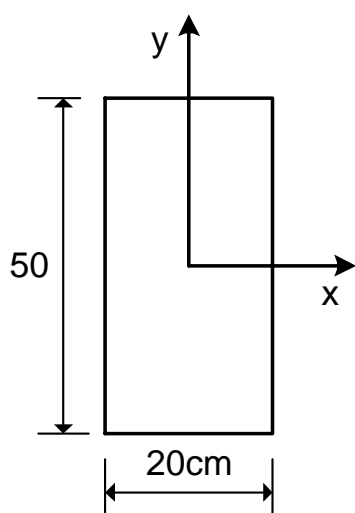
$$E_{cs} = 2576 \text{ kN/cm}^2$$

Excentricidades acidentais:

$$e_{ax} = e_{ay} = \frac{l_e}{400} = \frac{400}{400} = 1 \text{ cm}$$

Exemplo 1: Pilar intermediário

Solução: Iniciar pela direção de maior esbeltez



1) Dimensionamento segundo a direção x

a) Índice de esbeltez:

$$\lambda_x = \frac{l_{ex}}{\sqrt{I_{cx}/A_c}} = \frac{l_{ex} \sqrt{12}}{h_x} = \frac{400 \sqrt{12}}{20} = 69$$

b) Excentricidade de segunda ordem

$$\nu_o = \frac{F_d}{A_c f_{cd}} = \frac{1200}{20 \times 50 \times 1,4} = 0,86$$

Como $\nu_o > 0,5$, adota-se o valor calculado $\nu_o = 0,86$.

$$e_{2x} = \frac{l_{ex}^2}{10} \frac{0,005}{(\nu_o + 0,5)h_x}$$

$$e_{2x} = \frac{400^2}{10} \frac{0,005}{(0,86 + 0,5)20} \Rightarrow e_{2x} = 2,94 \text{ cm}$$

c) Excentricidade de fluência ($\lambda_x > 50$)

$$I_{cx} = \frac{h_y h_x^3}{12} = \frac{50 \times 20^3}{12} = 33.333 \text{ cm}^4$$

$$P_{ex} = \frac{\pi^2 E_{cs} I_{cx}}{l_{ex}^2} = \frac{\pi^2 \times 2576 \times 33.333}{400^2} = 5297 \text{ kN}$$

$$e_{cx} = e_{ax} \left[e^{\frac{\varphi_{\infty} F_k}{P_{ex} - F_k}} - 1 \right] = 1 \left[e^{\frac{2,5 \times 857}{5297 - 857}} - 1 \right] \Rightarrow e_{cx} = 0,62 \text{ cm}$$

Prof. José Milton de Araújo - FURG

53

d) Excentricidade mínima

$$e_{1x, \min} = 1,5 + 0,03h_x \Rightarrow e_{1x, \min} = 2,1 \text{ cm}$$

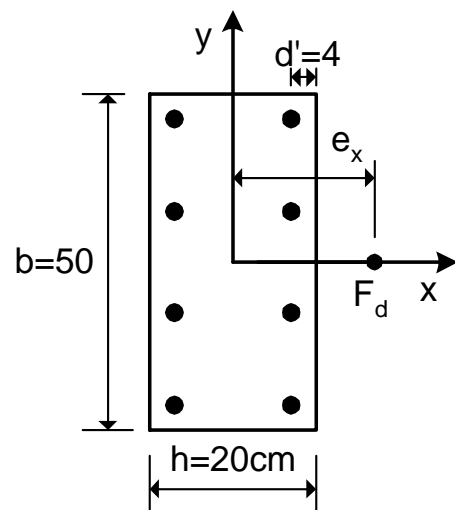
e) Situação de cálculo

$$e_{1x} \geq \begin{cases} e_{ax} = 1,0 \\ e_{1x, \min} = 2,1 \end{cases} \Rightarrow e_{1x} = 2,1 \text{ cm}$$

Excentricidade total na direção x:

$$e_x = e_{1x} + e_{2x} + e_{cx}$$

$$e_x = 2,1 + 2,94 + 0,62 \Rightarrow e_x = 5,66 \text{ cm}$$



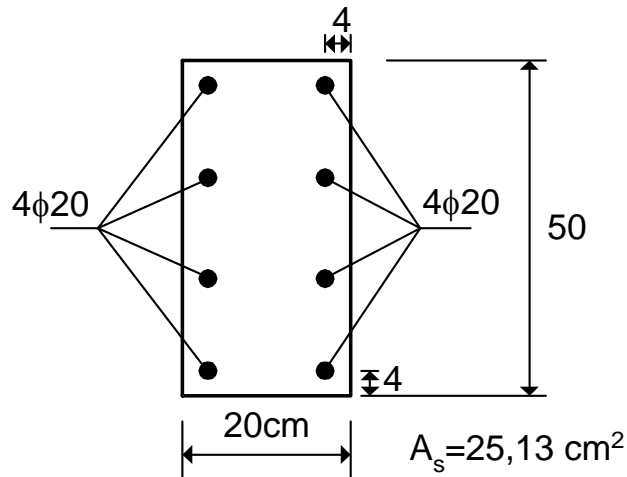
Primeira situação de cálculo

Dimensionamento para a primeira situação de cálculo:

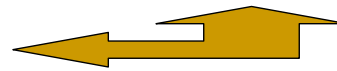
$$N_d = F_d = 1200\text{kN}; \quad M_d = N_d e_x = 1200 \times 5,66 = 6792\text{kNcm}.$$

Tabela A1.4 do Apêndice 1: $A_s = 25,67\text{ cm}^2$

Tabela A3.2 (Apêndice 3 do Volume 2): 8 barras de 20mm
(área = $25,13\text{ cm}^2$, praticamente igual à área calculada).



**Solução obtida
para a primeira
situação de cálculo**



2) Dimensionamento segundo a direção y

$$e_{ay} = 1\text{ cm}; \quad e_{1y,\text{min}} = 3\text{ cm} \Rightarrow e_{1y} = 3\text{ cm};$$

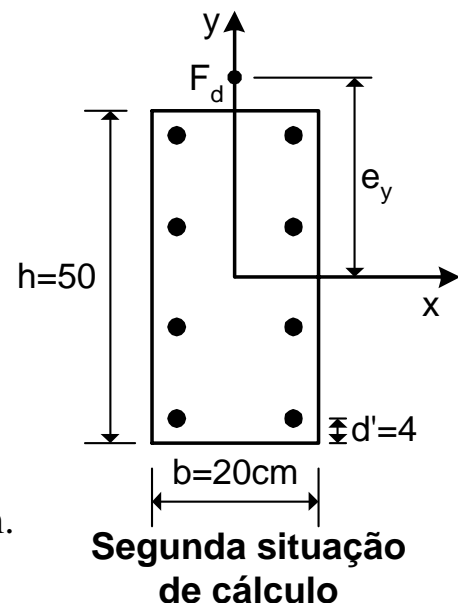
$$e_{2y} = 1,18\text{ cm}; \quad e_{cy} = 0 \text{ (pois } \lambda_y = 28 < 50 \text{)}.$$

Logo, $e_y = 3 + 1,18 = 4,18\text{ cm}$.

Dimensionamento:

$$N_d = 1200\text{kN}; \quad M_d = 1200 \times 4,18 = 5016\text{kNcm}.$$

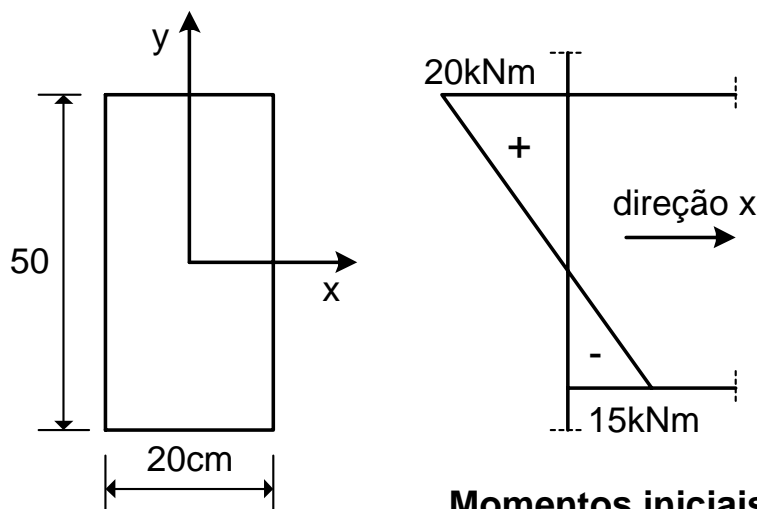
Tabela A1.10 do Apêndice 1: $A_s = 5,80\text{ cm}^2$



**Segunda situação
de cálculo**

Como na seção já existe uma armadura com área de $25,13\text{ cm}^2$, exigida pelo dimensionamento segundo a direção x, conclui-se que essa armadura satisfaz com bastante folga as exigências para a direção y. Portanto, a direção x é a crítica.

Exemplo 2: Pilar de extremidade



**Momentos iniciais de serviço
segundo a direção x**

Iniciar pela direção x: direção de maior esbeltez

1) Dimensionamento segundo a direção x

a) Índice de esbeltez: $\lambda_x = 69$ (ver exemplo 1).

b) Excentricidades iniciais

$$e_{ia} = \frac{2000}{857} = 2,33 \text{ cm} ; e_{ib} = -\frac{1500}{857} = -1,75 \text{ cm}.$$

c) Excentricidade mínima

$$e_{1x, \min} = 1,5 + 0,03 \times 20 \Rightarrow e_{1x, \min} = 2,1 \text{ cm}$$

Secção de extremidade:

$$e_x \geq \begin{cases} e_{ia} + e_{ax} = 2,33 + 1 = 3,33 \\ e_{1x, \min} = 2,1 \end{cases} \Rightarrow e_x = 3,33 \text{ cm} \quad \star$$

d) Excentricidade inicial na seção intermediária

$$e_{ix} \geq \begin{cases} 0,6e_{ia} + 0,4e_{ib} = 0,6 \times 2,33 + 0,4(-1,75) = 0,70 \text{ cm} \\ 0,4e_{ia} = 0,4 \times 2,33 = 0,93 \text{ cm} \end{cases}$$

Logo, $e_{ix} = 0,93 \text{ cm}$.

e) Excentricidade de segunda ordem:

$$e_{2x} = 2,94 \text{ cm (ver exemplo 1)}.$$

f) Excentricidade de fluência: $P_{ex} = 5297 \text{ kN}$ (ver exemplo 1).

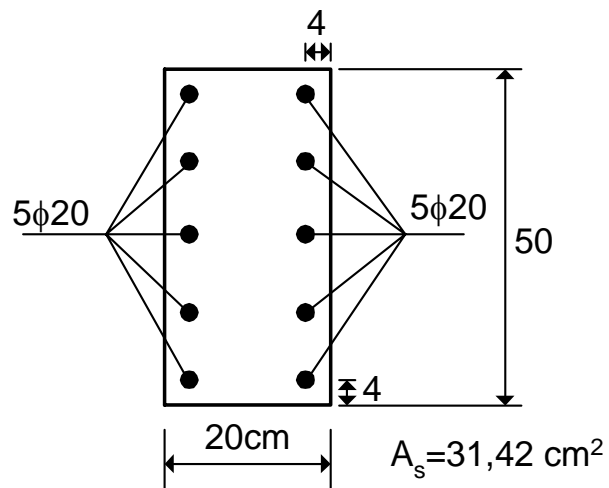
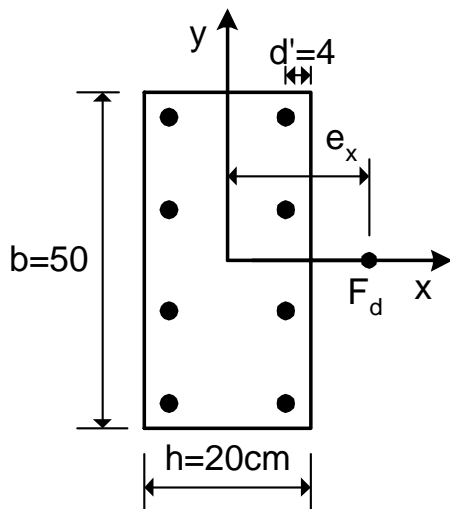
$$e_{cx} = (e_{ix} + e_{ax}) \left[e^{\frac{\varphi_{\infty} F_k}{P_{ex} - F_k}} - 1 \right]$$
$$e_{cx} = (0,93 + 1) \left[e^{\frac{2,5 \times 857}{5297 - 857}} - 1 \right] = 1,20 \text{ cm}.$$

Seção intermediária:

$$e_{1x} \geq \begin{cases} e_{ix} + e_{ax} = 0,93 + 1 = 1,93 \\ e_{1x, \min} = 2,1 \end{cases} \Rightarrow e_{1x} = 2,1 \text{ cm}$$

$$e_x = e_{1x} + e_{2x} + e_{cx} = 2,1 + 2,94 + 1,20 \Rightarrow e_x = 6,24 \text{ cm} \star$$

Logo, deve-se dimensionar a seção intermediária com uma excentricidade $e_x = 6,24 \text{ cm}$.



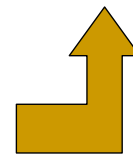
Primeira situação de cálculo

$$N_d = 1200 \text{ kN}; \quad M_d = 1200 \times 6,24 = 7488 \text{ kNcm.}$$

Tabela A1.4 do Apêndice 1: $A_s \cong 29,00 \text{ cm}^2$.

Adotando $10\phi 20$, tem-se uma área de aço igual a $31,42 \text{ cm}^2$ (tabela A3.2, Apêndice 3, Volume 2).

Solução

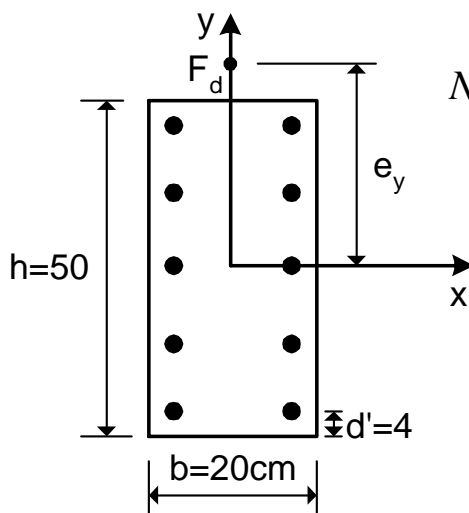


2) Dimensionamento segundo a direção y

$$e_{ay} = 1 \text{ cm}; \quad e_{1y, \min} = 3 \text{ cm} \Rightarrow e_{1y} = 3 \text{ cm}$$

$$e_{2y} = 1,18 \text{ cm}; \quad e_{cy} = 0 \text{ (pois } \lambda_y = 28 < 50 \text{)}.$$

Excentricidade total: $e_y = 3 + 1,18 = 4,18 \text{ cm.}$



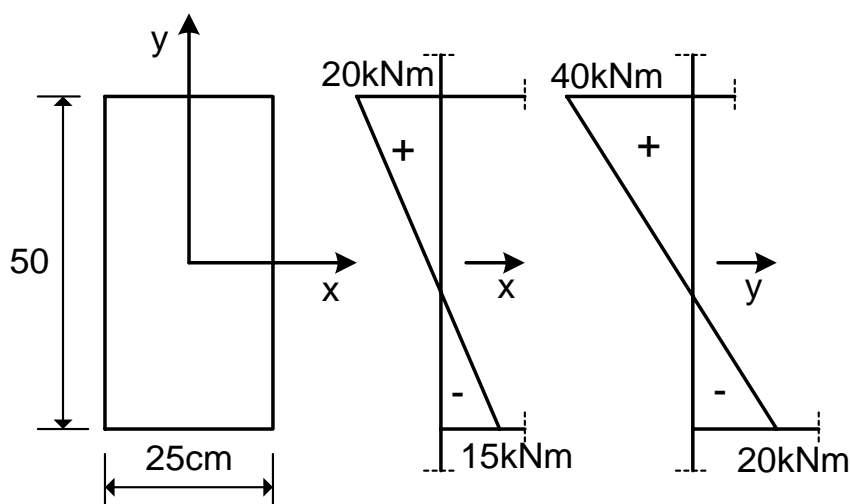
$$N_d = 1200 \text{ kN}; \quad M_d = 1200 \times 4,18 = 5016 \text{ kNcm.}$$

Tabela A1.14 do Apêndice 1: $A_s = 6,07 \text{ cm}^2$.

Como a seção já possui uma área de aço igual a $31,42 \text{ cm}^2$, exigida pelo dimensionamento segundo a direção x, conclui-se que a solução é aquela indicada anteriormente ($10 \phi 20$).

Segunda situação de cálculo

Exemplo 3: Pilar de canto



Seção transversal e momentos iniciais de serviço

Solução:

a) Excentricidades iniciais

$$\text{No topo: } e_{ix,t} = \frac{2000}{857} = 2,33 \text{ cm; } e_{iy,t} = \frac{4000}{857} = 4,66 \text{ cm}$$

$$\text{Na base: } e_{ix,b} = \frac{-1500}{857} = -1,75 \text{ cm; } e_{iy,b} = \frac{-2000}{857} = -2,33 \text{ cm}$$

Na seção intermediária:

$$e_{ix} \geq \begin{cases} 0,6 \times 2,33 - 0,4 \times 1,75 = 0,70 \\ 0,4 \times 2,33 = 0,93 \end{cases} \Rightarrow e_{ix} = 0,93 \text{ cm}$$

$$e_{iy} \geq \begin{cases} 0,6 \times 4,66 - 0,4 \times 2,33 = 1,86 \\ 0,4 \times 4,66 = 1,86 \end{cases} \Rightarrow e_{iy} = 1,86 \text{ cm}$$

b) Excentricidades mínimas

$$e_{1x,\min} = 1,5 + 0,03 \times 25 = 2,25 \text{ cm} ; \quad e_{1y,\min} = 1,5 + 0,03 \times 50 = 3,00 \text{ cm}$$

c) **Situação de cálculo 1 (no topo)**

$$e_{1x} \geq \begin{cases} e_{ix,t} + e_{ax} = 2,33 + 1,00 = 3,33 \\ e_{1x,\min} = 2,25 \end{cases} \Rightarrow e_{1x} = 3,33 \text{ cm}$$

Dimensionamento à flexo-compressão com as excentricidades:

➤ $e_x = 3,33 \text{ cm} ; e_y = 4,66 \text{ cm}$

d) **Situação de cálculo 2 (no topo)**

$$e_{1y} \geq \begin{cases} e_{iy,t} + e_{ay} = 4,66 + 1,00 = 5,66 \\ e_{1y,\min} = 3,00 \end{cases} \Rightarrow e_{1y} = 5,66 \text{ cm}$$

Dimensionamento à flexo-compressão com as excentricidades:

➤ $e_x = 2,33 \text{ cm} ; e_y = 5,66 \text{ cm}$

e) Situação de cálculo 3 (na base)

$$e_{1x} \geq \begin{cases} e_{ix,b} + e_{ax} = 1,75 + 1,00 = 2,75 \\ e_{1x,\min} = 2,25 \end{cases} \Rightarrow e_{1x} = 2,75 \text{ cm}$$

Dimensionamento à flexo-compressão com as excentricidades:

➤ $e_x = 2,75 \text{ cm}$; $e_y = 2,33 \text{ cm}$

f) Situação de cálculo 4 (na base)

$$e_{1y} \geq \begin{cases} e_{iy,b} + e_{ay} = 2,33 + 1,00 = 3,33 \\ e_{1y,\min} = 3,00 \end{cases} \Rightarrow e_{1y} = 3,33 \text{ cm}$$

Dimensionamento à flexo-compressão com as excentricidades:

➤ $e_x = 1,75 \text{ cm}$; $e_y = 3,33 \text{ cm}$

g) Situação de cálculo 5 (na seção intermediária)

$$e_{1x} \geq \begin{cases} e_{ix} + e_{ax} = 0,93 + 1,00 = 1,93 \\ e_{1x,\min} = 2,25 \end{cases} \Rightarrow e_{1x} = 2,25 \text{ cm}$$

Índice de esbeltez: $\lambda_x = \frac{l_{ex} \sqrt{12}}{h_x} = \frac{400 \sqrt{12}}{25} = 55$

Excentricidade de segunda ordem:

$$\nu_o = \frac{F_d}{A_c f_{cd}} = \frac{1200}{25 \times 50 \times 1,4} = 0,69$$

Como $\nu_o > 0,5$, adota-se o valor calculado $\nu_o = 0,69$.

$$e_{2x} = \frac{l_{ex}^2}{10} \frac{0,005}{(v_o + 0,5)h_x} ; e_{2x} = \frac{400^2}{10} \frac{0,005}{(0,69 + 0,5)25} \Rightarrow e_{2x} = 2,69 \text{ cm}$$

Excentricidade de fluência:

$$P_{ex} = \frac{\pi^2 E_{cs} I_{cx}}{l_{ex}^2} = 10345 \text{ kN}$$

$$e_{cx} = (e_{ix} + e_{ax}) \left[e^{\frac{\varphi_{\infty} F_k}{P_{ex} - F_k}} - 1 \right]$$

$$e_{cx} = (0,93 + 1) \left[e^{\frac{2,5 \times 857}{10345 - 857}} - 1 \right] = 0,49 \text{ cm}$$

$$e_x = e_{1x} + e_{2x} + e_{cx} = 2,25 + 2,69 + 0,49 = 5,43 \text{ cm}$$

Dimensionamento à flexo-compressão com as excentricidades:

$$\triangleright e_x = 5,43 \text{ cm} ; e_y = 1,86 \text{ cm}$$

h) Situação de cálculo 6 (na seção intermediária)

$$e_{1y} \geq \begin{cases} e_{iy} + e_{ay} = 1,86 + 1,00 = 2,86 \\ e_{1y, \min} = 3,00 \end{cases} \Rightarrow e_{1y} = 3,00 \text{ cm}$$

$$\text{Índice de esbeltez: } \lambda_y = \frac{l_{ey} \sqrt{12}}{h_y} = \frac{400 \sqrt{12}}{50} = 27 < 50$$

Excentricidade de segunda ordem:

$$e_{2y} = \frac{400^2}{10} \frac{0,005}{(0,69 + 0,5)50} \Rightarrow e_{2y} = 1,34 \text{ cm}$$

Excentricidade de fluência: $e_{cy} = 0$, pois $\lambda_y < 50$

$$e_y = e_{1y} + e_{2y} + e_{cy} = 3,00 + 1,34 + 0,00 = 4,34 \text{ cm}$$

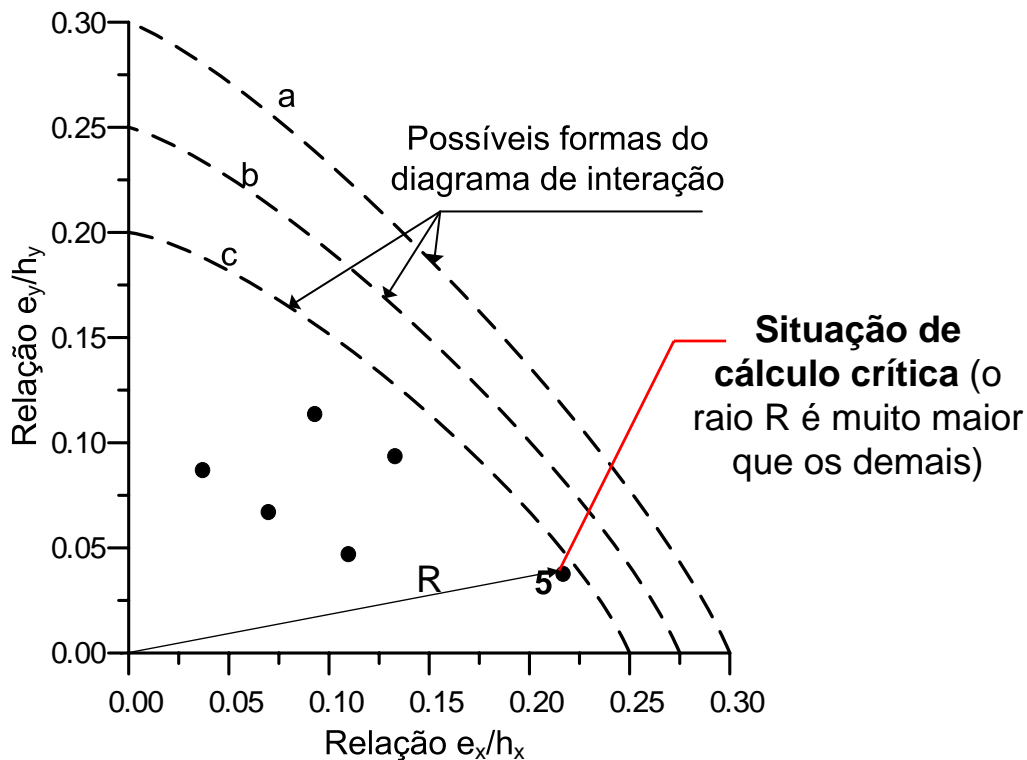
Dimensionamento à flexo-compressão com as excentricidades:

➤ $e_x = 0,93 \text{ cm}$; $e_y = 4,34 \text{ cm}$

Excentricidades para o dimensionamento

Situação de cálculo	Excentricidades (cm)		Excentricidades relativas	
	e_x	e_y	e_x/h_x	e_y/h_y
1	3,33	4,66	0,1332	0,0932
2	2,33	5,66	0,0932	0,1132
3	2,75	2,33	0,1100	0,0466
4	1,75	3,33	0,070	0,0666
5	5,43	1,86	0,2172	0,0372
6	0,93	4,34	0,0372	0,0868

$$\text{Raio: } R = \sqrt{\left(\frac{e_x}{h_x}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{h_y}\right)^2}$$



Representação das situações de cálculo em um diagrama de interação adimensional hipotético

Neste exemplo, basta dimensionar para a situação crítica (número 5). Havendo dúvidas, deve-se realizar o dimensionamento para outras situações de cálculo.

Dimensionamento para a situação de cálculo 5:

$$N_d = 1200 \text{ kN};$$

$$M_{xd} = N_d e_x = 1200 \times 5,43 = 6516 \text{ kNcm};$$

$$M_{yd} = N_d e_y = 1200 \times 1,86 = 2232 \text{ kNcm}.$$

Empregando as tabelas de flexo-compressão oblíqua:

$$\sigma_{cd} = 0,80 f_{cd} = 0,80 \times 1,4 \Rightarrow \sigma_{cd} = 1,12 \text{ kN/cm}^2$$

$$A_c = h_x h_y = 25 \times 50 \Rightarrow A_c = 1250 \text{ cm}^2$$

$$v = \frac{N_d}{A_c \sigma_{cd}} = \frac{1200}{1250 \times 1,12} \Rightarrow v = 0,86$$

$$\mu_x = \frac{M_{xd}}{A_c h_x \sigma_{cd}} = \frac{6516}{1250 \times 25 \times 1,12} \Rightarrow \mu_x = 0,19$$

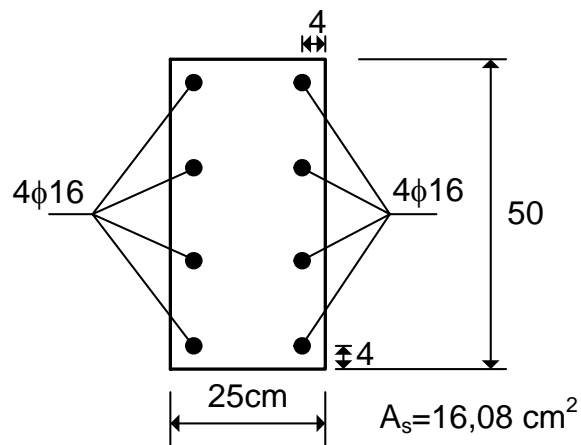
$$\mu_y = \frac{M_{yd}}{A_c h_y \sigma_{cd}} = \frac{2232}{1250 \times 50 \times 1,12} \Rightarrow \mu_y = 0,03$$

Da Tabela A2.3 (Volume 3), obtém-se: $\omega = 0,44$

$$A_s = \frac{\omega A_c \sigma_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0,44 \times 1250 \times 1,12}{43,48} \Rightarrow A_s = 14,17 \text{ cm}^2$$

Tabela A3.2 (Apêndice 3, Volume 2):

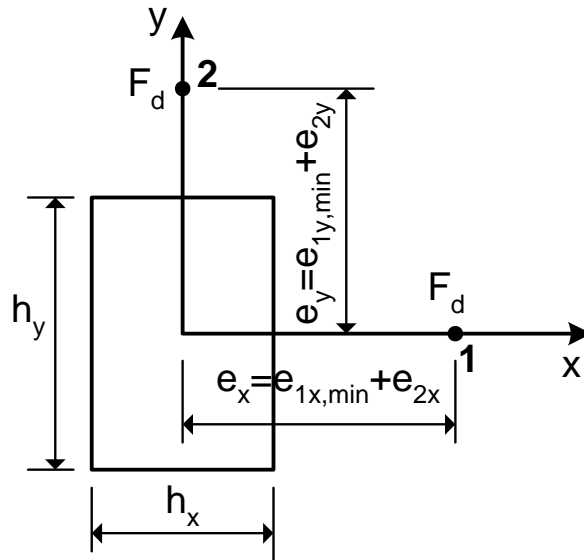
8 barras de 16 mm: área de aço existente = 16,08 cm².



Solução para o pilar de canto

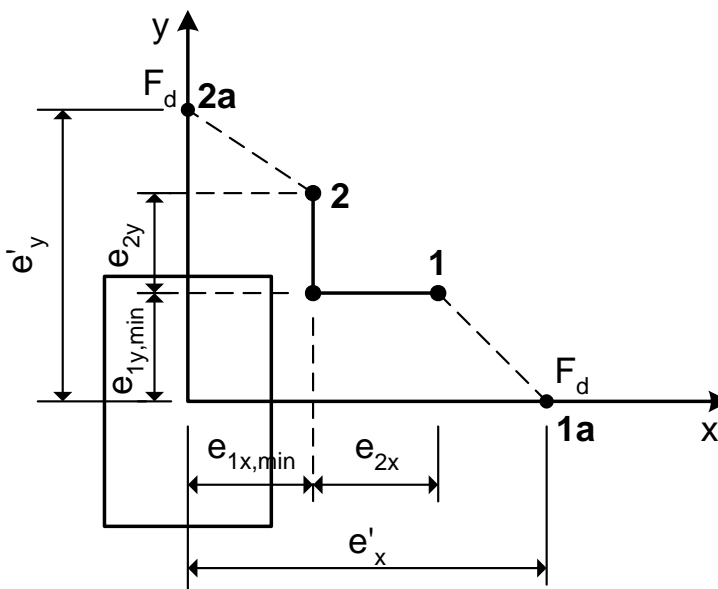
Simplificações para o projeto dos pilares contraventados dos edifícios

- Em geral, $\lambda < 50$ para os pilares dos edifícios: pode-se desprezar a excentricidade de fluência.
- Em geral, os momentos iniciais são pequenos, de modo que a excentricidade de primeira ordem é menor que a excentricidade mínima $e_{1,\min}$.
- Nesses casos, basta considerar a excentricidade mínima $e_{1,\min}$ e a excentricidade de segunda ordem e_2 .
- Essas simplificações não se aplicam aos pilares de contraventamento. Para eles, devem ser consideradas as situações de cálculo corretas, como foi apresentado anteriormente.



Situações de cálculo simplificadas para os pilares intermediários e para os pilares de extremidade contraventados.

Além disso, se h_y é significativamente maior que h_x , a segunda situação de cálculo pode ser eliminada.



Situações de cálculo simplificadas para os pilares de canto contraventados: situações 1 e 2 em flexo-compressão oblíqua

Simplificação adicional para os pilares de canto contraventados:
dimensionar em flexo-compressão normal para as situações de cálculo **1a** e **2a**. Haverá um maior consumo de aço, em relação às situações **1** e **2**.

Situação 1a:
$$e'_x = (e_{1x,\min} + e_{2x}) + e_{1y,\min} \left(\frac{h_x}{h_y} \right)$$

Situação 2a:
$$e'_y = (e_{1y,\min} + e_{2y}) + e_{1x,\min} \left(\frac{h_y}{h_x} \right)$$

As situações 1a e 2a são antieconômicas e devem ser evitadas.